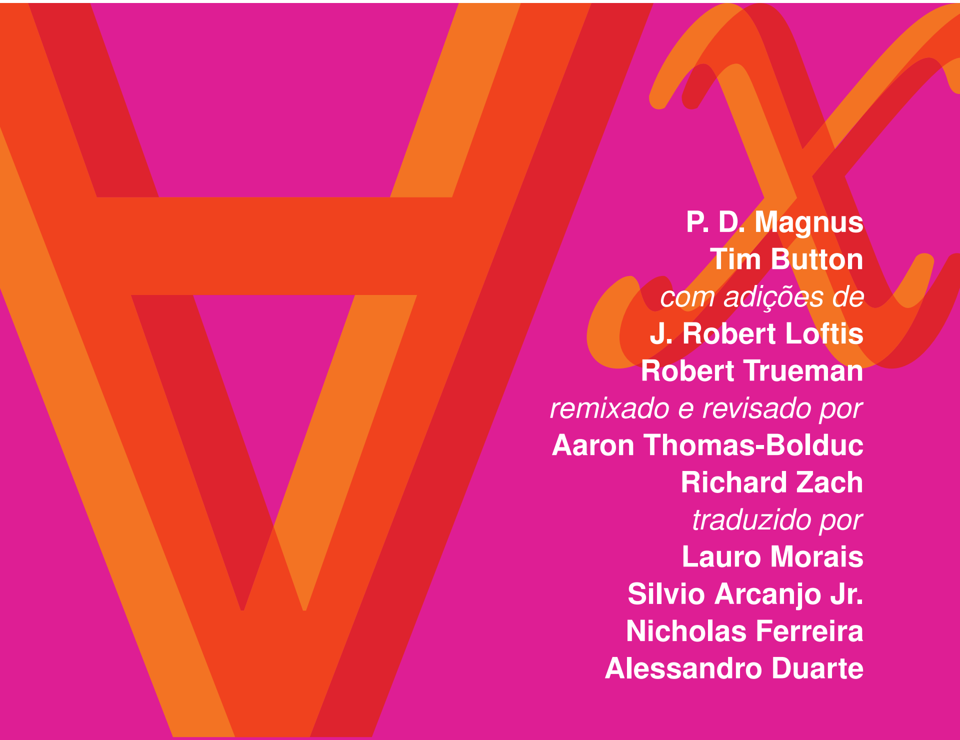
forall*x*

CALGARY

Uma Introdução à Lógica Formal



P. D. Magnus
Tim Button
com adições de
J. Robert Loftis
Robert Trueman
remixado e revisado por
Aaron Thomas-Bolduc
Richard Zach
traduzido por
Lauro Morais
Silvio Arcanjo Jr.
Nicholas Ferreira
Alessandro Duarte

Fall 2019

forall x: Calgary

An Introduction to Formal Logic

By **P. D. Magnus**
Tim Button
with additions by
J. Robert Loftis
Robert Trueman
remixed and revised by
Aaron Thomas-Bolduc
Richard Zach

Fall 2019

This book is based on forall$x$: *Cambridge*, by Tim Button (University College London), used under a CC BY 4.0 license, which is based in turn on forall$x$, by P.D. Magnus (University at Albany, State University of New York), used under a CC BY 4.0 license, and was remixed, revised, & expanded by Aaron Thomas-Bolduc & Richard Zach (University of Calgary). It includes additional material from forall$x$ by P.D. Magnus and *Metatheory* by Tim Button, used under a CC BY 4.0 license, from forall$x$: *Lorain County Remix*, by Cathal Woods and J. Robert Loftis, and from *A Modal Logic Primer* by Robert Trueman, used with permission.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 license. You are free to copy and redistribute the material in any medium or format, and remix, transform, and build upon the material for any purpose, even commercially, under the following terms:

- You must give appropriate credit, provide a link to the license, and indicate if changes were made. You may do so in any reasonable manner, but not in any way that suggests the licensor endorses you or your use.
- You may not apply legal terms or technological measures that legally restrict others from doing anything the license permits.

The LaTeX source for this book is available on GitHub and at forallx.openlogicproject.org. This version is revision (None) ((None)).

The preparation of this textbook was made possible by a grant from the Taylor Institute for Teaching and Learning.

UNIVERSITY OF CALGARY
Taylor Institute for Teaching and Learning

Cover design by Mark Lyall.

Conteúdo

Prefácio vi

I Noções-chave da lógica 1

1 Argumentos 2
2 O escopo da lógica 7
3 Outras noções lógicas 17

II Lógica verofuncional 24

4 Primeiros passos para simbolização 25
5 Conectivos 30
6 Sentenças de LVF 45
7 Uso e menção 51

III Tabelas de verdade 56

8 Tabelas de verdade características 57
9 Conectivos verofucionais 60
10 Tabelas de verdade completas 65
11 Conceitos semânticos 73
12 Atalhos na tabela de verdade 83
13 Tabelas de verdade parciais 88

IV Dedução natural para LVF 95

14 A ideia de dedução natural 96
15 Regras básicas para LVF 99
16 Construindo provas 126
17 Regras adicionais para LVF 143
18 Conceitos prova-teóricos 150
19 Regras derivadas 154
20 Corretude e completude 161

V Lógica de primeira ordem 170

21 Blocos de construção de LPO 171
22 Sentenças com único quantificador 180
23 Generalidade múltipla 193
24 Identidade 206
25 Descrições definidas 212
26 Sentenças da LPO 220

VI Interpretações 226

27 Extensionalida-de 227
28 Verdade na LPO 234
29 Conceitos semânticos 243
30 Usando interpretações 245
31 Raciocinando sobre todas as interpretações 252

VII Dedução natural para LPO 256

32 Regras básicas para LPO 257
33 Provas com quantificadores 271
34 Conversão de quantificadores 278
35 Regras para identidade 281
36 Regras derivadas 285
37 Prova e semântica 287

VIII Lógica modal 291

38 Introdução à lógica modal 292
39 Dedução natural para LM 296
40 Semântica para LM 309

IX Metateoria 322

41 Formas normais 323
42 Correção 334

Appendices 342

A Notação simbólica 342
B Sistemas alternativos de prova 346
C Referências rápidas 352

Prefácio

Como o título indica, este livro é um manual sobre lógica formal. Lógica formal ocupa-se com o estudo de um certo tipo de linguagem que, semelhante a qualquer linguagem, pode expressar estados de coisas [*states of affairs*]. É uma linguagem formal, ou seja, suas expressões (tais como sentenças) são definidas formalmente. Isto torna-a uma linguagem muito útil, pois ela é bastante precisa sobre os estados de coisas que as sentenças dela descrevem. Em particular, na lógica formal é impossível ser ambíguo. O estudo dessas linguagens centram-se nas relações de acarretamento [*entailment*] entre sentenças, isto é, quais sentenças se seguem de quais outras sentenças. Acarretamento [*entailment*] é central, porque, ao entendê-lo melhor, podemos dizer quando alguns estados de coisas [*states of affairs*] devem ocorrer, uma vez que outros estados de coisas [*states of affairs*] ocorrem. Mas acarretamento [*entailment*] não é a única noção importante. Também consideraremos a relação de ser satisfatível, ou seja, de não ser mutuamente contraditório. Essas noções podem ser definidas semanticamente, usando definições precisas de acarretamento baseadas em interpretações da linguagem — ou em teoria da prova [*proof-theoretically*], usando sistemas formais de dedução.

Lógica formal é, obviamente, uma subdisciplina central da filosofia, na qual a relação lógica entre suposições [*assumptions*] e as conclusões alcançadas a partir daquelas [suposições] é importante. Filósofos investigam as consequências de definições e suposições e avaliam estas definições e suposições em base das suas consequências. Ela também é importante na matemática e ciência da computação. Na matemática, linguagens formais são usadas para descrever não estados de coisas "cotidianos", mas sim estados de coisas matemáticos. Matemáticos também estão interessados nas consequências de definições e suposições e para eles é igualmente importante estabelecer essas consequências (que eles chamam “teoremas”), usando métodos completamente precisos e rigorosos. Lógica formal fornece tais métodos. Na ciência da computação, lógica formal é aplicada para descrever o estado e os procedimentos de sistemas computacionais, por exemplo, circuitos, programas, base de dados etc. Os métodos da lógica formal podem ser similarmente usados para estabelecer consequências de tais descrições, tais como se um circuito é livre de erro, se um programa faz o que é pretendido o que ele faça, se uma base de dados é consistente ou se algo é verdadeiro dos dados nela.

O livro está dividido em nove partes. A Parte I introduz o tópico e as noções de lógica de maneira informal, sem introduzir uma linguagem formal ainda. As Partes II–IV ocupam-se com linguagens verofuncionais(TFL). Nelas sentenças são formadas a partir de sentenças básicas, usando-se alguns conectivos (‘ou’, ‘e’, ‘não’, ‘se …, então’) que combinam justamente sentenças, formando sentenças mais complicadas. Discutimos noções lógicas tais como acarretamento [*entailment*] em duas formas: semanticamente, usando o método de tabelas de verdade (na Parte III) e na teoria da prova, usando um sistema de derivações formais (na Parte IV). As Partes V–VII lidam com uma linguagem mais complicada, a da lógica de primeira ordem. Ela inclui, além dos conectivos da lógica verofuncional, também nomes, predicados, identidade e os então chamados quantificadores. Estes elementos adicionais da linguagem a tornam muito mais expressiva do que a linguagem verofuncional e passaremos uma grande quantidade de tempo investigando justamente o quanto se pode expressar nela. Novamente, noções lógicas para linguagem da lógica de primeira ordem são definidas semanticamente, usando-se interpretações, e na teoria da prova, usando-se uma versão mais complexa do sistema de derivação formal introduzida na Parte IV. Parte VIII discute a extensão da TFL por meio de operadores não-verofuncionais para possibilidade e necessidade: lógica modal. Parte IX cobre dois tópicos avançados: o primeiro diz respeito às formas normais conjuntivas e disjuntivas e à adequação expressiva dos conectivos verofuncionais; o segundo diz respeito à corretude [*soundness*] da dedução natural para TFL.

Nos apêndices, você encontrará uma discussão de notações alternativas para as linguagens que discutimos neste texto, discussão de sistemas alternativos de derivação e uma rápida referência que lista as regras e definições mais importantes. Os termos centrais são listados em um glossário no fim.

Este livro é baseado em um texto que foi originalmente escrito por P. D. Magnus na versão revisada e expandida por Tim Button. Ele também inclui algum material de J. Robert Loftis. O material na Parte VIII é baseado em notas de Robert Trueman e o material na Parte IX é baseado em dois capítulos do texto aberto *Metatheory* de Tim Button. Aaron Thomas-Bolduc e Richard Zach combinaram elementos destes textos na presente versão, mudaram algumas terminologias e alguns exemplos, reescreveram algumas seções e adicionaram material próprio. O texto resultante é licenciado sob uma licença Creative Commons Attribution 4.0.

PARTE I

Noções-chave da lógica

CAPÍTULO 1

Argumentos

Lógica está preocupada com a avaliação de argumentos, com a separação dos argumentos bons dos ruins.

Na linguagem cotidiana, às vezes usamos a palavra 'argumento' para falar sobre disputas através de gritos beligerantes [*belligerent shouting matches*]. Se você e um amigo têm um argumento neste sentido, as coisas não estão indo bem entre vocês dois. Lógica não está preocupada com ranger de dentes nem com puxões de cabelos. Esses não são argumentos em nosso sentido; são apenas desacordos.

Como entendemos, um argumento é algo mais parecido com isto:

O mordomo ou o jardineiro fizeram isso.
O mordomo não o fez
∴ O jardineiro o fez

Aqui temos uma sequência de sentenças. Os três pontos na terceira linha do argumento são lidos como 'portanto'. Eles indicam que a sentença final expressa a *conclusão* do argumento. As duas sentenças antes dessa são as *premissas* do argumento. Se você acredita nas premissas e você pensa que a conclusão se segue das premissas — que o argumento, como será dito, é válido —, então isto talvez lhe forneça uma razão para acreditar na conclusão.

Isto é o tipo de coisa na qual os lógicos estão interessados. Diremos que um argumento é qualquer coleção de premissas juntas com uma conclusão.

Esta Parte discute algumas noções lógicas básicas que se aplicam a argumentos em uma linguagem natural como o Português. É importante começar com um entendimento claro do que são argumentos e do que significa um argumento ser válido. Mais tarde, traduziremos argumentos do Português para uma linguagem formal. Desejamos que validade formal, como definida na linguagem formal, tenha ao menos alguma das características importantes de validade da linguagem natural.

No exemplo justamente dado, usamos sentenças individuais para expressar ambas as premissas do argumento e usamos uma terceira sentença para expressar a conclusão do argumento. Muitos argumentos são expressos desta forma, mas uma única sentença pode conter um argumento completo. Considere:

> O mordomo tem um álibi; assim ele não pode ter feito isso.

Este argumento tem uma premissa seguida por uma conclusão.

Muitos argumentos começam com premissas e terminam com uma conclusão, mas nem todos. O argumento com o qual esta seção começou poderia ter sido igualmente apresentando com a conclusão no início, da seguinte forma:

> O jardineiro o fez. Afinal de contas, foi o mordomo ou foi o jardineiro. E o mordomo não o fez.

Da mesma forma, a conclusão poderia ter sido apresentada no meio [do argumento]:

> O mordomo não o fez. De acordo com isso, foi o jardineiro, dado que foi o jardineiro ou foi o mordomo.

Ao levar em consideração um argumento, desejamos saber se a conclusão se segue ou não das premissas. Assim, a primeira coisa a fazer é separar a conclusão das premissas. Como um guia, estas palavras são frequentemente usadas para indicar uma conclusão de argumento:

assim, portanto,daí, deste modo, de acordo com isso,
consequentemente

Por essa razão, elas são à vezes chamadas PALAVRAS INDICADORAS DE CONCLUSÃO.

Por contraste, essas expressões são PALAVRAS INDICADORAS DE PREMISSAS, porque elas frequentemente indicam que estamos lidando com uma premissa em vez de uma conclusão:

uma vez que, porque, dado que

Mas ao analisar um argumento, não há substituto para um bom faro [*there is no substitute for a good nose.*

1.1 Sentenças

Em geral, podemos definir um ARGUMENTO como uma sequência de sentenças. As sentenças no início da série são premissas. A sentença final na sequência é a conclusão. Se as premissas forem verdadeiras e o argumento for bom, então você terá uma razão para aceitar a conclusão.

Na lógica, estamos somente interessados em sentenças que podem assumir o papel de premissa ou conclusão de um argumento, isto é, sentenças que podem ser verdadeiras ou falsas. Assim restringir-nos-emos às sentenças deste tipo e definimos SENTENÇA como sentenças que podem ser verdadeiras ou falsas.

Você não deveria confundir a ideia de uma sentença que pode ser verdadeira ou falsa com a diferença entre fato e opinião. Frequentemente, sentenças na lógica expressarão coisas que poderiam contar como fatos — tais como 'Kierkegaard era corcunda' ou 'Kierkegaard gostava de amêndoas'. Elas também podem expressar coisas que poderíamos pensar como sendo questões de opiniões — tais como, 'amêndoas são gostosas'. Em outras palavras, uma sentença não é desqualificada de participar de um argumento porque não sabemos se ela é verdadeira ou falsa ou porque sua verdade ou falsidade é uma questão de opinião. Se ela é o tipo de sentença que poderia ser verdadeira ou falsa, ela pode desempenhar o papel de premissa ou conclusão.

Há também coisas que contariam como 'sentenças' em um curso de linguística ou gramática, que não vamos contar como sentenças na lógica.

Perguntas Numa aula de gramática, 'Você já está com sono?' contaria como uma sentença interrogativa. Embora você possa estar sonolento ou alerta, a pergunta em si não é verdadeira nem falsa. Por essa razão, perguntas não contarão como sentenças na lógica. Suponha que você responda àquela pergunta: 'Eu não estou com sono.' Isso é ou verdadeiro ou falso, portanto essa é uma sentença no sentido lógico. Geralmente, *perguntas* não contarão como sentenças, mas *respostas* sim.

‘Do que trata este curso?’ não é uma sentença (em nosso sentido). ‘Ninguém sabe do que trata este curso’ é uma sentença.

Imperativos Comandos são muitas vezes expressos como imperativos do tipo, ‘Acorde!’, ‘Sente corretamente!’ etc. Numa aula de gramática, essas coisas contariam como sentenças imperativas. Embora poderia ser bom ou não que você se sentasse corretamente, o comando em si não é verdadeiro nem falso. Perceba, entretanto, que comandos nem sempre são expressos como imperativos. ‘Você irá respeitar minha autoridade’ *é* ou verdadeira ou falsa — ou você irá respeitar minha autoridade ou não irá — e, dessa maneira, ela contará como uma sentença no sentido lógico do termo.

Exclamações ‘Ai!’ é às vezes chamada sentença exclamativa, mas ela é nem verdadeira nem falsa. Nós trataremos ‘Ai! Machuquei meu dedo!’ como significando a mesma coisa que ‘Machuquei meu dedo’. O ‘ai’ nada acrescenta que possa ser verdadeiro ou falso.

Exercícios Práticos

No fim de alguns capítulos, há exercícios que revisam e exploram o material coberto no capítulo. Não há substituto para resolução de problemas, uma vez que aprender lógica é muito mais sobre desenvolver uma forma de pensar do que sobre memorizar fatos.

Aqui está o primeiro exercício. Sublinhe a expressão que indica a conclusão de cada um destes argumentos:

1. Está ensolarado. Assim, eu deveria pegar meus óculos de sol.
2. Deve ter sido um dia ensolarado. Afinal das contas, eu usei meus óculos escuros.
3. Ninguém, exceto você, pegou o pote de biscoito. E a cena do crime está cheia de migalhas de biscoito. Você é o culpado!
4. Senhora Scarlett e o professor Plum estavam no escritório no momento do assassinato. Reverendo Green estava com castiçal no salão de festa e sabemos que não há sangue em suas mãos. Logo, o Coronel Mustard cometeu o crime na cozinha, usando

o cano de chumbo. Lembre-se de que, afinal das contas, a arma não foi disparada.

CAPÍTULO 2

O escopo da lógica

2.1 Consequência e validade

Em §1, falamos sobre argumentos, ou seja, uma coleção de sentenças (as premissas) seguidas de uma única sentença (a conclusão). Dissemos que algumas palavras, tais como "portanto", indicam que a sentença quem vem a seguir é supostamente a conclusão. "Portanto" sugere, é claro, que há uma conexão entre as premissas e a conclusão, a saber, que a conclusão *se segue* ou *é uma consequência* das premissas.

Esta noção de consequência é uma das coisas primárias com as quais a lógica está preocupada. Pode-se mesmo dizer que a lógica é a ciência do que se segue do que. A lógica desenvolve teorias e ferramentas que nos dizem quando uma sentença se segue de algumas outras.

O que dizer do argumento principal discutido em §1?

Ou o mordomo fez isso ou o jardineiro o fez
O mordomo não o fez
∴ O jardineiro o fez

Não temos qualquer contexto para sabermos a que as sentenças neste argumento referem-se. Talvez você suspeite que "fez isso" signifique aqui "foi o autor" de algum crime não especificado. Você poderia imaginar que o argumento ocorre num romance de mistério ou programa de TV, talvez tivesse sido falado por um detetive que trabalha com as evidências. Mas mesmo sem ter qualquer uma destas informações, provavelmente você concorda que o argumento é bom, no sentido que seja o que for a que as premissas se refiram, se elas forem ambas verdadeiras, a conclusão só poderá ser verdadeira também. Se a primeira premissa for verdadeira, ou seja, é verdade que "o mordomo fez isso ou o jardineiro fez isso", então pelo menos um deles "fez isso", não importa o que isso signifique. E se a segunda premissa for verdadeira, então o mordomo não "fez isso". Isto deixa somente uma opção: "o jardineiro fez isso" deve ser verdadeira. Aqui, a conclusão segue-se das premissas. Chamamos argumentos que têm esta propriedade VÁLIDO.

Por outro lado, considere o seguinte argumento

Se o motorista fez isso, a governanta não fez isso
A governanta não fez isso
∴ O motorista fez isso

Ainda não temos qualquer ideia sobre o que está sendo falado aqui. Mas, novamente, você provavelmente concordaria que este argumento é diferente daquele anterior em um aspecto importante. Se as premissas forem verdadeiras, não é garantido que a conclusão seja também verdadeira. As premissas deste argumento não excluem, por si mesmo, que outra pessoa que não seja a governanta ou motorista "fez isso". Assim, há um caso onde ambas premissas são verdadeiras e, contudo, o motorista não fez isso, ou seja, a conclusão não é verdadeira. Neste segundo argumento, a conclusão não se segue das premissas. Se, como ocorre neste argumento, a conclusão não se segue das premissas, dizemos que ele é INVÁLIDO.

2.2 Casos e tipos de validade

Como determinamos que o segundo argumento é inválido? Apontamos um caso no qual as premissas são verdadeiras e no qual a conclusão não é. Este era um cenário onde o motorista e a governanta não fizeram isso, mas uma terceira pessoa o fez. Chamaremos um tal caso CONTRAEXEMPLO ao argumento. Se há um contraexemplo ao um argumento, a conclusão não pode ser uma consequência das premissas. Para que a conclusão seja uma consequência das premissas, a verdade das premissas deve garantir a verdade da conclusão. Se há um contraexemplo, a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.

Como lógicos, queremos ser capazes de determinar quando a conclusão de um argumento segue-se das premissas. E a conclusão é uma consequência das premissas, se não há contraexemplo, um caso em que as premissas são todas verdadeiras, mas a conclusão não é verdadeira. Isto motiva uma definição:

Uma sentença A é uma CONSEQUÊNCIA de sentenças B_1, …, B_n se e somente se não há caso em que B_1, …, B_n são todas verdadeiras e A não é verdadeira. (Dizemos também que A SEGUE-SE DE B_1, …, B_n ou que B_1, …, B_n ACARRETA A).

Esta "definição" é incompleta: ela não nos diz o que é um "caso" ou o que signica ser "verdadeiro em um caso". Até agora, vimos somente um exemplo: um cenário hipotético envolvendo três pessoas, um motorista, uma governanta e alguma terceira pessoa e, neste cenário, o motorista e a governanta não fizeram isso, mas a terceira pessoa o fez. Neste cenário, como descrito, o motorista não fez isso e assim é um caso no qual a sentença "o motorista fez isso" não é verdadeira. As premissas de nosso segundo argumento são verdadeiras, mas a conclusão não é verdadeira: o cenário é um contraexemplo.

Dizemos que argumentos nos quais a conclusão é consequência das premissas são válidos e aqueles nos quais a conclusão não é consequência das premissas são inválidos. Uma vez que agora temos pelo menos uma primeita tentativa de uma definição, registraremos isto:

Um argumento é VÁLIDO se e somente se a conclusão é uma consequência das premissas.

Um argumento é INVÁLIDO se e somente se ele não é válido, isto é, ele tem um contraexemplo.

Lógicos estão ocupados em tornar a noção de "caso" mais precisa e em investigar quais argumentos são válidos quando a noção de "caso" é feita precisa de uma forma ou outra. Se tomarmos "caso" como significando "cenário hipotético" conforme ocorreu no contraexemplo ao segundo argumento, está claro que o primeiro argumento conta como válido. Se imaginarmos um cenário no qual ou o mordomo fez isso ou o jardineiro fez isso e também que o mordomo não fez isso, estamos automaticamente imaginando o cenário no qual o jardineiro fez isso. Assim, qualquer cenário hipotético no qual as premissas de nosso primeiro argumento são verdadeiras automaticamente torna a conclusão de nosso primeiro argumento verdadeira. Isto torna o primeiro argumento válido.

Tornar “caso” mais específico, interpretando-o como “cenário hipotético” é um avanço. Mas isso não é o fim da história. O primeiro problema é que não sabemos o que conta como cenário hipotético. Eles são limitados pelas leis da física? Limitados pelo que é concebível, em um sentido geral? Dependendo das respostas que damos a estas questões, isso determinará quais argumentos contamos como válidos.

Suponha que a resposta à primeira questão é “sim”. Considere o seguinte argumento:

A espaçonave *Rocinante* levou seis horas para chegar a Júpiter partindo da estação espacial Tycho.
∴ A distância entre a estação espacial Tycho e Júpiter é menos que 14 bilhões de quilômetros

Um contraexemplo a este argumento seria um cenário no qual a *Rocinante* faz uma viagem de mais de 14 bilhões de quilômetros em seis horas, excedendo a velocidade da luz. Uma vez que um tal cenário é incompatível com as leis da física, não há um tal cenário se cenários hipotéticos têm de estar em conformidade com as leis da física. Se cenários hipotéticos não são limitados pelas leis da física, há um contraexemplo: um cenário no qual a *Rocinante* viaje mais rápida que a velocidade da luz.

Suponha que a resposta à segunda questão é “sim” e considere um outro argumento:

Priya é uma oftalmologista
∴ Priya é uma médica dos olhos

Se nos for permitido apenas cenários concebíveis, isto é também um argumento válido. Se você imaginar Priya como sendo uma oftalmologista, você imagina desse modo que Priya é uma médica dos olhos.

Isto é justamente o que “oftalmologista” e “médica dos olhos” significam. Um cenário onde Priya é uma oftalmologista, mas não é uma médica dos olhos é excluído por causa da conexão conceitual que há entre estas palavras.

Dependendo de que tipos de casos consideramos como contraexemplos potenciais, chegamos, então, a noções diferentes de consequência e validade. Poderíamos chamar um argumento NOMOLOGICAMENTE VÁLIDO se não há contraexemplos que não violem as leis da natureza e chamar um argumento CONCEITUALMENTE VÁLIDO se não há contraexemplos que não violem conexões conceituais entre palavras. Para essas duas noções de validade, aspectos do mundo (por exemplo, o que são leis da natureza) e aspectos dos significados das sentenças no argumento (por exemplo, que “oftalmologista” significa exatamente um tipo de médico dos olhos) são levados em conta, se um argumento é válido.

2.3 Validade formal

Uma característica distintiva da consequência *lógica* é, entretanto, que ela não deveria depender do conteúdo das premissas e do conteúdo da conclusão, mas deveria apenas depender da forma lógica. Em outras palavras, como lógicos queremos desenvolver uma teoria que possa fazer distinções ainda mais refinadas. Por exemplo, tanto

Ou Priya é uma oftalmologista ou é uma dentista
Priya não é uma dentista
∴ Priya é uma médica dos olhos

como

Ou Priya é uma oftalmologista ou é uma dentista
Priya não é uma dentista
∴ Priya é uma oftalmologista

são argumentos válidos. Mas enquanto a validade do primeiro depende do conteúdo (ou seja, do significado de “oftalmologista” e “médica dos olhos”), o segundo não depende. O segundo argumento é FORMALMENTE VÁLIDO. Podemos descrever a “forma” deste argumento como um padrão, algo como isso:

Ou A é um X ou é um Y.
A não é um Y.
$\therefore$ A é um X.

Aqui A, X e Y são representantes [*placeholders*] para expressões apropriadas que, quando substituem A, X e Y, transformam o padrão em um argumento que consiste de sentenças. Por exemplo,

Ou Mei é um matemático ou é um botânico.
Mei não é um botânico.
$\therefore$ Mei é um matemático.

é um argumento da mesma forma, mas o primeiro argumento acima não é: teríamos de substituir Y por expressões diferentes (uma vez por "oftalmologista" e uma vez por "médica dos olhos") para obtê-lo a partir do padrão. Ademais, o primeiro argumento não é formalmente válido. A forma *dele* é a seguinte

Ou A é um X ou é um Y.
A não é um Y.
$\therefore$ A é um Z.

Neste padrão, podemos substituir X por "oftalmologista" e Z por "médica dos olhos" para obter o argumento original. Mas aqui está um outro arguemnto da mesma forma:

Ou Mei é um matemático ou é um botânico.
Mei não é um botânico.
$\therefore$ Mei é acrobata.

Obviamente este argumento não é válido, uma vez que podemos imaginar um matemático chamado Mei que não é um acrobata.

Nossa estratégia como lógicos será propor um noção de "caso" em que um argumento torna-se válido, se ele é formalmente válido. Claramente, uma tal noção de "caso" terá de violar não apenas algumas leis da natureza, mas também algumas leis do Português. Uma vez que o primeiro argumento é inválido neste sentido, devemos permitir como contraexemplo um caso no qual Priya é uma oftalmologista, mas não é um médica dos olhos. Este caso não é uma situação concebível: ele é excluído pelos significados de "oftalmologista" e "médico dos olhos".

Quando consideramos casos de vários tipos a fim de avaliar a validade de um argumento, faremos algumas suposições. A primeira suposição é que qualquer caso faz qualquer sentença verdadeira ou não verdadeira — pelo menos, qualquer sentença no argumento em consideração. Isto significa primeiramente que qualquer cenário imaginado que deixa indeterminado se uma sentença em nosso argumento é verdadeira não será considerado como um contraexemplo potencial. Por exemplo, um cenário onde Priya é uma dentista, mas não é uma oftalmologista contará como um caso a ser considerado nos primeiros argumentos desta seção, mas não como um caso a ser considerado nos dois últimos: não nos é dito se Mei é um matemático, um botânico ou um acrobata. Se um caso não faz uma sentença verdadeira, dizemos que a faz FALSA. Desse modo, assumiremos que os casos fazem as sentenças verdadeiras ou falsas, mas nunca ambos[1]

2.4 Argumentos corretos

Antes de continuarmos a execução desta estratégia, alguns esclarecimentos. Argumentos em nosso sentido, como conclusões que (supostamente) se seguem das premissas, são obviamente usados todo tempo nos discursos cotidianos e científicos. Quando eles são usados, os argumentos pretendem dar suporte ou até mesmo provar as suas conclusões. Ora, se um argumento é válido, ele dará suporte a sua conclusão, mas *somente se* suas premissas são todas verdadeiras. Validade exclui a possibilidade na qual as premissas são verdadeiras e a conclusão não é verdadeira ao mesmo tempo. Ela não exclui, por si mesma, a possibilidade de que a conclusão não seja verdadeira. Em outras palavras, é perfeitamente possivel que um argumento válido tenha uma conclusão que não seja verdadeira!

Considere este exemplo:

> Laranjas são frutas ou são instrumentos musicais.

---

[1] Mesmo se estas suposições lhe parecem ser senso comum, elas são controversas entre os filósofos da lógica. Antes de tudo, há lógicos que querem considerar casos em que sentenças são nem verdadeiras nem falsas, mas tem algum tipo de nível intermediário de verdade. De forma mais controversa, alguns filósofos pensam que deveríamos permitir a possibilidade de sentenças serem verdadeiras e falsas ao mesmo tempo. Há sistemas de lógica em que sentenças podem ser nem verdadeiras nem falsas ou em que sentenças podem ser verdadeiras e falsas, mas não os discutiremos neste livro.

Laranjas não são frutas.
∴ Laranjas são instrumentos musicais.

A conclusão deste argumento é ridícula. Não obstante, ela segue-se das premissas. *Se* ambas premissas forem verdadeiras, *então* a conclusão terá de ser também verdadeira. Assim, o argumento é válido.

Inversamente, ter premissas verdadeiras e uma conclusão verdadeira não é suficiente para tornar um argumento válido. Considere este exemplo:

Londres está na Inglaterra.
Pequim está na China.
∴ Paris está na França.

As premissas e a conclusão deste argumento são, como uma questão de fato, todas verdadeiras, mas o argumento é inválido. Se Paris declarasse independência do resto da França, então a conclusão não seria mais verdadeira, ainda que ambas premissas permanecessem verdadeiras. Assim, há um caso em que as premissas deste argumento são verdadeiras sem que a conclusão seja verdadeira. Desse modo, o argumento é inválido.

A coisa importante para lembrar é que validade não é sobre a verdade ou falsidade atuais [*actual*] das sentenças no argumento. É sobre se é *possível* que todas as premissas sejam verdadeiras e a conclusão não seja verdadeira ao mesmo tempo (em algum caso hipotético). De fato, o que é o caso não tem papel especial a desempenhar; e o que os fatos são não determina se um argumento é válido ou não[2]. Nada sobre a maneira na qual as coisas são pode determinar se um argumento é válido. É frequentemente dito que a lógica não se importa com sentimentos. Na realidade, ela também não se importa com fatos.

Quando usamos um argumento para provar que a conclusão dele *é verdadeira*, precisamos de duas coisas. Em primeiro lugar, precisamos que o argumento seja válido, ou seja, precisamos que a conclusão se siga das premissas. Mas também precisamos que as premissas sejam verdadeiras. Diremos que um argumento é CORRETO se e somente se ele é válido e todas as premissas dele são verdadeiras.

---

[2] Ora, há um caso no qual a verdade desempenha um papel: se as premissas são, de fato, verdadeiras e a conclusão não é, de fato, verdadeira, então temos um contraexemplo; destarte o argumento é inválido.

Por outro lado, quando queremos refutar [*rebut*] um argumento, temos duas opções: podemos mostrar que (uma ou mais das) premissas não são verdadeiras ou podemos mostrar que o argumento não é válido. Entretanto, a lógica apenas o ajudará em relação a esta última.

2.5 Argumentos indutivos

Muitos argumentos bons são inválidos. Considere o seguinte:

Em todo inverno até agora nevou em Calgary.
∴ Nevará em Calgary no próximo inverno.

Este argumento generaliza a partir de observações sobre muitos casos (passados) para uma conclusão sobre todos casos (futuros). Tais argumentos são chamados argumentos INDUTIVOS. Não obstante, o argumento é inválido. Mesmo se nevou em Calgary todo inverno até agora, permance *possível* que não nevará em Calgary no próximo inverno. De fato, mesmo se nevar de agora em diante em todo mês de janeiro em Calgary, ainda poderíamos *imaginar* um caso no qual este ano seja o primeiro ano em que não neva todo inverno. E este cenário hipotético é um caso em que as premissas do argumento são verdadeiras, mas a conclusão não é, tornando o argumento inválido.

O ponto de tudo isto é que argumentos indutivos — mesmo argumentos indutivos bons — não são (dedutivamente) válidos. Eles não são *irrefutáveis* [*watertight*]. Embora possa ser improvável, é *possível* que a conclusão deles seja falsa, mesmo quando todas as premissas são verdadeiras. Neste livro, deixaremos (inteiramente) de lado a questão do que torna bom um argumento indutivo. Nosso interesse é simplesmente na separação dos argumentos (dedutivamente) válidos daqueles inválidos.

Assim, estamos interessados no fato de se uma conclusão *segue-se* ou não de algumas premissas. Não diga, entretanto, que as premissas *inferem* a conclusão. Acarretamento [*entailment*] é uma relação entre premissas e conclusões; inferência é algo que fazemos. Assim, se você deseja mencionar inferência quando a conclusão segue-se das premissas, você poderia dizer que *se pode inferir* a conclusão das premissas.

Exercícios Práticos

A. Quais dos seguintes argumentos são válidos? Quais são inválidos?

1. Sócrates é humano.
2. Todo humano é cenoura.
∴ Sócrates é uma cenoura.

1. Abe Lincoln nasceu em Illinois ou já foi presidente.
2. Abe Lincoln nunca foi presidente.
∴ Abe Lincoln nasceu em Illinois.

1. Se eu apertar o gatilho, Abe Lincoln morrerá.
2. Não apertei o gatilho.
∴ Abe Lincoln não morrerá.

1. Abe Lincoln nasceu na França ou nasceu em Luxemburgo.
2. Abe Lincoln não nasceu em Luxemburgo.
∴ Abe Lincoln nasceu na França.

1. Se o mundo acabar hoje, então não precisarei levantar cedo amanhã de manhã.
2. Precisarei acordar cedo amanhã de manhã.
∴ O mundo não acabará hoje.

1. Joe tem agora 19 anos.
2. Joe tem agora 87 anos
∴ Bob tem agora 20 anos

B. Poderia existir

1. um argumento válido que tem uma premissa falsa e uma premissa verdadeira?
2. um argumento válido que tem apenas premissas falsas?
3. um argumento válido com apenas premissas falsas e um conclusão falsa?
4. um argumento inválido que pode se tornar válido por meio da adição de uma nova premissa?
5. Um argumento válido que pode se tornar inválido por meio da adição de uma nova premissa?

Em cada caso, se a resposta for afirmativa, dê um exemplo; se for negativa, explique por que não.

CAPÍTULO 3

Outras noções lógicas

Em §2, introduzimos as ideias de consequência e de argumento válido. Estas são as ideias mais importantes na lógica. Neste capítulo, introduziremos algumas ideias similarmente importantes. Todas elas contam, como a validade contava, com a ideia de que sentenças são verdadeiras (ou não) nos casos. Para o restante desse capítulo, consideraremos casos no sentido de cenário concebível, ou seja, no sentido em que os usamos para definir validade conceitual. Os pontos que fizemos sobre tipos diferentes de validade pode ser feito sobre nossas novas noções em linhas semelhantes: se usamos uma ideia diferente do que conta como um "caso", obtemos noções diferentes. E, como lógicos, queremos, às vezes, considerar uma definição mais permissiva de caso em detrimento daquela que consideramos até aqui.

3.1 Possibilidade conjunta

Considere estas duas sentenças:

B1. O único irmão de Jane é menor que ela.
B2. O único irmão de Jane é maior que ela.

A lógica apenas não pode nos dizer qual dentre essas sentenças é verdadeira, se alguma for. Contudo, podemos dizer que *se* a primeira sentença (B1) é verdadeira, *então* a segunda sentença (B2) deve ser falsa. Da mesma forma, se B2 é verdadeira, então B1 deve ser falsa. Não há cenário possível no qual ambas sentenças sejam verdadeiras conjuntamente. Estas sentenças são incompatíveis entre si, elas não podem ser todas verdadeiras ao mesmo tempo. Isto motiva a seguinte definição:

> Sentenças são CONJUNTAMENTE POSSÍVEIS se e somente se há um caso no qual elas são todas verdadeiras juntas.

B1 e B2 são *conjuntamente impossíveis*, enquanto, digamos, as duas sentenças seguintes são conjuntamente possíveis:

B1. O único irmão de Jane é menor que ela.
B2. O único irmão de Jane é mais jovem que ela.

Podemos perguntar sobre a possibilidade conjunta de qualquer número de sentenças. Por exemplo, considere as seguintes quatro sentenças:

G1. Há pelo menos quatro girafas no zoológico.
G2. Há exatamente setes gorilas no zoológico.
G3. Não há mais de dois marcianos no zoológico.
G4. Toda girafa no zoológico é marciana.

G1 e G4 implicam que há pelo menos quatro girafas marcianas no zoológico. Isto entra em conflito com G3, que implica que não há mais de duas girafas marcianas lá. Desse modo, as sentenças G1–G4 são conjuntamente impossíveis. Elas não podem ser todas verdadeiras juntas. (Note que as sentenças G1, G3 e G4 são conjuntamente impossíveis. Mas se sentenças já são conjuntamente impossíveis, adicionar uma sentença extra ao conjunto [*to the mix*] não pode torná-las [as sentenças] conjuntamente possíveis!).

3.2 Verdades necessárias, falsidades necessárias e contingência

Ao avaliar argumentos em releção à validade, estamos preocupados com que seria verdadeiro *se* as premissas fossem verdadeiras, mas algumas sentenças devem ser verdadeiras. Considere estas sentenças:

1. Está chovendo.
2. Ou está chovendo aqui ou não está chovendo aqui.
3. Está chovendo aqui e não está chovendo aqui.

A fim de saber se uma sentença 1 é verdadeira, você precisaria olhar para o lado de fora ou verificar o canal do tempo. Ela poderia ser verdadeira; ela poderia ser falsa. Um sentença que é capaz de ser verdadeira e é capaz de ser falsa (em circunstâncias diferentes, é claro) é chamada CONTINGENTE.

A sentença 2 é diferente. Não precisamos olhar para o lado de fora para saber que ela é verdadeira. Independentemente de como está o tempo, está chovendo ou não está chovendo. Esta sentença é uma VERDADE NECESSÁRIA.

Da mesma forma, não precisamos checar o tempo para determinar se a sentença 3 é verdadeira ou não. Ela deve ser falsa, simplesmente como uma questão de lógica. Poderia estar chovendo aqui e não estar chovendo na cidade; poderia estar chovendo agora, mas parar de chover no momento em que você termina [de ler] esta sentença; mas é impossível que esteja chovendo e não esteja chovendo no mesmo lugar e no mesmo tempo. Assim, seja como for o mundo, não é [o caso] que esteja chovendo aqui e não esteja chovendo aqui. Ela é uma FALSIDADE NECESSÁRIA.

Algo poderia ser *sempre* verdadeiro e ainda ser contingente. Por exemplo, se nunca houve um tempo no qual o universo continha menos de sete coisas, então a sentença ‘há pelo menos sete coisas’ seria sempre verdadeira. Todavia, a sentença é contingente: o mundo poderia ser muito, mas muito menor do que ele é e, então, a sentença teria sido falsa.

Equivalência necessária

Podemos também falar sobre relações lógicas *entre* duas sentenças. Por exemplo:

> John foi à loja depois que lavou a louça.
> John lavou a louça antes de ir à loja

Estas duas sentenças são ambas contingentes, uma vez que John poderia não ter ido à loja ou lavado a louça. Contudo, elas devem ter o mesmo valor de verdade. Se uma das sentenças é verdadeira, então elas são ambas verdadeiras; se uma das sentenças é falsa, então elas são ambas falsas. Quando duas sentenças têm o mesmo valor de verdade em qualquer caso, dizemos que elas são NECESSARIAMENTE EQUIVALENTES.

Resumo das noções lógicas

- Um argumento é VÁLIDO se não há caso em que as premissas são todas verdadeiras e a conclusão não é verdadeira; caso contrário, ele é INVÁLIDO.
- Uma VERDADE NECESSÁRIA é uma sentença que é verdadeira em qualquer caso.
- Uma FALSIDADE NECESSÁRIA é uma sentença que é falsa em qualquer caso.
- Uma SENTENÇA CONTINGENTE é nem uma verdade necessária nem uma falsidade necessária; uma sentença que é verdadeira em algum caso e falsa em algum outro caso.
- Duas sentenças são NECESSARIAMENTE EQUIVALENTES, se, em qualquer caso, elas são ambas verdadeiras ou ambas falsas.
- Uma coleção de sentenças é CONJUNTAMENTE POSSÍVEL se há um caso no qual elas são todas verdadeiras juntas; caso contrário, a coleção é CONJUNTAMENTE IMPOSSÍVEL.

Exercícios Práticos

A. Para cada uma das sentenças seguintes, diga se ela é uma verdade necessária, uma falsidade necessária ou contingente:

1. César atravessou o Rubicão.
2. Alguém já atravessou o Rubicão.
3. Ninguém jamais atravessou o Rubicão.
4. Se César atravessou o Rubicão, então alguém atravessou [o Rubicão].
5. Embora César tenha atravessado o Rubicou, ninguém jamais atravessou o Rubicão.

6. Se alguém atravessou o Rubicão, então foi César [quem atravessou].

B. Para cada uma das sentenças seguintes, diga se ela é uma verdade necessária, uma falsidade necessária ou contingente:

1. Elefantes dissolvem em água.
2. A madeira é uma substência leve e durável que é útil para construção de coisas
3. Se a medeira fosse um material de construção bom, ela seria útil para construir coisas.
4. Moro em um prédio de três andares que é de dois andares.
5. Se o gerbil fosse mamífero, eles amamentariam seus filhotes.

C. Quais dos seguintes pares de sentenças são necessariamente equivalentes?

1. Elefantes dissolvem em água.
   Se você colocar um elefante na água, ele desintegrará.
2. Todos os mamíferos dissolvem em água.
   Se você colocar um elefante na água, ele desintegrará.
3. George Bush foi 43º presidente.
   Barack Obama foi 44º presidente.
4. Barack Obama foi 44º presidente.
   Barack Obama foi o presidente imediatamente depois do 43º presidente.
5. Elefantes dissolvem em água.
   Todos mamíferos dissolvem em água.

D. Quais dos seguintes pares de sentenças são necessariamente equivalentes?

1. Thelonious Monk tocava piano.
   John Coltrane tocava saxfone tenor.
2. Thelonious Monk fez show com John Coltrane.
   John Coltrane fez show com Thelonious Monk.
3. Todos os pianistas profissionais têm mãos grandes.
   O pianista Bud Powell tinha mãos grandes.
4. Bud Powell tinha um distúrbio mental grave.
   Todos os pianistas têm distúrbio mental grave.

5. John Coltrane era profundamente religioso.
   John Coltrane via a música como uma expressão da espiritualidade.

E. Considere as seguintes sentenças:

G1 Há pelo menos quatro girafas no zoológico.

G2 Há exatamente sete gorilas no zoológico.

G3 Não há mais do que 2 marcianos no zoológico.

G4 Toda girafa no zoológico é marciana.

Agora considere cada uma das seguintes coleções de sentenças. Quais são conjuntamente possíveis? Quais são conjuntamente impossíveis?

1. Sentenças G2, G3 e G4
2. Sentenças G1, G3 e G4
3. Sentenças G1, G2 e G4
4. Sentenças G1, G2 e G3

F. Considere as seguintes sentenças.

M1 Todas as pessoas são mortais.

M2 Sócrates é uma pessoa.

M3 Sócrates nunca morrerá.

M4 Sócrates é mortal.

Quais combinações de sentenças são conjuntamente possíveis? Marque cada combinação como “possível” ou “impossível”.

1. Sentenças M1, M2 e M3
2. Sentenças M2, M3 e M4
3. Sentenças M2 e M3
4. Sentenças M1 e M4
5. Sentenças M1, M2, M3 e M4

G. Quais dos seguintes são possíveis? Se for possível, dê um exemplo. Se não for possível, explique.

1. Um argumento válido que tem uma premissa falsa e uma outra premissa verdadeira
2. Um argumento válido que tem uma conclusão falsa
3. Um argumento válido cuja conclusão é uma falsidade necessária.
4. Um argumento inválido cuja conclusão é uma verdade necessária.
5. Uma verdade necessária que é contigente
6. Duas sentenças necessariamente equivalentes, sendo ambas verdades necessárias
7. Duas sentenças necessariamente equivalentes, sendo uma delas uma verdade necessária e a outra, contingente.
8. Duas sentenças necessariamente equivalentes que juntas são conjuntamente impossíveis
9. Uma coleção conjuntamente possível de sentenças que contém uma falsidade necessária
10. Um coleção conjuntamente impossível de sentenças que contém uma verdade necessária

H. Quais dos seguintes são possíveis? Se for possível, dê um exemplo. Se não for possível, explique.

1. Um argumento válido, cujas premissas são todas verdades necessárias e cuja conclusão é contingente
2. Um argumento válido com premissas verdadeiras e conclusão falsa
3. Uma coleção conjuntamente possível de sentenças que contém duas sentenças que não são necessariamente equivalentes
4. Uma coleção conjuntamente possível de sentenças em que todas elas são contingentes
5. Uma verdade necessária falsa
6. Um argumento válido com premissas falsas
7. Um par necessariamente equivalente de sentenças que não são conjuntamente possíveis
8. Uma verdade necessária que é também uma falsidade necessária
9. Uma coleção conjuntamente possível de sentenças que são todas falsidades necessárias

PARTE II

Lógica verofuncional

CAPÍTULO 4

Primeiros passos para simbolização

4.1 Validade em virtude da forma

Considere este argumento:

Está chovendo lá fora
Se estiver chovendo lá fora, então Jenny ficará infeliz
∴ Jenny está infeliz.

e um outro argumento:

Jenny é anarco-sindicalista
Se Jenny é anarco-sindicalista, então Dipan é um ávido leitor de Tolstoy
∴ Dipan é um ávido leitor de Tolstoy

Ambos argumentos são válidos e há um sentido simples e direto no qual podemos dizer que eles compartilham um estrutura comum. Poderíamos expressar a estrutura do seguinte modo:

A
Se A, então C

∴ C

Isto parece ser uma excelente *estrutura* de argumento. De fato, certamente qualquer argumento com esta *estrutura* será válido e esta não é a única estrutura boa de argumento. Considere um argumento como:

Jenny está feliz ou está triste
Jenny não está feliz
∴ Jenny está triste

Novamente, isto é um argumento válido. A estrutura aqui é algo como:

A ou B
não-A
∴ B

Uma esplêndida estrutura! Aqui está outro exemplo:

Não é o caso que Jim estudou bastante e atuou em muitas peças [de teatro]
Jim estudou bastante
∴ Jim não atuou em muitas peças [de teatro]

Este argumento válido tem uma estrutura que poderíamos representar assim:

não-(A e B)
A
∴ não-B

Estes exemplos ilustram uma ideia importante, que poderíamos descrever como *validade em virtude da forma*. A validade dos argumentos supracitados não tem nada a ver com os significados das expressões em Português como ‘Jenny está infeliz’, ‘Dipan é um ávido leitor de Tolstoy’ ou ‘Jim atuou em muitas peças [de teatro]’. Se, de fato, ela tem a ver com significados, tem a ver com os significados de expressões como ‘e’, ‘ou’, e ‘se…, então…’.

Nas Partes II–IV, iremos desemvolver uma linguagem formal que nos permite simbolizar muitos argumentos, de forma tal forma que [é possível] mostrar que eles são válidos em virtude da forma. Esta linguagem será a *lógica verofuncional* ou LVF.

4.2 Validade por razões especiais

Há inúmeros argumentos que são válidos, mas não por razões relacionadas à forma deles. Considere um exemplo:

Juanita é uma aliá[1]
∴ Juanita é um elefante

É impossível que a premissa seja verdadeira e a conclusão seja falsa. Portanto, o argumento é válido. Não obstante, a validade não está relacionada com a forma do argumento. Aqui está um argumento inválido que tem a mesma forma:

Juanita é uma aliá
∴ Juanita é uma catedral

Isto poderia sugerir que a validade do primeiro argumento *é* fundamentada [*keyed*] no significado das palavras 'aliá' e 'elefante'. Mas, se isto é correto ou não, não é simplesmente a *estrutura* do argumento que o torna válido. Da mesma forma, considere o argumento:

A escultura é completamente verde.
∴ A escultura não é completamente vermelha.

Novamente, parece impossível que a premissa seja verdadeira e a conclusão seja falsa, pois nada pode ser completamente verde e ser completamente vermelha. Assim, o argumento é válido, mas aqui está um argumento inválido que tem a mesma forma:

A escultura é completamente verde.
∴ A escultura não é complemente brilhante

O argumento é inválido, uma vez que é possível ser completamente verde e ser completamente brilhante (poderíamos pintá-la com um elegante verniz verde brilhante). É plausível que a validade do primeiro argumento seja fundamentada na maneira na qual as cores (ou palavras para cores) interagem, mas, se isto é correto ou não, não é simplesmente a *estrutura* do argumento que o torna válido.

---

[1] NT: Aqui foi necessário modificar um pouco o exemplo do texto original, que usa as palavras '*fox*' e '*vixen*'. '*Vixen*' significa raposa fêmea, enquanto '*fox*' significa raposa, sem a distinção de gênero.

A moral importante pode ser afirmada como se segue. *Na melhor das hipóteses, LVF ajuda-nos a entender argumentos que são válidos devido à forma deles.*

4.3 Sentenças atômicas

Começamos isolando a forma de um argumento em §4.1, substituindo *subsentenças* de sentenças por letras individuais. Desse modo, no primeiro exemplo desta seção, 'está chovendo lá fora' é uma subsentença de 'se estiver chovendo lá fora, então Jenny estará infeliz' e substituímos esta subsentença por 'A'.

Nossa linguagem artificial, LVF, persegue esta ideia de forma completamente implacável. Começamos com algumas *letras sentenciais*. Estas serão os blocos de construção básicos a partir dos quais sentenças mais complexas são construídas. Usaremos as letras maiúsculas como letras sentenciais de LVF. Há apenas 26 letras no alfabeto[2], mas não há limite do número de letras sentenciais que gostaríamos de considerar. Adicionando subscrito às letras, obtemos novas letras sentenciais. Assim, aqui estão exemplos de cinco diferentes letras sentenciais de LVF:

$$A, P, P_1, P_2, A_{234}$$

Usaremos letras sentenciais para representar ou *simbolizar* certas sentenças do Português. Para fazer isso, providenciamos uma CHAVE DE SIMBOLIZAÇÃO, tal como as seguintes:

A: Está chovendo lá fora
C: Jenny está infeliz

Fazendo isso, não estamos fixando esta simbolização *de uma vez por toda*. Estamos apenas dizendo que, desta vez, pensaremos na letra sentencial 'A' de LVF como simbolizando a sentença do Português 'Está chovendo lá fora' e a letra sentencial de LVF 'C' como simbolizando a sentença do Português 'Jenny está infeliz'. Posteriormente, quando lidarmos com sentenças diferentes ou argumentos diferentes, poderemos providenciar uma nova chave de simbolização, que poderia ser assim:

---

[2] NT: consideramos aqui as letras 'K', 'Y' e 'W'

A: Jenny é anarco-sindicalista
C: Dipan é um ávido leitor de Tolstoy

É importante entender que seja qual for a estrutura que uma sentença do Português possa ter, essa estrutura é perdida quando ela [sentença do Português] é simbolizada por uma letra sentencial de LVF. Do ponto de vista de LVF, uma letra sentencial é apenas uma letra. Ela pode ser usada para construir sentenças mais complexas, mas ela não pode ser desmembrada [decomposta].

CAPÍTULO 5

Conectivos

No capítulo anterior, consideramos a simbolização de sentenças bastante básicas do Português por letras sentenciais de LVF. É desejável lidar também com as seguintes expressões do Português ‘e’, ‘ou’,‘não’ e assim por diante. Estas expressões são os *conectivos* — eles podem ser usados para formar novas sentenças a partir das antigas. Em LVF, usaremos os conectivos lógicos para construir sentenças complexas a partir dos componentes atômicos. Há cinco conectivos lógicos em LVF. A tabela abaixo resume-os e eles serão explicados por todo este capítulo.

símbolo	**como é chamado**	**significado aproximado**
$\neg$	negação	‘não é o caso que...’
$\wedge$	conjunção	‘e’
$\vee$	disjunção	‘um... ou outro ... (ou ambos) ’
$\rightarrow$	condicional	‘se ... então ...’
$\leftrightarrow$	bicondicional	‘... se e somente se ...’

Estes não são os únicos conectivos que se tem interesse no Português. Outros são, por exemplo, ‘a menos que’ [‘*unless*’: a não ser que, salvo se], ‘nem [um] nem [outro]’ [*neither*... *nor*...] e ‘porque’. Veremos que os dois primeiros podem ser expressos pelos conectivos que são aqui discutidos, enquanto o último não pode. ‘Porque’, em contraste com os outros, não é *verofuncional*.

5.1 Negação

Considere como poderíamos simbolizar estas sentenças:

1. Mary está em Barcelona.
2. Não é o caso que Mary esteja em Barcelona.
3. Mary não está em Barcelona

A fim de simbolizar a sentença 1, necessitaremos de uma letra sentencial. Poderíamos oferecer esta chave de simbolização:

B: Mary está em Barcelona.

Uma vez que a sentença 2 está obviamente relacionada à sentença 1, não desejaremos simbolizá-la com uma letra sentencial completamente diferente. De certo modo, a sentença 2 significa algo como 'não é o caso que B'. A fim de simbolizar isto, precisamos de um símbolo para negação. Usaremos '$\neg$'. Agora podemos simbolizar a sentença 2 como '$\neg B$'.

A sentença 3 também contém a palavra 'não' e ela é obviamente equivalente à sentença 2. Dessa forma, podemos simbolizá-la também como '$\neg B$'.

> Uma sentença pode ser simbolizada como $\neg\mathscr{A}$, se ela pode ser parafraseada no Português como 'não é o caso que…'.

Ofereceremos alguns exemplos para ajudar na compreensão:

4. O aparelho pode ser substituído.
5. O aparelho é insubstituível.
6. O aparelho não é insubstituível.

Usaremos a seguinte chave de representação:

R: O aparelho é substituível

A sentença 4 pode ser agora simbolizada por 'R'. Consideremos a sentença 5: dizer que o aparelho é insubstituível significa que não é o caso que o aparelho seja substituível. Assim, embora a sentença 5 não contenha a palavra 'não', ela será simbolizada como se segue: '$\neg R$'.

A sentença 6 pode ser parafraseada como 'não é o caso que o aparelho seja insubstituível'. Essa última pode ser novamente parafraseada como 'não é o caso que não seja o caso que o aparelho seja substituível'. Assim, poderíamos simbolizar este sentença do Português com a seguinte sentença de LVF: '$\neg\neg R$'.

Mas é necessário algum cuidado quando lidamos com negações. Considere os seguintes:

7. Jane está feliz.
8. Jane está infeliz

Se usarmos a sentença de LVF '*H*' para simbolizar 'Jane está feliz', então podemos simbolizar a sentença 7 como '*H*'. Entretanto, seria um erro simbolizar a sentença 8 como '$\neg H$'. Se Jane está infeliz, então ela não está feliz. Mas a sentença 8 não significa a mesma coisa que 'não é o caso que Jane esteja feliz'. Jane poderia estar nem feliz nem infeliz. Ela poderia estar em um estado de pura indiferença. Para simbolizar a sentença 8, precisaríamos, então, de uma nova letra sentencial de LVF.

5.2 Conjunção

Considere estas sentenças:

9. Adam é atlético.
10. Barbara é atlética.
11. Adam é atlético e Barbara também é atlética.

Precisaremos separar letras sentenciais de LVF para simbolizar as sentenças 9 e 10; talvez

A: Adam é atlético.
B: Barbara é atlética.

A sentença 9 pode ser simbolizada como '*A*' e a sentença 10 pode ser simbolizada como '*B*'. A sentença 11 afirma aproximadamente 'A e B'. Precisamos de um outro símbolo para lidar com 'e'. Usaremos '$\wedge$'. Desse modo, essa última sentença será simbolizada como '$(A \wedge B)$'. Este conectivo é chamado CONJUNÇÃO. Também dizemos que '*A*' e '*B*' são os dois CONJUNCTOS da conjunção '$(A \wedge B)$'.

Note que não tentamos simbolizar a palavra ambém' na sentença 11. Palavras como 'ambos' e 'também' funcionam para chamar a atenção ao dato de que duas coisas estão sendo combinadas. Talvez elas afetem a ênfase de uma sentença, mas não queremos (nem podemos) simbolizar tais coisas em LVF.

Mais alguns exemplos para realçar este ponto:

12. Barbara é atlética e enérgica.
13. Barbara e Adam são ambos atléticos.
14. Embora Barbara seja enérgica, ela não é atlética.
15. Adam é atlético, mas Barbara é mais atlética que ele.

A sentença 12 é obviamente uma conjunção. A sentença diz duas coisas (sobre Barbara). Em Português, é permitido se referir a Barbara apenas uma vez. *Poderia* ser tentador pensar que precisamos simbolizar a sentença 12 com algo parecido com 'B e enérgica'. Isto seria um erro. Uma vez que simbolizamos parte de uma sentença como 'B', qualquer outra estrutura é perdida, porque 'B' é uma letra sentencial de LVF. Inversamente, 'enérgica' não é uma sentença do Português. O que estamos buscando é algo como 'B e Barbara é enérgica'. Assim, precisamos adicionar uma outra sentença à chave de simbolização. Permita que 'E' simbolize 'Barbara é enérgica'. Agora, a sentença inteira pode ser simbolizada como '$(B \land E)$'.

A sentença 13 diz uma coisa sobre dois sujeitos diferentes. Ela diz tanto de Barbara como de Adam que eles são atléticos, embora no Português usamos a palavra 'atléticos' somente uma vez. A sentença pode ser parafraseada como 'Barbara é atlética e Adam é atlético'. Podemos simbolizar isto em LVF como '$(B \land A)$', usando a mesma chave de simbolização que estamos usando [acima].

A sentença 14 é um pouco mais complicada. A expressão "embora" [*although*] estabelece um contraste entre a primeira e a segunda parte da sentença. Não obstante, a sentença nos diz que Barbara é enérgica e, ao mesmo tempo, ela não é atlética. Para fazermos de cada um dos conjunctos uma letra sentencial, precisamos substituir 'ela' por 'Barbara'. Portanto, podemos parafrasear a sentença 14 por 'Barbara é enérgica *e* Barbara não é atlética'. O segundo conjuncto contém uma negação, desse modo a parafrasearemos por: 'Bárbara é energética *e não é o caso que* Bárbara seja atlética'. Podemos agora traduzir isto com a seguinte sentença de LVF: '$(E \land \neg B)$'. Note que perdemos todos os tipos de nuances nesta simbolização. Há uma distinta diferença na tonalidade entre a sentença 14 e 'Bárbara é energética *e não é o caso que* Bárbara seja atlética'. LVF não preserva (e não pode preservar) estas nuances.

A sentença 15 levanta questões similares. Há uma estrutura contrastante, mas isto não é algo com o qual LVF pode lidar. Assim, podemos parafrasear a sentença por 'Adam é atlético *e* Barbara é mais atlética que Adam' (perceba que substituímos o pronome 'ele' por 'Adam'). Como deveríamos lidar com este segundo conjuncto? Já temos a letra sentencial 'A', que está sendo usada para simbolizar 'Adam é atlético', e temos a letra sentencial 'B', que está usada para simbolizar 'Barbara é atlética'; mas nenhuma destas sentenças refere-se à qualidade relativa de ser atlético que possa ocorrer entre eles. Desse modo, para simbolizar a sentença inteira, precisamos de uma nova letra sentencial. Permita que a letra sentencial 'R' simbolize a sentença do português 'Barbara é mais atlética que Adam'. Podemos agora simbolizar a sentença 15 por '$(A \wedge R)$'.

Uma sentença pode ser simbolizada por $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$, se ela pode ser parafraseada no Português por 'tanto... como ...' ou por '..., mas...' ou por 'embora ..., ...'.

Você pode estar se perguntando por que colocamos parênteses nas conjunções. A razão disto é revelada quando levamos em conta como a negação pode interagir com a conjunção. Considere:

16. Não é o caso que você terá tanto sopa como salada.
17. Você não terá sopa, mas terá salada.

A sentença 16 pode ser parafraseada por 'não é o caso que: tanto você terá sopa como você terá salada'. Usanso esta chave de simbolização:

S_1: Você terá sopa.
S_2: Você terá salada.

Simbolizaríamos anto você terá sopa como você terá salada' por '$(S_1 \wedge S_2)$'. Para simbolizar a sentença 16, então, você nega simplesmente a sentença inteira. Assim: '$\neg(S_1 \wedge S_2)$'.

A sentença 17 é uma conjunção: você *não terá* sopa e você *terá* salada. 'Você não terá sopa' é simbolizada por '$\neg S_1$'. Assim, para simbolizar a sentença 17, oferecemos '$(\neg S_1 \wedge S_2)$'.

Estas sentenças do Português são muito diferentes e, de acordo com isso, suas simbolizações diferem. Em uma delas, a conjunção inteira é negada. Na outra, apenas um dos conjunctos é negado. Os parênteses ajudam-nos a monitorar coisas como o *escopo* da negação.

5.3 Disjunção

Considere estas sentenças:

18. Ou Fatima jogará videogame ou ela verá filmes.
19. Ou Fatima ou Omar jogarão videogames.

Para estas sentenças, podemos usar esta chave de simbolização:

F: Fatima jogará videogames.
O: Omar jogará videogames.
M: Fatima verá filmes.

Entretanto, precisaremos introduzir novamente um novo símbolo. A sentença 18 é simbolizada por '$(F \vee M)$'. O conectivo é chamado DISJUNÇÃO. Também dizemos que 'F' e 'M' são os DISJUNTOS da disjunção '$(F \vee M)$'.

A sentença 19 é um pouco mais complicada. Há dois sujeitos, mas, na sentença do Português, o verbo ocorre somente uma vez. Todavia, podemos parafrasear a sentença 19 por 'Ou Fatima jogará videogames ou Omar jogará videogames'. Obviamente, podemos agora simbolizá-la novamente por '$(F \vee O)$'.

> Uma sentença pode ser simbolizada por $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$, se ela pode ser parafraseada no Português por 'Ou…ou…'. Cada um dos disjuntos deve ser uma sentença.

Às vezes, no Português, a palavra 'ou' é usada no sentido de excluir a possibilidade de ambos disjuntos serem verdadeiros. Isto é chamado OU EXCLUSIVO. Certamente, usa-se o *ou exclusivo* quando se lê no menu de um restaurante 'Entradas são acompanhadas por sopa ou salada': você terá sopa; você terá salada; mas, se você quiser *tanto* sopa *como* salada, então você terá de pagar a mais.

Às vezes, a palavra 'ou' permite a possibilidade que ambos os disjuntos possam ser verdadeiros. Isto é provavelmente o caso com a sentença 19 acima. Fatima poderia jogar videogame sozinha, Omar poderia jogar videogame sozinho ou les poderiam ambos jogar videogames. A sentença 19 diz meramente que *pelo menos* um deles joga videogame. Isto é chamado OU INCLUSIVO. O símbolo de LVF '$\vee$' sempre simboliza o *ou inclusivo*.

Poderia ser útil ver a interção da negação com a conjunção. Considere:

20. Ou você não terá sopa ou você não terá salada.
21. Você terá nem sopa nem salada.
22. Você terá sopa ou salada, mas não ambos.

Usando a mesma chave de simbolização como antes, a sentença 20 pode ser parafraseada desta forma: ‘Ou *não é o caso que* você terá sopa ou *não é o caso que* que você terá salada’. Para simbolizar isto em LVF, precisamos tanto da disjunção como da negação. ‘Não é o caso que você terá sopa’ é simbolizada por ‘$\neg S_1$’. ‘Não é o caso que você terá salada’ é simbolizada por ‘$\neg S_2$’. Assim, a própria sentença 20 é simbolizada por ‘$(\neg S_1 \vee \neg S_2)$’.

A sentença 21 também exige a negação. Ela pode ser parafraseada por ‘*Não é o caso que* ou você terá sopa ou você terá salada’. Uma vez que isto nega a disjunção inteira, simbolizamos a sentença 21 por ‘$\neg(S_1 \vee S_2)$’.

A sentença 22 é um *ou exclusivo*. Podemos separá-la em duas partes. A primeira parte diz que você terá um ou outro. Simbolizamos isto por ‘$(S_1 \vee S_2)$’. A segunda parte diz que você não terá ambos. Podemos parafrasear isto por: ‘não é o caso que você terá sopa e que você terá salada’. Usando tanto negação como conjunção, simbolizamos por ‘$\neg(S_1 \wedge S_2)$’. Agora precisamos apenas juntar as duas partes. Como vimos acima, ‘mas’ pode ser geralmente simbolizado por ‘$\wedge$’. Desse modo, a sentença 22 pode ser simbolizada por ‘$((S_1 \vee S_2) \wedge \neg(S_1 \wedge S_2))$’.

Este último exemplo mostra algo importante. Embora o símbolo de LVF ‘$\vee$’ simbolize sempre *ou exclusivo*, podemos simbolizar *ou exclusivo* em LVF. Temos de usar apenas algum de nossos outros símbolos também.

5.4 Condicional

Considere estas sentenças:

23. Se Jean está em Paris, então Jean está na França.
24. Jean está na França somente se Jean está em Paris.

Usaremos a seguinte chave de simbolização:

P: Jean está em Paris.
F: Jean está na França.

Grosso modo, a sentença 23 tem esta forma: 'se P, então F'. Usaremos o símbolo '→' para simbolizar esta estrutura 'se…, então…'. Assim, simbolizamos a sentença 23 por '$(P \to F)$'. O conectivo é chamado O CONDICIONAL. Aqui, 'P' é chamado o ANTECEDENTE do condicional '$(P \to F)$' e 'F' é chamado o CONSEQUENTE.

A sentença 24 é também um condicional. Uma vez que a palavra 'se' aparece na segunda metade da sentença, poderia ser tentador simbolizar isto da mesma forma que a sentença 23. Isto seria um erro. Seu conhecimento de geografia te diz que a sentença 23 é, sem dúvida nenhuma, verdadeira: não há maneira na qual Jean esteja em Paris que não envolva que Jean esteja na França. Mas, a sentença 24 não tão simples e direta: se Jean estivesse em Dieppe, Lyons ou Toulouse, Jean estaria na França sem estar em Paris, tornando, portanto, a sentença 24 falsa. Uma vez que apenas a geografia dita a verdade da sentença 23, enquanto planos de viagem são necessários para saber a verdade da sentença 24, elas devem significar coisas diferentes.

De fato, a sentença 24 pode ser parafraseada por 'se Jean está na França, então Jean está em Paris'. Assim, podemos simbolizá-la por '$(F \to P)$'.

> Uma sentença pode ser simbolizada por $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, se ela pode ser parafraseada no Português como 'Se A, então B' ou 'A somente se B'.

De fato, muitas expressões do Português podem ser representadas, usando-se o condicional. Considere:

25. Para Jean estar em Paris, é necessário que Jean esteja na França.
26. É uma condição necessária para Jean estar em Paris que ela esteja na França.
27. Para Jean estar na França, é suficiente que Jean esteja em Paris.
28. É uma condição suficiente para Jean estar na França que ela esteja em Paris.

Se pensarmos profundamente sobre isso, todas as quatro sentenças significam o mesmo que 'Se Jean está em Paris, então Jean está na França'. Assim, elas podem ser todas simbolizadas por '$P \to F$'.

É importante ter em mente [*to bear in mind*] que o conectivo '→' apenas nos diz que se o antecedente é verdadeiro, então o consequente é verdadeiro. Ele nada diz sobre uma conexão *causal* entre os dois eventos (por exemplo). De fato, perdemos muita coisa quando usamos '→' simbolizar condicionais do Português. Retornaremos a isto em §§9.3 e em 11.5.

5.5 Bicondicionais

Considere estas sentenças:

29. Laika é um cão somente se é um mamífero.
30. Laika é um cão se ela é um mamífero.
31. Laika é um cão se e somente se ela é um mamífero.

Usaremos a seguinte chave de simbolização:

D: Laika é um cão
M: Laika é um mamífero.

A sentença 29, por razões discutidas acima, pode ser simbolizada por '$D \to M$'.

A sentença 30 é, de uma maneira importante, diferente. Ela pode ser parafraseada por 'se Laika é um mamífero, então Laika é um cão'. Desse modo, ela pode ser simbolizada por '$M \to D$'.

A sentença 31 diz algo mais forte que 29 ou 30. Ela pode ser parafraseada por 'Laika é um cão se Laika é um mamífero e Laika é um cão somente se Laika é um mamífero'. Isto é exatamente a conjunção das sentenças 29 e 30. Desse modo, podemos simbolizá-la por '$(D \to M) \wedge (M \to D)$'. Chamamos isto BICONDICIONAL, porque impõe o condicional em ambas direções.

Poderíamos tratar qualquer bicondicional desta forma. Assim, da mesma forma que não precisamos de um novo símbolo de LVF para lidar com *ou exclusivo*, não precisamos, de fato, de um novo símbolo de LVF para lidar com biconsicionais. Entretanto, porque o bicondicional ocorre muito frequentemente, usameros o símbolo '↔' para ele. Podemos, então, simbolizar a sentença 31 por meio da seguinte sentença de LVF: '$D \leftrightarrow M$'.

A expressão 'se e somente se' ocorre muito, especialmente na filosofia, matemática e lógica. Para encurtar as coisas, podemos abreviá-la por meio da expressão mais simples ‘sse’. Seguiremos este artifício. Assim, ‘se’ com um *único* ‘s’ é o condicional do Português. Mas ‘sse’ com *dois* ‘s’ é o bicondicional do Português. Equipados com isso, podemos dizer:

> Uma sentença pode ser simbolizada por $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ se ela pode ser parafraseada no Português por ‘A sse B’; ou seja, ‘A se e somente se B’.

Uma palavra de cautela. Falantes habituais do Português frequentemente usam ‘se…, então…’ quando, na verdade, eles querem usar algo mais parecido com ‘…se e somente se …’. Talvez seus pais tenha lhe dito o seguinte quando você era uma criança: ‘se você não comer as verduras, então você não terá sobremesa’. Suponha que você tenha comido as verdauras, mas que seus pais recusam a lhe dar qualquer sobremesa, porque eles estavam apenas comprometidos com o *condicional* (grosso modo, ‘se você tiver sobremesa, então você terá comido as verduras’), em vez do bicondicional (grosso modo, ‘você terá sobremesa sse comer as verduras’). Ora, é certo que uma malcriação ocorreria consequentemente. Dessa forma, esteja consciente disto ao interpretar as pessoas; mas, em seus próprios escritos, certifique-se de que você usará o bicondicional sse você quer dizer o bicondicional [*but in your own writing, make sure you use the biconditional iff you mean to.*].

5.6 A menos que

Já introduzimos todos os conectivos de LVF. Podemos usá-los juntos para simbolizar muitos tipos de sentenças. Um caso especialmente difícil é quando usamos o conectivo da lingua portuguesa ‘embora’:

32. A menos que você use uma jacket, você ficará resfriado.
33. Você ficará resfriado, a menos que você use jaqueta.

Estas duas sentenças são obviamente equivalentes. Para simbolizá-las, usaremos a seguinte chave de simbolização:

J: Você usará jaqueta.
D: Você ficará resfriado.

Ambas sentenças significam que se você não usar a jaqueta, então você ficará resfriado. Com isto em mente, poderíamos simbolizá-las por '$\neg J \rightarrow D$'.

Da mesma forma, ambas sentenças significam que se você não ficar resfriado, então você deve ter usado uma jaqueta. Com isto em mente, poderíamos simbolizá-las por '$\neg D \rightarrow J$'.

Da mesma forma, ambas sentenças significam que ou você usará jaqueta ou ficará resfriado. Com isto em mente, poderíamos simbolizá-las por '$J \vee D$'.

Todas as três [formas] são simbolizações corretas. De fato, no capítulo 11, veremos que todas as três simbolizações são equivalentes em LVF.

> Se uma sentença pode ser parafraseada por À menos que A, B', então ela pode ser simbolizada por '$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$'.

Mas, novemente, há uma pequena complicação. 'A menos que' pode ser simbolizada como um condicional; contudo, como dissemos acima, pessoas frequentemente usam o condicional (por sua conta) quando elas querem usar o bicondicional. Da mesma forma, 'a menos que' pode ser simbolizado como uma disjunção; entretanto, há dois tipos de disjunção (exclusiva e inclusiva). Desse modo, não será surpreendente que você descubra que falantes comuns do Português usem 'a menos que' como significando algo mais parecido com bicondicional ou com a disjunção exclusiva. Suponha que alguém diga: 'irei correr a menos que chova'. Provavelmente, ele que dizer algo como 'Irei correr sse não chover' (ou seja, o bicondicional) ou, então, 'irei correr ou choverá, mas não ambos' (ou seja, a disjunção exclusiva). Novamente: esteja ciente disto ao interpretar o que as pessoas dizem, mas seja preciso em seus escritos.

Exercícios Práticos

A. Usando a chave de simbolização dada, simbolize cada uma das sentenças do Português em LVF:

M: Estas criaturas são homens de terno.
C: Estas criaturas são chimpanzés.
G: Estas criaturas são gorilas.

1. Estas criaturas não são homens de terno.
2. Estas criaturas são homens de ternos ou elas não são.
3. Estas criaturas são gorilas ou chimpazés.
4. Estas criaturas são nem gorilas nem chimpazés.
5. Se estas criaturas são chimpanzés, então elas não são nem gorilas nem homens de terno.
6. A menos que estas criaturas sejam homens de terno, elas são ou chimpazés ou ela são gorilas.

B. Usando a chave de simbolização dada, simbolize cada uma das sentenças do Português em LVF:

A: Senhor Ace foi assassinado.
B: O mordomo fez isso
C: O cozinheiro fez isso.
D: A duquesa está mentindo.
E: Senhor Edge foi assassinado.
F: A arma do crime foi uma frigideira.

1. O senhor Ace ou Senhor Edge foi assassinado.
2. Se Senhor Ace foi assassinado, então o cozinheiro fez isso.
3. Se senhor Edge foi assassinado, então o cozinheiro fez isso.
4. Ou o mordomo faez isso ou a duqueza está mentindo.
5. O cozinheiro fez isso somente se a duquesa estiver mentindo.
6. Se a arma do crime foi uma frigideira, então o culpado deve ter sido o cozinheiro.
7. Se a arma do crime não foi uma frigideira, então o culpado seria ou o cozinheiro ou o mordomo.
8. Senhor Ace foi assassinado se e somente se senhor Edge não foi assassinado.
9. A duquesa está mentindo, a menos que senhor Edge tenha sido assassinado.
10. Se senhor Ace foi assassinado, então foi usada a frigideira como arma do crime.
11. Uma vez que o cozinheiro fez isso, o mordomo não o fez.
12. É claro que a duquesa está mentindo!

C. Usando a chave de simbolização dada, simbolize cada uma das sentenças do Português em LVF:

E_1: Ava é eletricista.
E_2: Harrison é eletricista.
F_1: Ava é bombeira
F_2: Harrison é bombeiro
S_1: Ava está satisfeita com a carreira dela.
S_2: Harrison está satisfeito com a carreira dele.

1. Ava e Harrison são ambos eletricistas.
2. Se Ava é bombeira, então ela está satisfeita com a carreira dela.
3. Ava é bombeira, a menos que ela seja eletricista.
4. Harrison é um eletricista insatisfeito.
5. Nem Ava nem Harrison são eletricistas.
6. Tanto Ava como Harrison são eletricistas, mas nenhum deles está satisfeito.
7. Harrison está satisfeito somente se ele é bombeiro.
8. Se Ava não é eletricista, então nem Harrison é, mas se ela for, então ele também é.
9. Ava está satisfeita com a carreira dela se e somente se Harrison não está satisfeito com a dele.
10. Se Harrison é tanto eletricista como bombeiro, então ele deve estar satisfeito com o trabalho dele.
11. Não pode ser [o caso] que Harrison é tanto eletricista como bombeiro.
12. Harrison e Ava são ambos bombeiros se e somente se nenhum deles é eletricista.

D. Usando a chave de simbolização dada, simbolize cada uma das sentenças do Português em LVF:

J_1: John Coltrane tocava saxofone tenor.
J_2: John Coltrane tocava saxofone soprano.
J_3: John Coltrane tocava tuba.
M_1: Miles Davis tocava trompete.
M_2: Miles Davis tocava tuba.

1. John Coltrane tocava saxofones tenor e soprano.
2. Nem Miles Davis nem John Coltrane tocavam tuba.
3. John Coltrane não tocava tanto saxofone tenor como tuba.
4. John Coltrane não tocava saxofone tenor, a menos que também tocasse saxofone soprano.

5. John Coltrane não tocava tuba, mas Miles Davis tocava.
6. Miles Davis tocava trompete somente se ele também tocava tuba.
7. Se Miles Davis tocava trompete, então John Coltrane tocava pelo menos um destes instrumentos: saxofone tenor, saxofone soprano ou tuba.
8. Se John Coltrane tocava tuba, então Miles Davis tocava nem trompete nem tuba.
9. Miles Davis e John Coltrane tocavam ambos tuba se e somente se Coltrane não tocava saxofone tenor e Miles Davis não tocava trompete.

E. Dê uma chave de simbolização e simbolize as seguintes sentenças do Português em LVF:

1. Alice e Bob são ambos espiões.
2. Se Alice ou Bob são espiões, então o código foi quebrado.
3. Se nem Alice nem Bob são espiões, então o código não foi quebrado.
4. A embaixada da Alemanha está em polvorosa, a menos que alguém tenha quebrado o código.
5. Ou o código foi quebrado ou não foi, mas, independentemente, a embaixada da Alemanha estará em polvorosa.
6. Ou Alice ou Bob são espiões, mas não ambos.

F. Dê uma chave de simbolização e simbolize as seguintes sentenças do Português em LVF:

1. Se há comida para ser encontrada em Pridelands, então Rafiki falará sobre bananas amassadas.
2. Rafiki falará sobre bananas amassadas, a menos que Simba esteja vivo.
3. Rafiki will either talk about squashed bananas or he won’t, but there is food to be found in the pridelands regardless.
4. Scar permanecerá como rei se e somente se há comida para ser encontrada em Pridelands.
5. Se Simba estiver vivo, então Scar não permanecerá como rei.

G. Para cada argumento, escreva uma chave de simbolização e simbolize todas as sentenças do argumento em LVF:

1. Se Dorothy toca piano de manhã, então Roger acorda irritado. Dorothy toca piano de manhã, a menos que ela esteja distraída. Assim, se Roger não acorda irritado, então Dorothy deve estar distraída.
2. Choverá ou nevará na terça. Se chover, Neville ficará triste. Se nevar, Neville ficará com frio. Portanto, Neville ou estará triste ou ficará com frio na terça.
3. Se Zoog lembrasse de fazer as tarefas dele, então as coisas estariam limpas, mas não arrumadas. Se ele esqueceu-se, então as coisas estariam arrumadas, mas não limpas. Portanto, as coisas estão arrumadas ou limpas, mas não ambos.

H. Para cada argumento, escreva uma chave de simbolização e simbolize o argumento da melhor maneira possível em LVF. A parte da passagem em itálico tem o objetivo de fornecer o contexto para o argumento e não precisa ser simbolizado.

1. Choverá em breve. Sei disso, porque minhas pernas estão doendo e minhas pernas doem, se irá chover.
2. *O Homem-Aranha tenta descobrir o plano do bandido* Se Doutor Octopus obter urânio, ele chantageará a cidade. Eu estou certo disto, porque se Doutor Octopus obter o urânio, ele pode fazer uma bomba suja e se ele fizer uma bomba suja, ele chantageará a cidade.
3. *Um ocidental tenta prever as políticas do governo chinês* Se o governo chinês não conseguir resolver a escassez de água em Pequim, o governo chinês terá de mudar a capital. O governo chinês não deseja mudar a capital. Portanto, o governo chinês deve resolver a escassez de água. Mas a única maneira de resolver a escassez de água é desviar quase toda água do rio Yangzi para o norte. Portanto, o governo chinês continuará o projeto de desviar a água do sul para o norte.

I. Simbolizamos *ou exclusivo* usando '$\vee$', '$\wedge$' e '$\neg$'. Como você poderia simbolizar *ou exclusivo* usando somente dois conectivos? Há alguma maneira de simbolizar *ou exclusivo* usando apenas um conectivo?

CAPÍTULO 6

Sentenças de LVF

A sentença ‘ou maçãs são vermelha ou os mirtilos são azuis’ é uma sentença do Português e a sentença ‘$(A \vee B)$’ é uma sentença de LVF. Embora possamos identificar sentenças do Português quando as encontramos, não temos uma definição formal de ‘sentença do Português’. Mas, neste capítulo, ofereceremos uma *definição completa* do que conta como uma sentença de LVF. Isto é um aspecto no qual a linguagem formal como LVF é mais precisa que uma linguagem natural como Português.

6.1 Expressões

Vimos que há três tipos de símbolos em LVF:

Sentenças atômicas	$A, B, C, \ldots, Z$
com subscrito, quando necessário	$A_1, B_1, Z_1, A_2, A_{25}, J_{375}, \ldots$
Conectivos	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
Parênteses	(,)

Definimos uma expressão de lvf como qualquer sequência de símbolos de LVF. Tome qualquer um dos símbolos de LVF e escreva-os em qualquer ordem e você tem uma expressão de LVF.

6.2 Sentenças

É claro, muitas expressões de LVF serão totalmente sem sentido [*gibberish*]. Queremos saber quando uma expressão de LVF equivale a uma sentença.

Obviamente, letras sentenciais individuais como 'A' e 'G_{13}' deveriam contar como sentenças (chamá-las-emos também sentenças *atômicas*). POdemos formaroutras sentenças a partir destas, usando os vários conectivos. Usando negação, podemos obter '$\neg A$' e '$\neg G_{13}$'. Usando a conjunção, podemos obter '$(A \wedge G_{13})$', '$(G_{13} \wedge A)$', '$(A \wedge A)$' e '$(G_{13} \wedge G_{13})$'. Também poderíamos aplicar a negação repetidamente para obter sentenças como '$\neg\neg A$' ou aplicar a negação junto com a negação para obter sentenças como '$\neg(A \wedge G_{13})$' e '$\neg(G_{13} \wedge \neg G_{13})$'. As combinações possíveis são infinitas, masmo partindo apenas com duas letras sentenciais e há infinitas (enumerável) letras sentenciais. Desse modo, não faz sentido tentar listar todas as sentenças uma por uma.

Em vez disso, descreveremos o processo por meio do qual as sentenças podem ser *construídas*. Considere a negação: dada qualquer sentença $\mathscr{A}$ de LVF, $\neg\mathscr{A}$ é uma sentença de LVF (Por que fontes diferentes? Retornaremos a isto em §7.3).

Podemos dizer coisas similares para todos os outros conectivos. Por exemplo, se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são sentenças de LVF, então $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ é uma sentença de LVF. Fornecendo cláusulas como esta para todos os conectivos, chegamos à seguinte definição formal para SENTENÇA DE LVF:

1. Toda letra sentencial é uma sentença.
2. Se $\mathscr{A}$ for uma sentença, então $\neg\mathscr{A}$ será uma sentença.
3. Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ forem sentenças, então $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ é uma sentença.
4. Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ forem sentenças, então $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ é uma sentença.
5. If $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ forem sentenças, then $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ é uma sentença.
6. If $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ forem sentenças, then $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ é uma sentença.
7. Nenhuma outra coisa é sentença.

Definições como esta são chamadas *indutivas*. Definições indutivas começam com alguns elementos básicos específicos e, então apresenta formas de gerar indefinidamente muitos mais elementos, combinando aqueles previamente estabelecidos.

Para melhor exemplificar a ideia do que seja uma definição indutiva, podemos dar uma definição indutiva da ideia de *um ancestral meu*. Especificamos uma cláusula base.

- Meus pais são meus ancestrais.

e, então, oferecemos outras cláusulas como:

- Se X é meu ancestral, então os pais de X são meus ancestrais.
- Nenhuma outra coisa é meu ancestral.

Usando esta definição, podemos facilmente verificar se alguém é meu ancestral: basta checar se é pai ou mãe dos pais…de um dos meus pais. E o mesmo é verdadeiro para nossa definição indutiva de sentença de LVF. Assim como a definição indutiva permite construir sentenças complexas a partir das mais simples, a definição nos permite decompor sentenças nas suas partes mais simples. Uma vez que chegamos às letras sentenciais, então sabemos que estamos certos.

Vamos considerar alguns exemplos.

Suponha que desejamos saber se '$\neg\neg\neg D$' é uma sentença ou não de LVF. Olhando para segunda cláusula da definição, sabemos que '$\neg\neg\neg D$' será uma sentença, *se* '$\neg\neg D$' for uma sentença. Assim, agora precisamos perguntar se '$\neg\neg D$' é uma sentença ou não. Novamente olhando para a segunda cláusula da definição, '$\neg\neg D$' será uma sentença, *se* '$\neg D$' for uma sentença. Desse modo, '$\neg D$' será uma sentença, *se* 'D' for uma sentença. Ora, 'D' é uma letra sentencial de LVF, assim sabemos que 'D' é uma sentença pela primeira cláusula da definição. Portanto, para uma sentença composta como '$\neg\neg\neg D$', devemos aplicar a definição repetidamente. Finalmente, chegamos às letras sentenciais a partir das quais a sentença é construída.

Em seguida, considere o exemplo '$\neg(P \wedge \neg(\neg Q \vee R))$'. Olhando para segunda cláusula da definição, isto será uma sentença, se '$(P \wedge \neg(\neg Q \vee R))$' for uma sentença e isto será uma sentença, se *tanto* 'P' *como* '$\neg(\neg Q \vee R)$' forem sentenças. Aquela é uma letra sentencial e a última será uma sentença, se '$(\neg Q \vee R)$' for uma sentença. Ela é.

Olhando para quarta cláusula da definição, isto será uma sentença, se tanto '$\neg Q$' como 'R' forem sentenças e ambas são!

Enfim, qualquer sentença é construída a partir das letras sentenciais. Quando estamos lidando com uma *sentença* diferente de uma letra sentencial, podemos ver que deve existir algum conectivo sentencial que foi introduzido *por último*, ao construir a sentença. Chamamos este conectivo o CONECTIVO PRINCIPAL da sentença. No caso de '$\neg\neg\neg D$', o conectivo lógico principal é o primeiro sinal '$\neg$'. No caso de '$(P \wedge \neg(\neg Q \vee R))$', o operador lógico principal é '$\wedge$'. No caso de '$((\neg E \vee F) \rightarrow \neg\neg G)$', o operador lógico principal é '$\rightarrow$'.

Como uma regra geral, você pode encontrar o operador lógico principal de uma sentença, usando o seguinte método:

- Se o primeiro símbolo na sentença for '$\neg$', então este é o operador lógico principal.
- Caso contrário, comece a contar os parênteses. Para cada parêntese aberto, ou seja, '(', adicione 1; para cada parêntese fechado, ou seja, ')', subtraia 1. Quando sua contagem é exatamente 1, o primeiro operador que você encontrar (*exceto* a partir de '$\neg$') é o operador lógico principal.

(Nota: se você usar este método, então certifique-se de incluir *todos* os parênteses na sentença, em vez de omitir algums conforme convenções de §6.3!)

A estrutura indutiva de sentenças de LVF será importante qunado considerarmos as circunstâncias sob as quais uma sentença em particular seria verdadeira ou falsa. A sentença '$\neg\neg\neg D$' é verdadeira se e somente se a sentença '$\neg\neg D$' é falsa e assim por diante através da estrutura da sentença, até que se chegue aos componentes atômicos. Retornaremos a este ponto na Parte III.

A estrutura indutiva das sentenças de LVF também nos permite dar uma definição formal do *escopo* de uma negação (mencionado em §5.2). O escopo de '$\neg$' é a subsentença para a qual '$\neg$' é o operador lógico principal. Considere uma sentença como:

$$(P \wedge (\neg(R \wedge B) \leftrightarrow Q))$$

que foi construída, combinando 'P' com '$(\neg(R \wedge B) \leftrightarrow Q)$'. Esta última sentença foi construída, colocando-se um bicondicional entre '$\neg(R \wedge B)$' e 'Q'. A primeira destas sentenças — uma subsentença de nossa sentença original — é uma sentença para a qual '¬' é o operador lógico principal. Desse modo, o escopo da negação é justamente '$\neg(R \wedge B)$'. De uma forma mais geral:

O ESCOPO de um conectivo (em uma sentença) é a subsentença para a qual este conectivo é o operador lógico principal.

6.3 Convenções sobre o uso de parênteses

Estritamente falando, os parênteses em '$(Q \wedge R)$' são uma parte indispensável da sentença. Em parte, isto é assim, porque poderíamos usar '$(Q \wedge R)$' como uma subsentença em uma sentença mais complicada. Por exemplo, poderíamos querer negar '$(Q \wedge R)$', obtendo '$\neg(Q \wedge R)$'. Se apenas tivéssemos '$Q \wedge R$' sem parênteses e colocássemos uma negação na frente dela, teríamos '$\neg Q \wedge R$'. É mais natural ler isto como significando a mesma coisa que '$(\neg Q \wedge R)$', mas, como vimos em §5.2, isto é muito diferente de '$\neg(Q \wedge R)$'.

Estritamente falando, então, '$Q \wedge R$' *não* é uma sentença. É meramente uma expressão.

Entretanto, ao trabalhar com LVF, tornará nossa vida mais fácil, se formos às vezes um pouco menos rigorosos. Assim, aqui estão algumas convenções.

Em primeiro lugar, será permitido omitir os parênteses *mais externos* de uma sentença. Desse modo, será permitido escrever '$Q \wedge R$', em vez da sentença '$(Q \wedge R)$'. Todavia, devemos lembrar de colocar parênteses de volta quando quisermos incorporar a sentença em uma sentença mais complicada!

Em segundo lugar, pode ser um pouco doloroso olhar para longas sentenças com muitos pares aninhados de parênteses. Para tornar as coisas mais fáceis aos olhos, serão permitidos colchetes, '[' e ']', em vez de parênteses. Desse modo, não há diferença lógica entre ets. To make things a bit easier on the eyes, we will allow ourselves to use square brackets, '[' and ']', instead of rounded ones. So there is no logical difference between '$(P \vee Q)$' e '$[P \vee Q]$', por exemplo.

Combinando estas duas convenções, podemos reescrever a sentença complicada

$$(((H \rightarrow I) \vee (I \rightarrow H)) \wedge (J \vee K))$$

de forma mais clara da seguinte maneira:

$$\big[(H \rightarrow I) \vee (I \rightarrow H)\big] \wedge (J \vee K)$$

O escopo de cada conectivo é agora mais fácil de entender

Exercícios Práticos

A. Para cada um dos seguintes: (a) é uma sentença de LVF, estritamente falando? (b) É uma sentença de LVF, permitindo-se nossas convenções sobre o uso dos parênteses?

1. (A)
2. $J_{374} \vee \neg J_{374}$
3. $\neg\neg\neg\neg F$
4. $\neg \wedge S$
5. $(G \wedge \neg G)$
6. $(A \rightarrow (A \wedge \neg F)) \vee (D \leftrightarrow E)$
7. $[(Z \leftrightarrow S) \rightarrow W] \wedge [J \vee X]$
8. $(F \leftrightarrow \neg D \rightarrow J) \vee (C \wedge D)$

B. Há quaisquer sentenças de LVF que não contenham letras sentenciais? Explique sua resposta.

C. Qual é o escopo de cada conectivo na sentença:

$$\big[(H \rightarrow I) \vee (I \rightarrow H)\big] \wedge (J \vee K)$$

CAPÍTULO 7

Uso e menção

Neste capítulo, falaremos muito sobre sentenças. Desse modo, deveríamos pausar e explicar um ponto importante e muito geral.

7.1 Convenções para citação

Considere estas duas sentenças:

- Justin Trudeau é o Primeiro Ministro.
- The expresssão 'Justin Trudeau' é composta de duas letras maiúsculas e onze letras minúsculas.

Quando queremos falar sobre o Primeiro Ministro, nós *usamos* o nemoe dele. Quando queremos falar sobre o nome do Primeiro Ministro, nós *mencionamos* este nome e fazemos isto, colocando-o entre aspas.

Há um ponto geral aqui. Quando falamos sobre coisas no mundo, nós justamente *usamos* palavras. Quando queremos falar sobre palavras, tipicamente temos de *mencionar* estas palavras. Precisamos indicar que estamos mencionado-as, em vez de usá-las. Para fazer isto, alguma convenção é necessária. Podemos colocá-las entre aspas ou mostrá-las centralizadas na página. Assim, esta sentença:

- 'Justin Trudeau' é o Primeiro Ministro.

diz que alguma *expressão* é o Primeiro Ministro. Isto é falso. O *humano* é o Primeiro Ministro; o *nome* dele não é. Inversamente, esta sentença:

- Justin Trudeau é composto de duas letras maiúsculas e onze letras minúsculas.

também diz algo falso: Justin Trudeau é um humano, feito de carne e osso, em vez de letras. Um exemplo final:

- " 'Justin Trudeau' " é o nome de 'Justin Trudeau'.

Aqui, à esquerda, temos o nome de um nome. à direita, temos um nome. Talvez este tipo de sentença ocorra apenas nos manuais de lógica, mas, não obstante, ela é verdadeira.

Estas são somente regras gerais para citação e você deveria observá-las cuidadosamente em todos seus trabalhos! Para ser claro, as aspas aqui não indicam fala indireta. Elas indicam que você está mudando da fala sobre um objeto para a fala sobre o nome deste objeto.

7.2 Linguagem objeto e metalinguagem

Estas convenções gerais de citação são de importância particular para nós. Afinal das contas, estamos descrevendo uma linguagem formal aqui, LVF, e, portanto, estamos frequentemente *mencionando* expressões de LVF.

Quando falamos sobre uma linguagem, a linguagem sobre a qual estamos falando é chamada a LINGUAGEM OBJETO. A linguagem que usamos para falar sobre a linguagem objeto é chamada a METALINGUAGEM.

Na maioria das vezes, a linguagem objeto neste capítulo tem sido a linguagem formal que estamos desenvolvendo: LVF. A metalinguagem é o Português. Não o Português do dia a dia, mas o Português suplementado com algum vocabulário adicional que nos ajudar a fazer progresso [*but English supplemented with some additional vocabulary which helps us to get along.*].

Ora, usamos letras maiúsculas como letras sentenciais de LVF:

$$A, B, C, Z, A_1, B_4, A_{25}, J_{375}, \ldots$$

Estas são sentenças da linguagem objeto (LVF). Elas não são sentenças do Português. Desse modo, não devemos dizer, por exemplo:

- D é uma letra sentencial de LVF.

Obviamente, estamos tentando declarar com uma sentença do Português algo que é sobre a linguagem objeto (LVF), mas 'D' é uma sentença de LVF e não parte do Português. Desse modo, o precedente é sem sentido. O mesmo acontece com:

- Schnee ist weiß é uma sentença do Alemão.

Certamente, neste caso, o que queríamos dizer é:

- ‘Schnee ist weiß’ é uma sentença do Alemão.

Da mesma forma, o que queríamos dizer acima é justamente:

- ‘D’ é uma letra sentencial de LVF.

O ponto geral é que, sempre que quisermos falar em Português sobre alguma expressão específica de LVF, precisamos indicar que estamos *mencionando* a expressão, em vez de usá-la. Podemos empregar aspas ou podemos adotar alguma convenção similar, tal como colocá-la centralizada na página.

7.3 Metavariáveis

Contudo, não queremos apenas falar sobre expressões *específicas* de LVF. Também queremos ser capazes de falar sobre *qualquer sentença arbitrária* de LVF. De fato, tivemos de fazer em §6.2, quando apresentamos a definição indutiva de uma sentença de LVF. Usamos letras maiúsculas com fonte distinta [*uppercase script letters*] para fazer isto, a saber:

$$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}, \ldots$$

Estes símbolos não pertencem a LVF. Em vez disso, eles são parte de nossa metalinguagem (estendida) que usamos para falar sobre *qualquer* expressão de LVF. Repetindo a segunda cláusula da definição indutiva de uma sentença de LVF, dissemos:

2. Se $\mathscr{A}$ é uma sentença, então $\neg\mathscr{A}$ é uma sentença.

Isto fala sobre sentenças *arbitrárias*. Se, em vez disso, tivéssemos oferecido:

- Se ‘A’ é uma sentença, então ‘$\neg A$’ é uma sentença.

isto não nos permitiria determinar se ‘$\neg B$’ é uma sentença. Para enfatizar, então:

‘$\mathscr{A}$’ é um símbolo (chamado uma METAVARIÁVEL) no Português estendido, que usamos para falar sobre qualquer expressão de LVF. ‘A’ é uma sentença particular de LVF.

Mas este último exemplo levanta um outra complicação para nossas convenções sobre aspas. Não incluímos quaisquer aspas na segunda cláusula de nossa definição indutiva. Deveríamos ter feito assim?

O problema é que a expressão à direita desta regra não é uma sentença do Português, uma vez que ela contém ‘$\neg$’.. Assim, poderíamos tentar escrever:

2′. Se $\mathscr{A}$ é uma sentença, então ‘$\neg\mathscr{A}$’ é uma sentença.

Mas isto não é bom: ‘$\neg\mathscr{A}$’ não é uma sentença de LVF, uma vez que ‘$\mathscr{A}$’ é um símbolo do Português (estendido), em vez de um símbolo de LVF.

O que, de fato, queremos dizer é algo como isto:

2″. Se $\mathscr{A}$ é uma sentença, então o resultado de concatenar o símbolo ‘$\neg$’ com a sentença $\mathscr{A}$ é uma sentença.

Isto é impecável, mas excessivamente longo. Mas podemos evitar isso, criando nossas próprias convenções. Podemos perfeitamente estipular que uma expressão como ‘$\neg\mathscr{A}$’ deveria simplesmente ser lida *diretamente* em termos de regras para concatenação. Assim, *oficialmente*, a expressão metalinguística ‘$\neg\mathscr{A}$’ simplesmente abrevia:

> o resultado de concatenar o símbolo ‘$\neg$’ com a sentença $\mathscr{A}$

e, similarmente, para expressões como ‘$(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$’, ‘$(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$’ etc.

7.4 Convenções de citação para argumentos

Um dos principais propósitos para usar LVF é estudar argumentos e isto será nossa preocupação nas Partes III e IV. No Português, as premissas de um argumento são frequentemente expressas por meio de sentenças individuais e a concusão por uma outra sentença. Uma vez que podemos simbolizar sentenças do Português, podemos simbolizar argumentos, usando LVF. Desse modo, poderíamos perguntar se o argumento cujas premissas são sentenças de LVF 'A' e '$A \to C$' e cuja conclusão é a sentença de LVF 'C' é válido. Todavia, é muita coisa para escrever toda vez. Assim, em vez disso, introduziremos uma outra abreviação. Esta:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$$

abrevia:

> o argumento com premissas $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ e conclusão $\mathscr{C}$

Para evitar confusão [*clutter*] desnecessária, não consideraremos que isso exige aspas (note que '$\therefore$' é um símbolo de nossa *metalinguagem* estendida, e não um novo símbolo de LVF).

PARTE III

Tabelas de verdade

CAPÍTULO 8

Tabelas de verdade características

Qualquer sentença de LVF é composta de letras sentenciais, possivelmente combinadas usando-se conectivos sentenciais. O valor de verdade da sentença composta depende apenas do valor de verdade das letras sentenciais que a compõem. A fim de saber o valor de verdade de ‘$(D \land E)$’„ por exemplo, voê precisa somente saber o valor de verdade de ‘D’ e o valor de verdade de ‘E’.

Introduzimos cinco conectivos no capítulo 5, assim precisamos simplesmente explicar como eles mapeiam entre valores de verdade. Por conveniência, abreviaremos ‘Verdadeiro’ por ‘V’ e ‘Falso’ por ‘F’ (mas para ser claro, os dois valores de verdade são o Verdadeiro e o Falso; os valores de verdade não são *letras*).

Negação Para qualquer sentença $\mathscr{A}$: se $\mathscr{A}$ for verdadeira, então $\neg\mathscr{A}$ será falsa. Se $\neg\mathscr{A}$ for verdadeira, então $\mathscr{A}$ será falsa. Podemos resumir isto na *seguinte tabela de verdade característica* para negação:

$\mathscr{A}$	$\neg\mathscr{A}$
V	F
F	V

Conjunção Para quaisquer sentenças $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, $\mathscr{A}\land\mathscr{B}$ será verdadeira se e somente se tanto $\mathscr{A}$ como $\mathscr{B}$ forem verdadeiras. Podemos resumir isto na *seguinte tabela de verdade característica* para conjunção:

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \land \mathscr{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Note que a conjunção é *simétrica.* O valor de verdade de $\mathscr{A} \land \mathscr{B}$ é sempre o mesmo que o valor de verdade de $\mathscr{B} \land \mathscr{A}$.

Disjunção Lembre-se de que '∨' sempre representa a disjunção inclusivo. Desse modo, para quaisquer sentença $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, $\mathscr{A} \lor \mathscr{B}$ será verdadeira se e somente se ou $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{B}$ forem verdadeiras. Podemos resumir isto na *seguinte tabela de verdade característica* para disjunção:

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \lor \mathscr{B}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Como a conjunção, a disjunção é simétrica.

Condicional Deixando bastante claro, admitimos: condicionais são um antigo problema em LVF. O quanto os condicionais são problemáticos é filosoficamente controverso. Discutiremos algumas sutilezas em §§9.3 e 11.5. Por enquanto, iremos estipular o seguinte: $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ será falsa se e somente se $\mathscr{A}$ for verdadeira e $\mathscr{B}$ for falsa. Podemos resumir isto com *seguinte tabela de verdade característica* para o condicional.

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

O condicional é *assimétrico.* Você não pode trocar o antecedente e consequente sem mudar o significado da sentença, pois $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ tem uma tabela de verdade muito diferente de $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$.

Bicondicional Uma vez que o bicondicional é o mesmo que a conjunção de um condicional em ambas as direções, desejamos que a tabela de verdade para o bicondicional seja:

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Sem surpresas, o bicondicional é simétrico.

CAPÍTULO 9

Conectivos verofucionais

9.1 A ideia de verofuncionalidade

Vamos introduzir uma importante ideia.

> Um conectivo é VEROFUNCIONAL sse o valor de verdade de uma sentença com este conectivo como operador principal é unicamente determinado pelo(s) valore(s) de verdade da(s) sentença(s) constituinte(s).

Todo conectivo em LVF é verofuncional. O valor de verdade de uma negação é unicamente determinada pelo valor de verdade da sentença que não é negada. O valor de verdade de uma conjunção é unicamente determinado pelo valor de verdade de ambos conjunctos. O valor de verdade da disjunção é unicamente determinado pelo valor de verdade de amos disjuntos e assim por diante. Para determinar o valor de verdade de alguma sentença de LVF, precisamos apenas saber o valor de verdade dos componentes dela.

É isto que dá à LVF seu nome: ela é *verofuncional*.

Em muitas linguagens, há conectivos que não são verofuncionais. No Português, por exemplo, podemos formar uma nova sentença a partir de sentença mais simples, colocando na frente dela 'é necessariamente o caso que...'. O valor de verdade desta nova sentença não é fixada apenas pelo valor de verdade da sentença original. Considere, pois, duas sentenças verdadeiras:

1. $2+2=4$
2. Shostakovich escreveu quinze quartetos de cordas

Enquanto é necessariamente o caso que $2+2=4$, não é *necessariamente* o caso que Shostakovich escreveu quinze quartetos de cordas. Se Shostakovich tivesse morrido prematuramente, ele não teria terminado o Quarteto número 15; se ele tivesse vivido mais, poderia ter escrito alguns outros quartetos. Destarte, 'é necessariamente o caso que...' é um conectivo do Português, mas não é *verofuncional*.

9.2 Symbolizing versus translating

Todos os conectivos de LVF são verofuncionais, mas mais do que isso: de fato, eles não fazem nada, exceto fazer um mape entre valores de verdade.

Quando simbolizamos uma sentença ou argumento em LVF, ignoramos tudo, exceto a contribuição que os valores de verdade de um componente poderiam dar para calcular o valor de verdade da sentença toda. Existem sutilezas em nossas reivindicações cotidianas que estão além dos meros valores de verdade: sarcasmo; poesia; malícia [*snide implicature*]; ênfase. Estas são partes importantes do discurso cotidiano, mas nada disso é mantido em LVF.

Como foi observado em §5, LVF não pode capturar as diferenças sutis entre as seguintes sentenças do Português:

1. Dana é um lógico e Dana é uma pessoa legal.
2. Embora Dana seja lógico, Dana é uma pessoa legal.
3. Dana é um lógico, apesar de ser uma pessoa legal.
4. Dana é uma pessoa lega, mas também é lógico.
5. Não obstante o fato de Dana ser lógico, ele é uma pessoa legal.

Todas as sentença acima serão simbolizadas pela mesma sentença de LVF, talvez '$L \wedge N$'.

Continuaremos dizendo que usamos sentenças de LVF para *simbolizar* sentenças do Português. Muitos outros manuais falam sobre *traduzir* sentenças do Português para LVF. Todavia, uma boa tradução deveria preservar certas facetas de significado e — como acabamos de apontar — LVF não pode mesmo fazer isso.Por causa disso, falaremos de *simbolizar* sentenças do Português, em vez de *traduzi*-las.

Isto afeta como deveríamos entender nossa chave de simbolização. Considere uma chave como:

L: Dana é um lógico.
N: Dana é uma pessoa legal.

Outros manuais entenderão isto como uma estipulação de que a sentença de LVF 'L' deveria *significar* que Dana é um lógico e que a sentença de LVF 'N' deveria *significar* que Dana é uma pessoa legal. Contudo, LVF não é, de forma alguma, equipada para lidar com *significado*. A chave de simbolização precedente está fazendo nem mais nem menos do que estipular que a sentença de LVF 'L' deveria tomar o mesmo valor de verdade que a sentença do Português 'Dana é um lógico' (seja qual valor poderia ser) e que a sentença de LVF 'N' deveria tomar o mesmo valor de verdade qie a sentença do Português 'Dana é uma pessoa legal' (seja qual valor poderia ser).

Quando tratamos uma sentença de LVF como simbolizando uma sentença do Português, estamos estipulando que a sentença de LVF tem de tomar o mesmo valor de verdade que o da sentença do Português.

9.3 Condicional indicativo versus condicional subjuntivo

Queremos retornar ao ponto segundo o qual LVF pode *somente* lidar com funções de verdade, considerando o caso do condicional. Quando introduzimos a tabela de verdade característica para o condicional materia em §8, não dissemos qualquer coisa para justificá-la. Iremos oferecer agora uma justificação, que segue Dorothy Edginton[1]

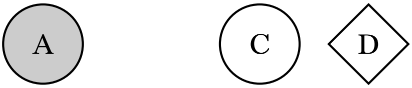
Suponha que Lara tenha desenhado algumas formas em um pedaço de papel e coloriu o interior de algumas delas. Nós não as vimos, mas, não obstante, reivindicamos:

---

[1] Dorothy Edgington, 'Conditionals', 2006, In: *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (http://plato.stanford.edu/entries/conditionals/).

> Se alguma forma é cinza, então esta forma é também circular.

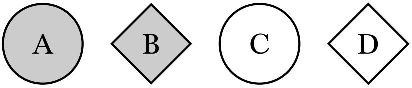
Acontece que Lara desenhou o seguinte:



Neste caso, nossa reivindicação é certamente verdadeira. As formas C e D não são cinzas e dificilmente podem ser apresentadas como *contraexemplos* a nossa reivindicação. A forma A *é* cinza, mas, felizmente, ela também é circular. Desse modo, nossa reivindicação não tem contraexemplos. Ela deve ser verdadeira. Isto significa que cada uma das seguintes *instâncias* de nossa reivindicação dever ser também verdadeiras:

- Se A é cinza, então A é circular (antecedente verdadeiro, consequente verdadeiro).
- Se C é cinza, então C é circular (antecedente falso, consequente verdadeiro).
- Se D é cinza, então D é circular (antecedente falso, consequente falso).

Entretanto, se Lara tivesse desenhado uma quarta forma, assim:



então nossa reivindicação seria falsa. Desse maneira, deve ser o caso que esta reivindicação é falsa:

- Se B é cinza, então B é circular (antecedente verdadeiro, consequente falso).

Ora, lembre-se de que todo conectivo de LVF tem de ser verofuncional. Isto significa meramente que os valores de verdade do antecedente e do consequente devem determinar unicamente o valor de verdade do condicional como um todo. Assim, a partir dos valores de verdade de nossas quatro reivindicações — que nos fornece com todas as combinações possíveis de verdade e falsidade no antecedente e no consequente —, podemos ler a tabela de verdade para o condicional material.

O que este argumento mostra é que '→' é o *melhor* candidato para o condicional verofuncional. Dizendo de outra forma, *é o melhor condicional que LVF pode fornecer.* Mas ele é bom como um substituto para os condicionais que usamos na linguagem cotidiana? Considere as duas sentenças:

1. Se Mitt Romney tivesse vencido a eleição de 2012, ele teria sido o 45^o Presidente dos Estados Unidos.
2. Se Mitt Romney tivesse vencido a eleição de 2012, então ele teria se transformado em um balão a hélio e flutuado para o céu noturno.

A sentença 1 é verdadeira; a sentença 2 é falsa, mas ambas têm os antecedentes falsos e os consequentes falsos. Assim, o valor de verdade da sentença inteira não é unicamente determinado pelo valor de verdade das partes. Não assuma livremente que você possa simbolizar adequadamente um 'se…,então…' do Português por '→' de LVF.

A questão crucial é que as sentenças 1 e 2 empregam condicionais *subjuntivos* em vez de condicionais *indicativos.* Eles nos pedem para imaginar algo contrário ao fato — Mitt Romney perdeu a eleição de 2012 — e, então, pede-nos para avaliar que *teria* acontecido neste caso. Não é possível lidar com tais considerações, usando '→'.

Diremos mais sobre as dificuldades com condicionais em §11.5. Por enquanto, contentar-nos-emos com a observação de que '→' é o único candidato para o condicional verofuncional de LVF, mas que muitos condicionais do Português não podem ser adequadamente representados , usando-se '→'. LVF é uma linguagem intrisicamente limitada.

CAPÍTULO 10

Tabelas de verdade completas

Até agora, consideramos atribuir valores de verdade às sentenças de LVF indiretamente. Por exemplo, dissemos que uma sentença de LVF tal como 'B' tem de tomar o mesmo valor de verdade que o da sentença do Português 'Big Ben está em Londres' (seja qual for o valor de verdade), mas também podemos atribuir valores de verdade *diretamente*. Podemos simplesmente estipular que 'B' tem de ser verdadeira ou estipular que ela tem de ser falsa.

> Uma VALORAÇÃO é qualquer atribuição de valores de verdade a uma letra sentencial particular de LVF.

O poder das tabelas de verdade encontra-se no seguinte. Cada linha de uma tabela de verdade representa uma valoração possível. A tabela de verdade inteira representa todas as valorações possíveis; desse modo, a tabela de verdade fornece-nos com um meio de calcular os valores de verdade de sentenças complexas em cada valoração possível. Isto é mais fácil de explicar com exemplos.

10.1 Trabalhando com um exemplo [*a worked example*]

Considere a sentença ‘$(H \land I) \rightarrow H$’. Há quatro maneiras possíveis de atribuir Verdadeiro e Falso às letras sentenciais ‘H’ e ‘I’ — quatro valorações possíveis — que podemos representar com se segue:

H	I	$(H \land I) \rightarrow H$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Para calcular o valor de verdade da sentença inteira ‘$(H \land I) \rightarrow H$’, copiamos, em primeiro lugar, os valores de verdade para as letras sentenciais e os escrevemos embaixo das letras na sentença.

H	I	$(H$	$\land$	$I)$	$\rightarrow$	H
V	V	V		V		V
V	F	V		F		V
F	V	F		V		F
F	F	F		F		F

Considere agora a subsentença ‘$(H \land I)$’. Isto é uma conjunção $(\mathscr{A} \land \mathscr{B})$, onde ‘$H$’ substitui $\mathscr{A}$ e ‘I’ substitui $\mathscr{B}$. A tabela de verdade característica para a conjunção dá as condições de verdade para *qualquer* sentença da forma $(\mathscr{A} \land \mathscr{B})$, independente do que poderiam ser $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$. A tabela representa o ponto no qual uma conjunção é verdadeira sse ambos conjunctos são verdadeiros. Neste caso, nossos conjunctos são exatamente ‘H’ and ‘I’. Eles são ambos verdadeiros na primeira linha da tabela de verdade (e somente nela). De acordo com isso, podemos calcular o valor de verdade da conjunção em todas as quatro linhas.

		$\mathscr{A}$	$\land$	$\mathscr{B}$		
H	I	$(H$	$\land$	$I)$	$\rightarrow$	H
V	V	V	V	V		V
V	F	V	F	F		V
F	V	F	F	V		F
F	F	F	F	F		F

Agora, a sentença inteira com a qual estamos lidando é um condicional $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, onde '$(H \wedge I)$' substitui $\mathscr{A}$ e 'H' substitui $\mathscr{B}$. Na segunda linha, por exemplo, '$(H \wedge I)$' é falsa e 'H' é verdadeira. Uma vez que o condicional é verdadeiro quando o antecedente é falso, escrevemos um 'V' na segunda linha embaixo do símbolo do condicional. Continuando para as outras três linhas, obtemos:

		$\mathscr{A}$	$\to$	$\mathscr{B}$
H	I	$(H \wedge I)$	$\to$	H
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

O condicional é o operador lógico principal da sentença, assim a coluna de 'V's embaixo do condicional nos diz que a sentença '$(H \wedge I) \to H$' é verdadeira, independentemente dos valores de verdade de 'H' e 'I'. Elas podem ser verdadeiras ou falsas em qualquer combinação e a sentença composta ainda continuará verdadeira. Uma vez que consideramos todas as quatro possíveis atrinuições de verdade e falsidade a 'H' e 'I' — ou seja, uma vez que consideramos todas as diferentes valorações —, podemos dizer que '$(H \wedge I) \to H$' é verdadeira em qualquer valoração. Neste exemplo, não repetimos todas as entradas em qualquer coluna em qualquer tabela sucessiva. Na realidade, entretanto, quando escrevemos tabelas de verdade no papel, não é prático apagar colunas inteiras ou reescrever a tabela inteira a cada passo. Embora fique mais volumosa, a tabela de verdade pode ser escrita da seguinte maneira:

H	I	$(H$	$\wedge$	$I)$	$\to$	H
V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	V	F	F	**V**	V
F	V	F	F	V	**V**	F
F	F	F	F	F	**V**	F

Muitas das colunas embaixo da sentença estão lá apenas para propósitos de contabilidade [*for bookkeeping purposes*]. A coluna que mais importa é a coluna debaixo do *operador lógico principal* da sentença, uma vez que isto lhe diz o valor de verdade da sentença inteira. Enfatizamos isso, colocando esta coluna em negrito. Quando você for trabalhar com as tabelas de verdade por conta própria, você deveria, da mesma maneira, enfatizar (talvez colorindo para realçar).

10.2 Construindo tabelas de verdade completas

Uma TABELA DE VERDADE COMPLETA tem uma linha para qualquer atribuição possível de Verdadeiro e Falso às letras sentenciais relevantes. Cada linha representa uma *valoração* e a tabela de verdade completa tem uma linha para todas as valorações diferentes.

O tamanho da tabela de verdade completa depende do número das diferentes letras sentenciais na tabela. Uma sentença que contém apenas uma letra sentencial exige apenas duas linhas como na tabela de verdade característica para negação. Isto é verdadeiro mesmo se a mesma letra é repetida várias vezes, como na sentença ‘$[(C \leftrightarrow C) \rightarrow C] \wedge \neg(C \rightarrow C)$’. A tabela de verdade completa exige somente duas linhas, porque há apenas duas possibilidades: ‘C’ pode ser verdadeira ou pode ser falsa. A tabela de verdade para esta sentença é da seguinte forma:

C	$[(C$	$\leftrightarrow$	$C)$	$\rightarrow$	$C]$	$\wedge$	$\neg$	$(C$	$\rightarrow$	$C)$
V	V	V	V	V	V	**F**	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	**F**	F	F	V	F

Olhando para coluna embaixo do operador lógico principal, vemos que a sentença é falsa em ambas as linhas da tabela; ou seja, a sentença é falsa, independemente de se ‘C’ é verdadeiro ou falso. Ela é falsa em qualquer valoração.

A sentença que contém duas letras sentenciais exige quatro linhas para uma tabela de verdade completa como nas tabelas de verdade características para os quatro conectivos binários e como na tabela de verdade completa para ‘$(H \wedge I) \rightarrow H$’.

Uma sentença que contém três letras sentenciais exige oito linhas

M	N	P	$M \wedge (N \vee P)$
V	V	V	V **V** V V V
V	V	F	V **V** V V F
V	F	V	V **V** F V V
V	F	F	V **F** F F F
F	V	V	F **F** V V V
F	V	F	F **F** V V F
F	F	V	F **F** F V V
F	F	F	F **F** F F F

A partir desta tabela, sabemos que a sentença '$M \wedge (N \vee P)$' pode ser verdadeira ou falsa, dependendo dos valores de verdade de 'M', 'N' e 'P'.

Uma tabela de verdade completa para uma sentença que contém quatro diferentes letras sentenciais exige 16 linhas. Cinco letras, 32 linhas. Seis letras, 64 linhas e assim por diante. Sendo completamente geral: se uma tabela de verdade tem n diferentes letras sentenciais, então devem existir 2^n linhas.

Com o intuito de preencher as colunas de uma tabela de verdade completa, comece com a letra sentencial mais à direita e alterne 'V' e 'F'. Na próxima coluna à esquerda, escreve dois 'V's e escreva escreva dois 'F's e repita o procedimento. Para a terceira letra sentencial, escreva quatro 'V's seguidos por quatro 'F's. Isto produz uma tabela de verdade com oito linhas como a de cima. Para uma tabela com 16 linhas, a coluna a seguir de letras sentenciais deveriam ter oitos 'V's seguidos por oito 'F's. Para uma tabela com 32 linhas, a coluna a seguir teria 16 'V's seguidos por 16 'F's e assim por diante.

10.3 Mais sobre parênteses

Considere estas duas sentenças:

$$((A \wedge B) \wedge C)$$
$$(A \wedge (B \wedge C))$$

Estas são verofuncionalmente equivalentes. Consequentemente, nunca fará qualquer diferença da perspectiva do valor de verdade — que é tudo que importa para LVF (veja §9) — qual das duas sentenças afirmamos (ou negamos). Ainda que a ordem dos parênteses não importa no que diz respeito à verdade delas. não deveríamos excluí-los. A expressão

$$A \wedge B \wedge C$$

é ambígua entre as duas sentenças acima. A mesma observação vale para disjunções. As seguintes sentenças são logicamente equivalentes:

$$((A \vee B) \vee C)$$
$$(A \vee (B \vee C))$$

Mas não deveríamos simplesmente escrever:

$$A \vee B \vee C$$

Na realidade, isso é um fato específico sobre a tabela de verdade característica de $\vee$ e $\wedge$ que garante que quaisquer duas conjunções (ou disjunções) contendo as mesmas sentenças são verofuncionalmente equivalentes, independentemente de como você coloca os parênteses. *Isto é apenas verdadeiro de conjunções e disjunções*, entretanto. As seguintes duas sentenças têm *diferentes* tabelas de verdade:

$$((A \rightarrow B) \rightarrow C)$$
$$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

Desse modo, se escrevêssemos:

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

ela seria perigosamente ambígua. Excluir os parênteses seria desastroso. Similarmente, estas sentenças têm diferentes tabelas de verdade:

$$((A \vee B) \wedge C)$$
$$(A \vee (B \wedge C))$$

Assim, se escrevêssemos:

$$A \vee B \wedge C$$

isso seria perigosamente ambíguo. *Nunca escreva isto.* A moral é: nunca exclua os parênteses (exceto os mais externos).

Exercícios Práticos

A. Apresente as tabelas de verdade completas para cada uma das seguintes sentenças:

1. $A \rightarrow A$
2. $C \rightarrow \neg C$
3. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow \neg B)$
4. $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
5. $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee A)$
6. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
7. $\big[(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)\big] \wedge C$
8. $[(A \wedge B) \wedge C] \rightarrow B$
9. $\neg\big[(C \vee A) \vee B\big]$

B. Cheque todas as reivindicações que foram feitas na introdução das novas convenções de notação em §10.3, ou seja, mostre que:

1. ‘$((A \wedge B) \wedge C)$’ and ‘$(A \wedge (B \wedge C))$’ têm a mesma tabela de verdade
2. ‘$((A \vee B) \vee C)$’ and ‘$(A \vee (B \vee C))$’ têm a mesma tabela de verdade
3. ‘$((A \vee B) \wedge C)$’ and ‘$(A \vee (B \wedge C))$’ não têm a mesma tabela de verdade
4. ‘$((A \rightarrow B) \rightarrow C)$’ and ‘$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$’ não têm a mesma tabela de verdade

Cheque também se:

5. ‘$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$’ and ‘$(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$’ têm a mesma tabela de verdade

C. Escreva as tabelas de verdade completas das seguintes sentenças e marque a coluna que representa os valores de verdade possíveis da sentença inteira.

1. $\neg(S \leftrightarrow (P \rightarrow S))$
2. $\neg[(X \wedge Y) \vee (X \vee Y)]$
3. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \leftrightarrow \neg A)$
4. $[C \leftrightarrow (D \vee E)] \wedge \neg C$
5. $\neg(G \wedge (B \wedge H)) \leftrightarrow (G \vee (B \vee H))$

D. Escreva as tabelas de verdade completas das seguintes sentenças e marque a coluna que representa os valores de verdade possíveis da sentença inteira.

1. $(D \wedge \neg D) \rightarrow G$
2. $(\neg P \vee \neg M) \leftrightarrow M$
3. $\neg\neg(\neg A \wedge \neg B)$
4. $[(D \wedge R) \rightarrow I] \rightarrow \neg(D \vee R)$
5. $\neg[(D \leftrightarrow O) \leftrightarrow A] \rightarrow (\neg D \wedge O)$

CAPÍTULO 11

Conceitos semânticos

Nos capítulos anteriores, introduzimos a ideia de valoração e mostramos como determinar o valor de verdade de qualquer sentença de LVF em qualquer valoração, usando a tabela de verdade. Neste capítulo, introduziremos algumas ideias relacionadas e mostraremos como usar as tabelas de verdade para testar se estas ideias se aplicam ou não.

11.1 Tautologies and contradictions

Em §3, explicamos *verdade necessária* e *falsidade necessária*. Ambas noções têm representantes em LVF. Começaremos com um representante para verdade necessária.

> $\mathscr{A}$ é uma TAUTOLOGIA (em LVF) sse ela é verdadeira em qualquer valoração.

Podemos determinar se uma sentença é uma tautologia, usando apenas tabelas de verdade. Se a sentença é verdadeira em qualquer linha de uma tabela de verdade completa, então ela é verdadeira em qualquer valoração e, desse modo, ela é uma tautologia. No exemplo de §10, the sentence is true on every line of a complete truth table, then it is true on every valuation, so it is a tautology. In the example of §10, ‘$(H \land I) \to H$’ é uma tautologia.

Entretanto, isto é somente um representante para verdade necessária. Há algumas verdades necessárias que não podem ser adequadamente simbolizadas em LVF. Um exemplo é ‘$2 + 2 = 4$’. Isto *deve* ser verdadeiro, mas se tentarmos simbolizá-lo em LVF, o melhor que podemos oferecer é uma letra sentencial e nenhuma letra sentencial é uma tautologia. Ainda assim, se pudermos adequadamente simbolizar algumas sentenças do Português usando sentenças de LVF que é uma tautologia, então esta sentença do Português expressa uma verdade necessária.

Temos um representante similar para falsidade necessária:

> $\mathscr{A}$ é uma **contradição** (em LVF) sse ela é falsa em qualquer valoração.

Podemos determinar se uma sentença é uma contradição usando apenas tabelas de verdade. Se uma sentença é falsa em qualquer linha de uma tabela de verdade completa, então ela é falsa em qualquer valoração e, desse modo, ela é uma contradição. No exemplo de §10, ‘$[(C \leftrightarrow C) \rightarrow C] \wedge \neg(C \rightarrow C)$’ é uma contradição.

11.2 Equivalência

Aqui está uma noção similar útil:

> $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são **equivalentes** (em LVF) sse, para qualquer valoração, os valores de verdade delas coincidem, ou seja, se não há naloração na qual elas tê valores de verdade opostos.

Na realidade, já usamos esta noção em §10.3; o ponto era que ‘$(A \wedge B) \wedge C$’ e ‘$A \wedge (B \wedge C)$’ são equivalentes. Novamente, é fácil fazer um teste para equivalência usando tabelas de verdade. Considere as sentenças ‘$\neg(P \vee Q)$’ e ‘$\neg P \wedge \neg Q$’. Elas são equivalentes? Para descobrir isso, construímos uma tabela de verdade.

P	Q	$\neg\,(P \vee Q)$	$\neg\,P \wedge \neg\,Q$
V	V	**F** V V V	F V **F** F V
V	F	**F** V V F	F V **F** V F
F	V	**F** F V V	V F **F** F V
F	F	**V** F F F	V F **V** V F

Olhe para as colunas dos operadores lógicos principais; a negação para primeira sentença, conjunção para a segunda. Na primeiras três linhas, ambas sentenças são falsas. Na linha final, ambas são verdadeiras. Uma vez que elas coicidem em cada linha, as suas sentenças são equivalentes.

11.3 Satisfatibilidade

Em §3, disemos que sentenças são conjuntamente possíveis sse é possível que todas elas sejam verdadeiras ao mesmo tempo. Podemos oferecer um representante para esta noção também:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ são CONJUNTAMENTE SATISFATV́EIS (em LVF) sse há alguma valoração que as faz todas verdadeiras.

De forma derivada, sentenças são CONJUNTAMENTE INSASTÍFAVEIS se não há nenhuma valoração que as faz todas verdadeiras. Novamente, é fácil fazer um teste para satisfatibilidade conjunta usando tabelas de verdade.

11.4 Acarretamento e validade

A seguinte idea é intimamente relacionada àquela de satisfatibilidade conjunta:

> As sentenças $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ ACARRETAM (em LVF) a sentença $\mathscr{C}$ se não existir uma valoração das letras sentenciais que torne todas as sentenças $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ verdadeiras e $\mathscr{C}$ falsa.

Novamente, é fácil fazer um teste para isto com uma tabela de verdade. Para checar se '$\neg L \rightarrow (J \vee L)$' e '$\neg L$' acarretam '$J$', basta simplesmente checar se há alguma valoração que faça ambos '$\neg L \rightarrow (J \vee L)$' e '$\neg L$' verdadeiras, enquanto faça 'J' falsa. Desse modo, usamos a tabela de verdade:

J	L	$\neg L \to (J \lor L)$	$\neg L$	J
V	V	F V **V** V V V	**F** V	**V**
V	F	V F **V** V V F	**V** F	**V**
F	V	F V **V** F V V	**F** V	**F**
F	F	V F **F** F F F	**V** F	**F**

A única linha na qual ambas '$\neg L \to (J \lor L)$' e '$\neg L$' são verdadeiras é a segunda linha. Mas, nesta linha, 'J' também é verdadeira. Assim, '$\neg L \to (J \lor L)$' e '$\neg L$' acarretam 'J'.

Fazemos agora uma observação importante:

> Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ acarretam $\mathscr{C}$ em LVF, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ é válido.

Aqui está o motivo. Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ acarretam $\mathscr{C}$, então não há valoração que faça todas [sentenças] $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ verdadeiras e também faça $\mathscr{C}$ falsa. Qualquer caso no qual todas [as sentenças] $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ são verdadeiras e $\mathscr{C}$ é falsa geraria uma valoração com esta propriedade: tome o valor de verdade de qualquer letra sentencial como sendo apenas o valor de verdade da sentença correspondente nesse caso. Uma vez que não há tal valoração, não há caso no qual todas [sentenças] $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ são verdadeiras e $\mathscr{C}$ é falsa. Mas isto é justamente o que faz com que um argumento com premissas $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ e conclusão $\mathscr{C}$ seja válido.

Resumindo, temos uma maneira de testar a validade de argumentos do Português. Em primeiro lugar, os argumentos são simbolizados em LVF, tendo premissas $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ e conclusão $\mathscr{C}$. Então testamos acarretamento em LVF, usando tabelas de verdade.

11.5 Os limites destes teste

Atingimos um marco importante: um teste para validade de argumentos! Contudo, não deveríamos ficar tão entusiasmados ainda. É importante entender os *limites* de nossa conquista. Ilustraremos estes limites com três exemplos.

Em primeiro lugar, considere o argumento:

1. Daisy tem quatro pernas. Portanto, Daisy tem mais de duas pernas.

Para simbolizar este argumento em LVF, teríamos de usar duas letras sentenciais diferentes — talvez 'F' e 'T' — para premissa e conclusão, respectivamente. Agora, é óbvio que 'F' não acarreta 'T'. O argumento do Português parece seguramente válido, não obstante!

Em segundo lugar, considere a sentença:

2. Jan é nem calvo nem não-calvo.

Para simbolizar esta sentença em LVF, ofereceríamos algo como '$\neg J \wedge \neg\neg J$'. Isto é uma contradição (cheque isto com uma tabela de verdade), mas a sentença 2 não se parece com uma contradição; pois, poderíamos alegremente ter adicionado 'Jan está na fronteira da calvície'!

Em terceiro lugar, considere a seguinte sentença:

3. Não é o caso que se Deus existe, ele responde a orações malévolas

Simbolizando isto em LVF, ofereceríamos algo como '$\neg(G \rightarrow M)$'. Ora, '$\neg(G \rightarrow M)$' acarreta 'G' (novamente, cheque isto com tabela de verdade). Assim, se simbolizarmos a sentença 3 em LVF, ela parece implicar que Deus existe. Mas isto é estranho: certamente, até mesmo um ateu pode aceitar a sentença 3 sem se contradizer.

Uma lição disto é que a simbolização de 3 como '$\neg(G \rightarrow M)$' mostra que V não expressa o que temos em mente. Talvez deveríamos parafraseá-la como

3. Se Deus existe, ele não responde a orações malévolas

e simbolizar 3 como '$G \rightarrow \neg M$'. Agora, se os ateus estiverem corretos e não há Deus, então 'G' é falsa e, assim, '$G \rightarrow \neg M$' é verdadeira e o quebra-cabeça desaparece. Todavia, se 'G' é falsa, então '$G \rightarrow M$', ou seja, 'Se Deus existe, ele responde a orações malévolas' é *também* verdadeira!

De formas distintas, estes três exemplos realçam alguns dos limites de se trabalhar com uma linguagem (como LVF) que pode *somente* lidar com conectivos verofuncionais. Além disso, estes limites dão origem a algumas questões interessantes em lógica filosófica. O caso da calvície de Jan (ou não) levanta a questão geral de qual lógica deveríamos usar quando lidamos com discurso *vago*. O caso do ateu levanta a questão de como lidar com (os então chamados) *paradoxos* *do condicional material.* Parte do propósito deste curso é lhe dar as ferramentas necessárias para explorar estas questões da *lógica filosófica*. Mas temos que andar, antes de podermos correr. Temos de nos tornar proficientes no uso de LVF, antes de podermos discutir adequadamente seus limites e considerar alternativas.

11.6 A dupla catraca

Iremos usar a noção de acarretamento muitas vezes neste livro. Ajudar-nos-á, então, introduzir um símbolo que a abrevie. Em vez de dizer que as sentenças de LVF $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots$ and $\mathscr{A}_n$ juntas acarretam $\mathscr{C}$, abreviaremos isto por:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{C}$$

O símbolo '$\vDash$' é conhecido por *dupla catraca*, uma vez que se parece com uma catraca com duas barras horizontais.

Vamos esclarecer o seguinte: '$\vDash$' não é um símbolo de LVF. Em vez disso, é um símbolo de nossa metalinguagem, Português estendido (lembre-se da diferença entre linguagem objeto e metalinguagem mencionada em §7). Assim, a sentença metalinguística:

- $P, P \rightarrow Q \vDash Q$

é somente uma abreviação para a sentença do Português:

- As sentenças de LVF 'P' e '$P \rightarrow Q$' acarretam 'Q'

Note que não há limite no números de sentenças de LVF que podem ser mencionadas antes do símbolo '$\vDash$'. De fato, podemos até mesmo considerar o caso limite:

$$\vDash \mathscr{C}$$

Isto diz que não há valoração que faça todas as sentenças mencionadas à esquerda de '$\vDash$' verdadeiras, enquanto faça $\mathscr{C}$ falsa. Uma vez que nenhuma sentença é mencionada à esquerda de '$\vDash$' neste caso, isto significa justamente que não há valoração que faça $\mathscr{C}$ falsa. Dizendo de outra forma, é dito que qualquer valoração faz $\mathscr{C}$ verdadeiro. Ainda falando de outra forma, significa que $\mathscr{C}$ é uma tautologia. Similarmente:

Otherwise put, it says that every valuation makes $\mathscr{C}$ true. Otherwise put, it says that $\mathscr{C}$ is a tautology. Equally:

$$\mathscr{A} \vDash$$

diz que $\mathscr{A}$ é uma contradição.

11.7 ‘$\vDash$’ versus ‘$\rightarrow$’

Queremos comparar e constratar ‘$\vDash$’ e ‘$\rightarrow$’.

Observação: $\mathscr{A} \vDash \mathscr{C}$ sse não há valoração das letras sentenciais que faça $\mathscr{A}$ verdadeira e $\mathscr{C}$ falsa.

Observação: $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}$ é uma tautologia sse não existe valoração das letras sentenciais que faça $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}$ falsa. Uma vez que o condicional é verdadeiro exceto quando seu antecedente é verdaeiro e seu consequente, falso, $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}$ é uma tautologia sse não há valoração que faça $\mathscr{A}$ verdadeira e $\mathscr{C}$ falsa. Combinando estas duas observações, vemos que $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}$ é uma tautologia sse $\mathscr{A} \vDash \mathscr{C}$. Mas há, de fato, uma importante diferença entre ‘$\vDash$’ e ‘$\rightarrow$’:

$\rightarrow$’ é um conectivo sentencial de LVF.
‘$\vDash$’ é um símbolo do Português estendido.

De fato, quando ‘$\rightarrow$’ é colocado entre duas sentenças de LVF, o resultado é uma sentença de LVF mais longa. Por outro lado, quando usamos ‘$\vDash$’, formamos uma sentença metalinguística que *menciona* sentenças de LVF.

Exercícios Práticos

A. Volte para suas respostas aos exercícios em §10**A**. Determine quais eram tautologias, quais eram contradições e quais eram nem tautologias nem contradições.

B. Use tabelas de verdade para determinar se estas sentenças são conjuntamente satisfatíveis ou são conjuntamente insatisfatíveis:

1. $A \rightarrow A, \neg A \rightarrow \neg A, A \wedge A, A \vee A$
2. $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C$

3. $B \wedge (C \vee A), A \rightarrow B, \neg(B \vee C)$
4. $A \leftrightarrow (B \vee C), C \rightarrow \neg A, A \rightarrow \neg B$

C. Use tabelas de verdade para determinar se cada argumento é válido ou inválido.

1. $A \rightarrow A \therefore A$
2. $A \rightarrow (A \wedge \neg A) \therefore \neg A$
3. $A \vee (B \rightarrow A) \therefore \neg A \rightarrow \neg B$
4. $A \vee B, B \vee C, \neg A \therefore B \wedge C$
5. $(B \wedge A) \rightarrow C, (C \wedge A) \rightarrow B \therefore (C \wedge B) \rightarrow A$

D. Determine se cada sentença é uma tautologia, uma contradição ou uma sentença contingente, usando tabela de verdade completa.

1. $\neg B \wedge B$
2. $\neg D \vee D$
3. $(A \wedge B) \vee (B \wedge A)$
4. $\neg[A \rightarrow (B \rightarrow A)]$
5. $A \leftrightarrow [A \rightarrow (B \wedge \neg B)]$
6. $[(A \wedge B) \leftrightarrow B] \rightarrow (A \rightarrow B)$

E. Determine se cada uma das sentenças seguintes são logicamente equivalentes, usando tabela de verdade completas. Se duas sentenças forem logicamente "equivalentes", escreva equivalente. Caso contrário, escreva "não equivalentes"

1. A and $\neg A$
2. $A \wedge \neg A$ and $\neg B \leftrightarrow B$
3. $[(A \vee B) \vee C]$ and $[A \vee (B \vee C)]$
4. $A \vee (B \wedge C)$ and $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
5. $[A \wedge (A \vee B)] \rightarrow B$ and $A \rightarrow B$

F. Determine se cada uma das sentenças seguintes são logicamente equivalentes, usando tabela de verdade completas. Se duas sentenças forem logicamente "equivalentes", escreva equivalente. Caso contrário, escreva "não equivalentes"

1. $A \rightarrow A$ and $A \leftrightarrow A$
2. $\neg(A \rightarrow B)$ and $\neg A \rightarrow \neg B$
3. $A \vee B$ and $\neg A \rightarrow B$

4. $(A \to B) \to C$ and $A \to (B \to C)$
5. $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ and $A \wedge (B \wedge C)$

G. Determine se cada coleção de sentenças é conjuntamente satisfatíveis ou conjuntamente insatisfatíveis, usando tabela de verdade completa.

1. $A \wedge \neg B$, $\neg(A \to B)$, $B \to A$
2. $A \vee B$, $A \to \neg A$, $B \to \neg B$
3. $\neg(\neg A \vee B)$, $A \to \neg C$, $A \to (B \to C)$
4. $A \to B$, $A \wedge \neg B$
5. $A \to (B \to C)$, $(A \to B) \to C$, $A \to C$

H. Determine se cada coleção de sentenças é conjuntamente satisfatíveis ou conjuntamente insatisfatíveis, usando tabela de verdade completa.

1. $\neg B$, $A \to B$, A
2. $\neg(A \vee B)$, $A \leftrightarrow B$, $B \to A$
3. $A \vee B$, $\neg B$, $\neg B \to \neg A$
4. $A \leftrightarrow B$, $\neg B \vee \neg A$, $A \to B$
5. $(A \vee B) \vee C$, $\neg A \vee \neg B$, $\neg C \vee \neg B$

I. Determine se cada argumento é válido ou inválido, usando tabela de verdade completa.

1. $A \to B, B \therefore A$
2. $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \therefore A \leftrightarrow C$
3. $A \to B, A \to C \therefore B \to C$
4. $A \to B, B \to A \therefore A \leftrightarrow B$

J. Determine se cada argumento é válido ou inválido, usando tabela de verdade completa.

1. $A \vee \big[A \to (A \leftrightarrow A)\big] \therefore A$
2. $A \vee B, B \vee C, \neg B \therefore A \wedge C$
3. $A \to B, \neg A \therefore \neg B$
4. $A, B \therefore \neg(A \to \neg B)$
5. $\neg(A \wedge B), A \vee B, A \leftrightarrow B \therefore C$

K. Responda cada uma das questões abaixo e justifique sua resposta.

1. Suponha que $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são logicamente equivalentes. O que podemos dizer sobre $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$?
2. Suponha que $(\mathscr{A} \land \mathscr{B}) \to \mathscr{C}$ é nem tautologia nem contradição. $\mathscr{A}, \mathscr{B} \therefore \mathscr{C}$ é válido?
3. Suponha que $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ são conjuntamente insatisfatíveis. O que podemos dizer sobre $(\mathscr{A} \land \mathscr{B} \land \mathscr{C})$?
4. Suponha que $\mathscr{A}$ é uma contradição. O que podemos dizer sobre se $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vDash \mathscr{C}$?
5. Suponha que $\mathscr{C}$ é uma tautologia. O que podemos dizer sobre se $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vDash \mathscr{C}$?
6. Suponha que $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são logicamente equivalentes. O que podemos dizer sobre $(\mathscr{A} \lor \mathscr{B})$?
7. Suponha que $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ ***não*** são logicamente equivalentes. O que podemos dizer sobre $(\mathscr{A} \lor \mathscr{B})$?

L. Considere o seguinte princípio:

- Suponha que $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são logicamente equivalentes. Suponha que um argumento contém $\mathscr{A}$ (ou como premissa ou como conclusão). A validade do argumento não seria afetada, se substituíssemos $\mathscr{A}$ por $\mathscr{B}$.

Este princípio é correto? Explique sua resposta.

CAPÍTULO 12

Atalhos na tabela de verdade

Com a prática, rapidamente você torna-se-á apto a preencher as tabelas de verdade. Neste capítulo, queremos apresentar atalhos permitidos que o ajudrão ao longo do percurso.

12.1 Trabalhando com tabelas de verdade

Vovê descobrirá rapidamente que você não precisa copiar os valores de verdade de cada sentença, mas pode simplesmente se referir a eles [*but can simply refer back to them.*]. Assim, podemos acelerar as coisas escrevendo:

P	Q	$(P \lor Q)$	$\leftrightarrow$	$\neg P$
V	V	V	**F**	F
V	F	V	**F**	F
F	V	V	**V**	V
F	F	F	**F**	V

Certamente, você sabe também que a disjunção é verdadeira, sempre que um dos disjuntos é verdadeiro. Assim, se você encontra um disjunto verdadeiro, não há necessidade de considerar os valores de verdade dos outros disjuntos. Assim, você poderia oferecer:

P	Q	$(\neg$	P	$\vee$	$\neg$	$Q)$	$\vee$	$\neg$	P
V	V	F		F	F		**F**	F	
V	F	F		V	V		**V**	F	
F	V						**V**	V	
F	F						**V**	V	

Similarmente, com certeza, sabemos que uma conjunção é falsa, sempre que um dos conjunctos é falso. Desse modo, se você encontra um conjuncto falso, não há necessidade de considerar o valor de verdade dos outros conjunctos.

P	Q	$\neg$	$(P$	$\wedge$	$\neg$	$Q)$	$\wedge$	$\neg$	P
V	V						**F**	F	
V	F						**F**	F	
F	V	V		F			**V**	V	
F	F	V		F			**V**	V	

Um atalho similar está disponível para condicionais. Você sabe imediatamente que um condicional é verdadeiro se o consequente é verdadeiro ou o antecedente é falso. Desse modo, poderíamos apresentar:

P	Q	$((P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\rightarrow$	$P)$	$\rightarrow$	P
V	V						**V**	
V	F						**V**	
F	V		V		F		**V**	
F	F		V		F		**V**	

Logo, ‘$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$’ é uma tautologia. De fato, é uma instância da *Lei de Peirce*, nomeada assim por causa de Charles Sanders Peirce.

12.2 Teste para validade e acarretamento

Quando usamos tabelas de verdade para testar validade e acarretamento, estamos checando as linhas *ruins*: as linhas onde as premissas são todas verdadeiras e a conclusão falsa. Note:

- Qualquer linha onde a conclusão é verdadeira não é uma linha ruim.

- Qualquer linha onde alguma premissa é falsa não é uma linha ruim.

Uma vez que *tudo* que estamos fazendo é procurar pelas linhas ruins, deveríamos ter em mente o seguinte: se você encontra uma linha ode a conclusão é verdadeira, não precisamos avaliar qualquer outra coisa nesta linha. Esta linha não é definitivamente ruim. Da mesma forma, se encontramos um linha onde alguma premissa é falsa, não precisamos avaliar qualquer outra coisa nesta linha.

Com isto em mente, considere agora como poderíamos testar a validade do sehuinte argumento:

$$\neg L \to (J \vee L), \neg L \therefore J$$

A *primeira* coisa que deveríamos fazer é avaliar a conclusão. Se encontramos que a conclusão é *verdadeira* em alguma linha, então esta linha não é ruim. Desse modo, podemos simplesmente ignorar o resta da linha. Assim, em nosso primeiro estágio, temos algo parecido com:

J	L	$\neg L \to (J \vee L)$	$\neg L$	J
V	V			V
V	F			V
F	V	?	?	F
F	F	?	?	F

onde os lugares em branco indicam que não precisamos se preocupar com mais investigações (uma vez que a linha não é ruim) e as interrogações indicam que precisamos continuar investigando.

A premissa mais fácil de avaliar é a segunda, desse modo, a seguir, fazemos isto:

J	L	$\neg L \to (J \vee L)$	$\neg L$	J
V	V			V
V	F			V
F	V		F	F
F	F	?	V	F

Perceba que não precisamos mais considerar a terceira linha da tabela: ela não será uma linha ruim, porque (pelo menos) uma das premissas é falsa nesta linha. Por fim, completamos a tabela de verdade:

J	L	$\neg L \rightarrow (J \vee L)$	$\neg L$	J
V	V			V
V	F			V
F	V		F	F
F	F	V **F** F	V	F

A tabela de verdade não tem linhas ruins, portanto o argumento é válido (qualquer valoração em que as premissas são verdadeiras é uma valoração em que a conclusão é verdadeira).

Vale a pena ilustrar a tática novamente. Vamos checar se o seguinte argumento é válido

$$A \vee B, \neg(A \wedge C), \neg(B \wedge \neg D) \therefore (\neg C \vee D)$$

No primeiro estágio, determinamos o valor de verdade da conclusão. Uma vez que ela é uma disjução, ela é verdadeira sempre que um dos disjuntos é verdadeiro, assim podemos acelerar um pouco as coisas. Podemos, então, ignorar qualquer linha, exceto aquelas poucos onde a conclusão é falsa.

A	B	C	D	$A \vee B$	$\neg(A \wedge C)$	$\neg(B \wedge \neg D)$	$(\neg C \vee D)$
V	V	V	V				**V**
V	V	V	F	?	?	?	F **F**
V	V	F	V				**V**
V	V	F	F				V **V**
V	F	V	V				**V**
V	F	V	F	?	?	?	F **F**
V	F	F	V				**V**
V	F	F	F				V **V**
F	V	V	V				**V**
F	V	V	F	?	?	?	F **F**
F	V	F	V				**V**
F	V	F	F				V **V**
F	F	V	V				**V**
F	F	V	F	?	?	?	F **F**
F	F	F	V				**V**
F	F	F	F				V **V**

Agora devemos avaliar as premissas. Usamos os atalhos onde é possível:

A	B	C	D	$A \vee B$	$\neg (A \wedge C)$	$\neg (B \wedge \neg D)$	$(\neg C \vee D)$
V	V	V	V				**V**
V	V	V	F	**V**	**F** V		F **F**
V	V	F	V				**V**
V	V	F	F				V **V**
V	F	V	V				**V**
V	F	V	F	**V**	**F** V		F **F**
V	F	F	V				**V**
V	F	F	F				V **V**
F	V	V	V				**V**
F	V	V	F	**V**	**V** F	**F** VV	F **F**
F	V	F	V				**V**
F	V	F	F				V **V**
F	F	V	V				**V**
F	F	V	F	**F**			F **F**
F	F	F	V				**V**
F	F	F	F				V **V**

Se não tivéssemos usado atalhos, teríamos de escrever 256 'V's ou 'F's nesta tabela. Usando atalhos, tivêmos de escrever apenas 37. Economizamos *muito* trabalho. Estivemos discutindo atalhos para testar validade lógica, mas eaxatamente os mesmos atalhos podem ser usados para testar acarretamento. Empregando a noção similar de linhas *ruins*, podemos economizar um enorme trabalho.

Exercícios Práticos

A. Usando atalhos, determine se cada sentença é uma tautologia, uma contradição ou nenhuma das duas.

1. $\neg B \wedge B$
2. $\neg D \vee D$
3. $(A \wedge B) \vee (B \wedge A)$
4. $\neg[A \rightarrow (B \rightarrow A)]$
5. $A \leftrightarrow [A \rightarrow (B \wedge \neg B)]$
6. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow A$
7. $A \rightarrow (B \vee C)$
8. $(A \wedge \neg A) \rightarrow (B \vee C)$
9. $(B \wedge D) \leftrightarrow [A \leftrightarrow (A \vee C)]$

CAPÍTULO 13

Tabelas de verdade parciais

Às vezes, não precisamos saber o que acontece em qualquer linha da tabela de verdade. Às vezes, uma linha ou duas sjá são suficientes.

Tautologia. A fim de mostrar que uma sentença é uma tautologia, precisamos mostrar que ela é verdadeira em qualquer valoração. Ou seja, precisamos saber que ela é verdadeira em qualquer linha da tabela de verdade. Assim, necessitamos de uma tabela de verdade completa.

Para mostrar, entretanto, que uma sentença *não* é uma tautologia, só precisamos mostrar uma linha: uma linha na qual a sentença é falsa. Portanto, a fim de mostrar que alguma sentença não é uma tautologia, é suficiente fornecer uma única valoração — uma única linha da tabela de verdade — que faça a sentença falsa.

Suponha que queremos mostrar que a sentença '$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$' *não* é uma tautologia. Estabelecemos uma TABELA DE VERDADE PARCIAL

S	T	U	W	$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$
				F

Deixamos espaço paenas para uma linha em vez de 16, porque estamos somente procurando por uma linha na qual a sentença é falsa. Por esta mesma razão, colocamos ‘F’ para sentença inteira.

O conectivo lógico principal da sentença é um condicional. Para o condicional ser falso, o antecedente dever ser verdadeiro e o consequente deve ser falso. Coloque estes valores na tabela:

S	T	U	W	$(U$	$\wedge$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\wedge$	$W)$
					V		**F**		F	

Para ‘$(U \wedge T)$’ ser verdadeira, tanto ‘U’ como ‘T’ devem ser verdadeiras.

S	T	U	W	$(U$	$\wedge$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\wedge$	$W)$
	V	V		V	V	V	**F**		F	

Agora, precisamos apenas tornar ‘$(S \wedge W)$’ falsa. Para fazer isto, precisamos tornar pelo menos uma das sentenças ‘S’ e ‘W’ falsa. Podemos fazer tanto ‘S’ como ‘W’ falsas, se quisermos. Tudo que importa é que a sentença inteira se torne falsa nesta linha. Tomando-se uma decisão arbitrária, teminamos a tabelas da seguinte forma:

S	T	U	W	$(U$	$\wedge$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\wedge$	$W)$
F	T	T	F	T	T	T	**F**	F	F	F

Agora temos uma tabela de verdade parcial que mostra que ‘$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$’ não é uma tautologia. Falando de outra forma, mostramos que existe uma valoração qie faz ‘$(U \wedge T) \rightarrow (S \wedge W)$’ falsa, a saber, a valoração que faz ‘S’ falsa, ‘T’ verdadeira, ‘U’ verdadeira e ‘W’ falsa.

Contradição. Mostrar que algo é uma contradição exige uma tabela completa: precisamos mostrar que não há valoração que faça a sentença verdadeira; ou seja, precisamos mostrar que a sentença é falsa em qualquer linha da tabela de verdade. Entretanto, para mostrar que algo *não* é uma contradição, tudo que precisamos fazer é encontrar uma valoração que faça a sentença verdadeira e uma única linha de uma tabela de verdade será suficiente. Podemos ilustrar isto com o mesmo exemplo:

S	T	U	W	$(U$	$\wedge$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\wedge$	$W)$
							V			

Para tornar a sentença verdadeira, será suficiente garantir que o antecedente é falso. Uma vez que o antecedente é uma conjunção, podemos tornar um dos conjunctos falso. Arbitrariamente, escolhemos tornar ‘U’ falsa; e, então, podemos atribuir qualquer valor de verdade que quisermos às outrasletras sentenciais.

S	T	U	W	$(U$	$\land$	$T)$	$\rightarrow$	$(S$	$\land$	$W)$
F	V	F	F	F	F	V	**V**	F	F	F

Equivalência. Para mostrar que duas sentenças são equivalentes, devemos mostrar que as sentenças tê o mesmo valor de verdade em qualquer valoração. Isto exige uma tabela de verdade completa.

Para mostrar que duas sentenças *não* são equivalentes, apenas precisamos mostrar que existe uma valoração na qual elas têm diferentes valores de verdade. Assim, isto requer apenas uma tabela de verdade parcial de uma linha: faça uma tabela de forma que uma sentença seja verdadeira e a outra, falsa.

Consistência. Para mostrar que algumas sentenças são conjuntamente satisfatíveis, devemos mostrar que há uma valoração que torne todas as sentenças verdadeiras, portanto isto exige apenas uma tabela de verdade parcial com uma única linha.

Para mostrar que algumas sentenças são conjuntamente insatisfatíveis, devemos mostrar que não há valoração que faça todas as sentenças verdadeiras. Isto requer uma tabela de verdade completa: você deve mostrar que, em toda linha da tabela de verdade, pelo menos uma das sentenças é falsa.

Validade. Para mostrar que um argumento é válido, devemos mostrar que não há valoração que faça todas as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Assim, isto exige uma tabela de verdade completa (similarmente para acarretamento).

Para mostrar que um argumento é *inválido*, devemos mostrar que há uma valoração que faça todas as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Desse modo, isto requer apenas uma tabela de verdade parcial com uma única linha na qual todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa (similarmente para acarretamento).

Esta tabela resume o que é requerido:

	Sim	**Não**
tautologia?	completa	parcial com uma linha
contradição?	completa	parcial com uma linha
equivalente?	complete	parcial com uma linha
satisfatível?	parcial com uma linha	completa
válido?	completa	parcial com uma linha
acarretamento?	completa	parcial com uma linha

Exercícios Práticos

A. Use tabelas de verdade parciais ou completas (conforme apropriado) para determinar se estes pares de sentenças são logicamente equivalentes:

1. $A, \neg A$
2. $A, A \vee A$
3. $A \rightarrow A, A \leftrightarrow A$
4. $A \vee \neg B, A \rightarrow B$
5. $A \wedge \neg A, \neg B \leftrightarrow B$
6. $\neg(A \wedge B), \neg A \vee \neg B$
7. $\neg(A \rightarrow B), \neg A \rightarrow \neg B$
8. $(A \rightarrow B), (\neg B \rightarrow \neg A)$

B. Use tabelas de verdade parciais ou completas (conforme apropriado) para determinar estas sentenças são conjuntamente satisfatíveis ou conjuntamente insatisfatíveis:

1. $A \wedge B, C \rightarrow \neg B, C$
2. $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A, \neg C$
3. $A \vee B, B \vee C, C \rightarrow \neg A$
4. $A, B, C, \neg D, \neg E, F$
5. $A \wedge (B \vee C), \neg(A \wedge C), \neg(B \wedge C)$
6. $A \rightarrow B, B \rightarrow C, \neg(A \rightarrow C)$

C. Use tabelas de verdade parciais ou completas (conforme apropriado) para determinar se cada argumento é válido ou inválido:

1. $A \vee \big[A \rightarrow (A \leftrightarrow A)\big] \therefore A$
2. $A \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow A) \therefore A$
3. $A \rightarrow B, B \therefore A$

4. $A \vee B, B \vee C, \neg B \therefore A \wedge C$
5. $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \therefore A \leftrightarrow C$

D. Determine se cada sentença é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência. Justifique sua resposta com uma tabela de verdade completa ou parcial conforme apropriado.

1. $A \rightarrow \neg A$
2. $A \rightarrow (A \wedge (A \vee B))$
3. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$
4. $A \rightarrow \neg(A \wedge (A \vee B))$
5. $\neg B \rightarrow [(\neg A \wedge A) \vee B]$
6. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
7. $[(A \wedge B) \wedge C] \rightarrow B$
8. $\neg\big[(C \vee A) \vee B\big]$
9. $\big[(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)\big] \wedge C$
10. $(A \wedge B)] \rightarrow [(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$

E. Determine se cada sentença é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência. Justifique sua resposta com uma tabela de verdade completa ou parcial conforme apropriado.

1. $\neg(A \vee A)$
2. $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
3. $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$
4. $\neg[(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)]$
5. $(A \wedge B) \vee (A \vee B)$
6. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow A$
7. $A \rightarrow (B \vee C)$
8. $(A \wedge \neg A) \rightarrow (B \vee C)$
9. $(B \wedge D) \leftrightarrow [A \leftrightarrow (A \vee C)]$
10. $\neg[(A \rightarrow B) \vee (C \rightarrow D)]$

F. Determine se os seguintes pares de sentenças são logicamente equivalentes, usando tabelas de verdade completas. Se as duas sentenças forem, de fato, equivalentes, escreva “equivalente”. Caso contrário, escreva “não equivalente”.

1. A and $A \lor A$
2. A and $A \land A$
3. $A \lor \neg B$ and $A \to B$
4. $(A \to B)$ and $(\neg B \to \neg A)$
5. $\neg(A \land B)$ and $\neg A \lor \neg B$
6. $((U \to (X \lor X)) \lor U)$ and $\neg(X \land (X \land U))$
7. $((C \land (N \leftrightarrow C)) \leftrightarrow C)$ and $(\neg\neg\neg N \to C)$
8. $[(A \lor B) \land C]$ and $[A \lor (B \land C)]$
9. $((L \land C) \land I)$ and $L \lor C$

G. Determine se cada coleção de sentenças é conjntamente satisfatível ou conjuntamente insatisfatível. Justifique sua resposta com uma tabela de verdade completa ou parcial conforme apropriado.

1. $A \to A$, $\neg A \to \neg A$, $A \land A$, $A \lor A$
2. $A \to \neg A$, $\neg A \to A$
3. $A \lor B$, $A \to C$, $B \to C$
4. $A \lor B$, $A \to C$, $B \to C$, $\neg C$
5. $B \land (C \lor A)$, $A \to B$, $\neg(B \lor C)$
6. $(A \leftrightarrow B) \to B$, $B \to \neg(A \leftrightarrow B)$, $A \lor B$
7. $A \leftrightarrow (B \lor C)$, $C \to \neg A$, $A \to \neg B$
8. $A \leftrightarrow B$, $\neg B \lor \neg A$, $A \to B$
9. $A \leftrightarrow B$, $A \to C$, $B \to D$, $\neg(C \lor D)$
10. $\neg(A \land \neg B)$, $B \to \neg A$, $\neg B$

H. Determine se cada argumento é válido ou inválido. Justifique sua resposta com uma tabela de verdade completa ou parcial conforme apropriado.

1. $A \to (A \land \neg A) \therefore \neg A$
2. $A \lor B$, $A \to B$, $B \to A \therefore A \leftrightarrow B$
3. $A \lor (B \to A) \therefore \neg A \to \neg B$
4. $A \lor B$, $A \to B$, $B \to A \therefore A \land B$
5. $(B \land A) \to C$, $(C \land A) \to B \therefore (C \land B) \to A$
6. $\neg(\neg A \lor \neg B)$, $A \to \neg C \therefore A \to (B \to C)$
7. $A \land (B \to C)$, $\neg C \land (\neg B \to \neg A) \therefore C \land \neg C$
8. $A \land B$, $\neg A \to \neg C$, $B \to \neg D \therefore A \lor B$
9. $A \to B \therefore (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$
10. $\neg A \to B, \neg B \to C, \neg C \to A \therefore \neg A \to (\neg B \lor \neg C)$

I. Determine se cada argumento é válido ou inválido. Justifique sua resposta com uma tabela de verdade completa ou parcial conforme apropriado.

1. $A \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow A) \therefore A$
2. $A \lor B, B \lor C, \neg A \therefore B \land C$
3. $A \to C, E \to (D \lor B), B \to \neg D \therefore (A \lor C) \lor (B \to (E \land D))$
4. $A \lor B, C \to A, C \to B \therefore A \to (B \to C)$
5. $A \to B, \neg B \lor A \therefore A \leftrightarrow B$

PARTE IV

Dedução natural para LVF

CAPÍTULO 14

A ideia de dedução natural

Voltando a §2, dissemos que um argumento é válido sse não há caso no qual todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa.

No caso de LVF, isto nos levou a desenvolver as tabelas de verdade. Cada linha da tabela de verdade completa corresponde a uma valoração. Assim, quando confrontados com um argumento fr LVF, temos uma forma bastante direta de avaliar se há uma valoração na qual as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa: use a tabela de verdade.

Entretanto, as tabelas de verdade não nos dão necessariamente muitos *insight.* Considere dois argumentos em LVF:

$$P \vee Q, \neg P \therefore Q$$
$$P \rightarrow Q, P \therefore Q$$

Claramente, estes são argumentos válidos. Você pode confirmar que eles são válidos, contruindo tabelas de verdade com quatro linhas, mas poderíamos dizer que eles usam diferentes *formas* de raciocínio. Poderia ser interessante levar em conta estas formas diferentes de inferância.

Um objetivo de um *sistema de dedução natural* é mostrar que argumentos particulares são válidos, de forma que nos ajude a entender o raciocínio que os argumentos poderiam envolver. Começamos com regras bastante básicas de inferência. Estas regras podem ser combinadas para oferecer argumentos mais complicados. De fato, com apenas um pequeno pacote inicial de inferência, esperamos capturar todos os argumentos válidos.

Isto é uma forma muito diferente de pensar sobre argumentos.

Com as tabelas de verdade, consideramos diretamente formas distintas para tornar sentenças verdadeiras ou falsas. Com sistemas de dedução natural, manipulamos sentenças de acordo com as regras que estabelecemos como boas regras. Sistema de dedução natural promete-nos dar um melhor *insight* — ou pelo menos, um *insight* diferente — sobre como os argumentos funcionam.

A mudança para dedução natural poderia ser motivada por mais do que a busca por *insight*. Ela poderia também ser motivada por *necessidade*. Considere:

$$A_1 \rightarrow C_1 \mathrel{.\dot{}.} (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5) \rightarrow (C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5)$$

Para testar a validade deste argumento, poderíamos usar uma tabela de verdade com 1024 linhas. Se você fizer isso corretamente, então você verá que não há linha na qual todas as premissas são verdadeiras e na qual a conclusão é falsa. Assim, você saberá que o argumento é válido (mas, como justamente mencionado, há um sentido no qual você não saberá *por que* o argumento é válido). Mas agora considere:

$$\begin{aligned} A_1 \rightarrow C_1 \mathrel{.\dot{}.} (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \wedge A_6 \wedge A_7 \wedge A_8 \wedge A_9 \wedge A_{10}) \rightarrow \\ (C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5 \vee C_6 \vee C_7 \vee C_8 \vee C_9 \vee C_{10}) \end{aligned}$$

Este argumento também é válido — como você provavelmente dirá —, mas para testar isso é requerido uma tabela de verdade com $2^{20} = 1048576$ linhas. Em tese, podemos configurar uma máquina para analisar as tabelas de verdade e informar quando terminar. Na prática, argumentos complicados em LVF podem tornar-se *intratáveis*, se usarmos tabelas de verdade.

Não obstante, quando chegarmos à lógica de primeira ordem (LPO) (começando no capítulo 21), o problema ficará dramaticamente pior. Não há nada como teste de tabela de verdade para (LPO). Para avaliar se um argumento é válido ou não, temos de raciocinar sobre *todas* as interpretações, mas, como veremos, há infinitas interretações possíveis.Nem mesmo em tese podemos configurar uma máquina para analisar as infinitas interpretações possíveis e informar quando terminar: ela *nunca* terminará. Precisamos criar uma maneira mais eficiente de raciocinar sobre todas as interpretações ou precisamos procurar algo diferente.

De fato, há sistemas que codificam maneiras de raciocinar sobre todas as interpretações. Eles foram desenvolvidos nos anos 1950 por Evert Beth e Jaakko Hintikka, mas não seguiremos este caminho. Em vez disso, olharemos para dedução natural.

Em vez de raciocinar diretamente sobre todas as valorações (no caso de LVF), tentaremos selecionar algumas regras básicas de inferência. Algumas delas governarão o comportamento dos conectivos sentenciais. Outras governarão o comportamento dos quantificadores e da identidade que são marcas registradas de LPO. O sistema de regras resultante dar-nos-ão uma nova maneira de pensar sobre a validade de argumentos. O desenvolvimento moderno de dedução natural é datado a partir de artigos publicados simultanea e independentemente por Getzen Gerhard and Stanisław Jaśkowski (1934). Todavia, o sistema de dedução natural que iremos considerar é amplamente baseado em torno do trabalho de Frederic Fitch (publicado primeiro em 1952).

CAPÍTULO 15

Regras básicas para LVF

Desenvolveremos um sistema de DEDUÇÃO NATURAL. Para cada conectivo, haverá regras de INTRODUÇÃO, que nos permite provar uma sentença que tem este conectivo como o operador lógico principal e regras de ELIMINAÇÃO, que nos permite provar algo dada uma sentença que tem este conectivo como operador lógico principal.

15.1 A ideia de uma prova formal

Uma *prova formal* é uma sequência de sentenças, algumas das quais são marcadas como sendo suposições iniciais (ou premissas). A última linha da prova formal é a conclusão (doravante, chamaremos simplesmente estas rovas’, mas você deveria estar consciente que há também *provas informais*).

Como uma ilustração, considere:

$$\neg(A \vee B) \therefore \neg A \wedge \neg B$$

Começaremos uma prova, escrevendo a premissa:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \neg(A \vee B) \\ \hline \end{array}$$

Perceba que numeramos a premissa, uma vez que queremos referir-nos à premissa novamente. De fato, qualquer linha na prova é numerada, de forma que podemos referir-nos novamente.

Note também que traçamos uma linha embaixo da premissa. Tudo escrito acima da linha é uma *suposição*. Qualquer coisa escrita abaixo da linha será algo que se segue das suposições ou será alguma nova suposição. Esperamos concluir '$\neg A \wedge \neg B$'; desse modo, esperamos, enfim, concluir nossa prova com

$$\begin{array}{r|l} n & \neg A \wedge \neg B \end{array}$$

para algum número n. Não importa em qual número de linhas terminamos, mas, obviamente, preferiríamos uma prova curta a uma longa.

Similarmente, suponha que desejássemos considerar:

$$A \vee B, \neg(A \wedge C), \neg(B \wedge \neg D) \therefore \neg C \vee D$$

O argumento tem três premissas, assim começamos escrevendo todas, numerando-as e desenhando um linha debaixo delas:

$$\begin{array}{r|l} 1 & A \vee B \\ 2 & \neg(A \wedge C) \\ 3 & \neg(B \wedge \neg D) \\ \cline{2-2} \end{array}$$

e esperamos concluir com alguma linha:

$$\begin{array}{r|l} n & \neg C \vee D \end{array}$$

Tudo que resta fazer é explicar cada uma das regras que podemos usar ao longo do percurso das premissas à conclusão. As regras são separadas pelos nossos conectivos lógicos.

15.2 Reiteração

A primeira regra é tão incrivelmente óbvia que é surpreendente que nos importamos com ela.

Se você já mostrou algo no curso de uma prova, a *regra de reiteração* permite que você repita-o em uma nova linha. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|ll} 4 & A \wedge B & \\ \vdots & \vdots & \\ 10 & A \wedge B & \text{R } 4 \end{array}$$

Isto indica que escrevemos ‘$A \wedge B$’ na line 4. Agora, em uma linha posterior, — linha 10, por exemplo —, decidimos que queremos repetir isto. Assim, escrevemo-la novamente. Também adicionamos uma citação que justifica o que escrevemos. Neste caso, escrevemos ‘R’ para indicar que estamos usando a regra de reiteração e escrevemos ‘4’ para indicar a regra foi aplicada à linha ‘4’.

Aqui está uma expressão geral da regra:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ & & \\ & \mathscr{A} & \text{R } m \end{array}$$

O ponto é que, se qualquer sentença $\mathscr{A}$ ocorre em alguma linha, então podemos repetir $\mathscr{A}$ em linhas posteriores. Cada linha de nossa prova deve ser justificada por alguma regra e aqui temos ‘R m’. Isto significa: Reiteração, aplicada à linha m.

Duas coisas precisam ser enfatizadas. Em primeiro lugar, ‘$\mathscr{A}$’ não é uma sentença de LVF. Em vez disso, ele é um símbolo na metalinguagem, que usamos quando queremos falar sobre qualquer sentença de LVF (veja §7). Em segundo lugar, da mesma forma, ‘m’ não é um símbolo que aparecerá em uma prova. Em vez disso, ele é um símbolo na metalinguagem, que usamos quando queremos falar sobre qualquer linha de uma prova. Em uma prova real, as linhas são numeradas por ‘1’, ‘2’, ‘3’ e assim por diante. Mas quando definimos a regra, usamos variáveis como ‘m’ para sublinhar o ponto ao qual a regra pode ser aplicada em qualquer momento.

15.3 Conjunção

Suponha que desejamos provar que Ludwig é tanto reacionário como libertário. Uma maneira óbvia de fazer isto seria como se segue: primeiro, mostre que Ludwig é reacionário; então mostre que Ludwig é libertário; depois coloque estas duas demonstrações juntas para obter a conjunção.

Nosso sistema de dedução natural capturará este pensamento diretamente. No exemplo dado, poderíamos adotar a seguinte chave de simbolização:

R: Ludwig é reacionário

L: Ludwig é libertário

Talvez estejamos trabalhando através de uma prova e obtivemos ‘R’ na linha 8 e ‘L’ na linha 15. Então, na linha subsequente, podemos obter ‘$R \wedge L$’ desse modo:

$$\begin{array}{r|ll} 8 & R & \\ 15 & L & \\ & R \wedge L & \wedge\text{I } 8, 15 \end{array}$$

Note que qualquer linha de nossa prova deve ser uma suposição ou deve ser justificada por alguma regra. Citamos ‘$\wedge$I 8, 15’ aqui para indicar que a linha é obtida pela regra de introdução da conjunção ($\wedge$I) aplicada às linhas 8 e 15. Da mesma forma, podedríamos obter também:

$$\begin{array}{r|ll} 8 & R & \\ 15 & L & \\ & L \wedge R & \wedge\text{I } 15, 8 \end{array}$$

com a citação invertida para refletir a ordem dos conjunctos. Falando de forma mais geral, aqui está nossa regra de introdução:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ n & \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \wedge\text{I } m, n \end{array}$$

Esclarecendo, o enunciado da regra é *esquemática*. Ele não é uma prova em si. ‘$\mathscr{A}$’ e ‘$\mathscr{B}$’ não são sentenças de LVF. Em vez disso, eles são símbolos na metalinguagem, que usamos quando queremos falar sobre qualquer sentença de LVF (veja §7). Similarmente, ‘m’ e ‘n’ não são numerais que aparecem em qualquer prova real. Em vez disso, eles são símbolos na metalinguagem, que usamos quando queremos falar sobre qualquer linha de qualquer prova. Na prova real, as linhas são numeradas ‘1’, ‘2’, ‘3’ e assim por diante, mas quando definimos a regra, usamos variáveis para enfatizar que a regra pode ser aplicada a qualquer momento. A regra requer apenas que tenhamos ambos conjunctos disponíveis em algum lugar na prova. Eles podem ser separados um do outro e eles podem aparecer em qualquer ordem.

A regra é chamada *introdução* da conjunção, porque ela introduz o símbolo '∧' na nossa prova onde ele poderia estar ausente. De forma semelhante, temos a regra que *elimina* este símbolo. Suponha que mostramos que Ludwig é tanto reacionário como libertário. Você tem o direito [*You are entitled to*] de concluir que Ludwig é reacionário. Da mesma forma, você tem o direito de concluir que Ludwig é libertário. Agrupando isto, obtemos nossa(s) regra(s) de eliminação da conjunção:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \land \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} & \qquad \land\text{E } m \end{array}$$

e também:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \land \mathscr{B} & \\ & \mathscr{B} & \qquad \land\text{E } m \end{array}$$

O ponto é simplesmente que, quando você tem uma conjunção em alguma linha de uma prova, você pode obter um dos conjunctos por ∧E. Um ponto que vale a pena enfatizar: você só pode aplicar esta regra quando a conjunção é o operador lógico principal. Desse modo, você não pode inferir 'D' a partir de '$C \lor (D \land E)$'!

Mesmo com apenas estas duas regras, podemos começar a ver algum poder de nosso sistema formal de prova. Considere:

$$\begin{array}{rl} & [(A \lor B) \to (C \lor D)] \land [(E \lor F) \to (G \lor H)] \\ \therefore & [(E \lor F) \to (G \lor H)] \land [(A \lor B) \to (C \lor D)] \end{array}$$

O operador lógico principal tanto na premissa como na conclusão deste argumento é '∧'. A fim de fornecer uma prova, começamos escrevendo a premissa, que é nossa suposição. Traçamos uma linha debaixo dela: tudo depois desta linha deve seguir-se das nossas suposições por meio (de aplicações reiteradas de) nossas regras de inferência. Assim, o início da prova tem o seguinte aspecto:

$$\begin{array}{r|l}
1 & [(A \vee B) \rightarrow (C \vee D)] \wedge [(E \vee F) \rightarrow (G \vee H)] \\ \hline
\end{array}$$

A partir da premissa, podemos obter vada um dos conjunctos, aplicando ∧E. A prova tem o seguinte aspecto:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & [(A \vee B) \rightarrow (C \vee D)] \wedge [(E \vee F) \rightarrow (G \vee H)] & \\ \hline
2 & [(A \vee B) \rightarrow (C \vee D)] & \wedge\text{E } 1 \\
3 & [(E \vee F) \rightarrow (G \vee H)] & \wedge\text{E } 1
\end{array}$$

So by applying the ∧I rule to lines 3 and 2 (in that order), we arrive at the desired conclusion. The finished proof looks like this:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & [(A \vee B) \rightarrow (C \vee D)] \wedge [(E \vee F) \rightarrow (G \vee H)] & \\ \hline
2 & [(A \vee B) \rightarrow (C \vee D)] & \wedge\text{E } 1 \\
3 & [(E \vee F) \rightarrow (G \vee H)] & \wedge\text{E } 1 \\
4 & [(E \vee F) \rightarrow (G \vee H)] \wedge [(A \vee B) \rightarrow (C \vee D)] & \wedge\text{I } 3, 2
\end{array}$$

Isto é uma prova muito simples, mas ela mostra como podemos encadear as regras de prova em provas mais longas. A propósito [*in passing*], observe que investigar este argumento usando tabela de verdade teria exigido 256 linhas; nossa prova formal exigiu 4 linhas.

Vale a pena dar um outro exemplo. Voltando a §10.3, notamos que este argumento é válido:

$$A \wedge (B \wedge C) \therefore (A \wedge B) \wedge C$$

Para dar uma prova que corresponda a este argumento, começamos escrevendo:

$$\begin{array}{r|l}
1 & A \wedge (B \wedge C) \\ \hline
\end{array}$$

A partir da premissa, podemos obter cada um dos conjunctos, aplicando ∧E duas vezes. Podemos, então, aplicar ∧E mais duas vezes, assim nossa prova é:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & A \wedge (B \wedge C) & \\
\cline{2-2}
2 & A & \wedge\text{E } 1 \\
3 & B \wedge C & \wedge\text{E } 1 \\
4 & B & \wedge\text{E } 3 \\
5 & C & \wedge\text{E } 3
\end{array}
$$

Mas, felizmente, agora podemos reintroduzir conjunções na ordem que desejamos, de forma que nossa prova final é:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & A \wedge (B \wedge C) & \\
\cline{2-2}
2 & A & \wedge\text{E } 1 \\
3 & B \wedge C & \wedge\text{E } 1 \\
4 & B & \wedge\text{E } 3 \\
5 & C & \wedge\text{E } 3 \\
6 & A \wedge B & \wedge\text{I } 2, 4 \\
7 & (A \wedge B) \wedge C & \wedge\text{I } 6, 5
\end{array}
$$

Lembre-se que nossa definição oficial de sentenças em LVF apenas permitia conjunções com dois conjunctos. A prova justamante dada sugere que poderíamos excluir os parênteses internos em todas nossas provas. Entretanto, isto não é padrão. Em vez disso, manteremos nossas convenções mais austeras sobre parênteses (embora ainda permitiremos a exclusão dos parênteses mais externos, o que torna as coisas mais legível).

Daremos uma ilustração final. Ao usar a regra ∧I, não há qualquer exigência para aplicá-la a diferentes sentenças. Portanto, se quisermos, podemos formalmente provar '$A \wedge A$' a partir de 'A' dessa forma:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & A & \\
\cline{2-2}
2 & A \wedge A & \wedge\text{I } 1, 1
\end{array}
$$

Simples, mas efetivo.

15.4 Condicional

Considere o seguinte argumento:

> Se Jane é esperta, então ela é rápida.
> Jane é esperta.
> ∴ Jane é rápida.

Certamente, este argumento é válido e sugere diretamente uma regra de eliminação do condicional (→E):

m	$\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$	
n	$\mathscr{A}$	
	$\mathscr{B}$	→E m, n

Esta regra é também *modus ponens*. Novamente, isto é uma regra de eliminação, porque ela permite a obtenção de uma sentença que pode não conter '→', depois de iniciarmos com uma sentença que continha '→' como operador lógico principal. Note que o condicional $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ e o antecedente $\mathscr{A}$ podem ser separados um do outro na prova e eles podem ocorrer em qualquer ordem. Todavia, na citação para →E, sempre citamos o condicional primeiro, seguido pelo antecedente.

A regra para introdução do condicional é também muito fácil de dar uma motivação. O seguinte argumento deveria ser válido:

> Ludwig é reacionário. Portanto, se Ludwig é libertário, então Ludwig é reacionário *e* libertário.

Se alguém duvidasse que isto era válido, poderíamos tentar convencê-lo do contrário, explicando da seguinte forma:

> Assuma que Ludwig é reacionário. Ora, *além disso* assuma que Ludwig é libertário. Então, pela introdução da conjunção — que acabamos de discutir —, Ludwig é reacionário e libertário. É calro, isto é um condicional na suposição de que Ludwig é libertário. Mas isto justamente significa que se Ludwig é libertário, então ele é reacionário e libertário.

Transferindo para o formato de dedução natural, aqui está o padrão de raciocínio que acabamos de usar. Começamos com uma premissa, 'Ludwig é reacionário', assim:

$$\begin{array}{r|l}
1 & R \\ \cline{2-2}
\end{array}$$

A próxima coisa que fizemos é assumir uma suposição adicional ('Ludwig é libertário'), para o propósito do argumento. Para indicar que não estamos mais lidando *meramente* com a suposição inicial ('R'), mas com alguma suposição adicional, continuamos a prova como se segue:

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & \multicolumn{2}{l}{R} \\ \cline{2-2}
2 & & L \\ \cline{3-3}
\end{array}$$

Note que não estamos reivindicando, na linha 2, ter provado 'L' a partir da linha 1, assim não escrevemos nesta linha qualquer justificação para a suposição adicional na linha 2. Todavia, precisamos marcar que ela é uma suposição adicional. Fazemos isto, traçando uma linha sob esta suposição (para indicar que ela é uma suposição) e recuando-a [*indenting it*] por meio da linha vertical (para indicar que ela é adicional).

Com esta suposição extra à disposição, estamos em posição de usar ∧I.. Assim, podemos continuar nossa prova:

$$\begin{array}{r|l|ll}
1 & \multicolumn{3}{l}{R} \\ \cline{2-2}
2 & & L & \\ \cline{3-3}
3 & & R \land L & \land\text{I } 1, 2
\end{array}$$

Desse modo, mostramos que, dada a suposição adicional, 'L', podemos obter '$R \land L$'. Portanto, podemos concluir que se 'L' ocorre, então '$R \land L$' ocorre. Ou, de forma mais breve, podemos concluir '$L \to (R \land L)$':

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & R & & \\
\cline{2-2}
2 & \quad \vert\; L & & \\
\cline{2-2}
3 & \quad \vert\; R \land L & & \land\text{I } 1, 2 \\
4 & L \to (R \land L) & & \to\text{I } 2\text{–}3
\end{array}
$$

Observe que recuamos e voltamos a usar aquela linha vertical à esquerda. Nós *descartamos* a suposição adicional,'L', uma vez que o próprio condicional se segue da nossa suposição original, 'R'. O padrão geral que está funcionando aqui é o seguinte. Em primeiro lugar, faça uma suposição adicional, $\mathscr{A}$; e desta suposição adicional, provamos $\mathscr{B}$. Neste caso, sabemos o seguinte: Se $\mathscr{A}$ é verdadeira, então $\mathscr{B}$ é verdadeira. Isto está previsto na regra de introdução do condicional:

$$
\begin{array}{r|lll}
i & \quad \vert\; \mathscr{A} & & \\
\cline{2-2}
j & \quad \vert\; \mathscr{B} & & \\
 & \mathscr{A} \to \mathscr{B} & & \to\text{I } i\text{–}j
\end{array}
$$

Podem existir muitas linhas ou poucas linhas entre as linhas i e j.

Será útil oferecer uma segunda ilustração mostrando o funcionamento de →I. Suponha que desejamos considerar o seguinte:

$$P \to Q, Q \to R \therefore P \to R$$

Começamos listando nossas premissas. Então, uma vez que queremos chegar a um condicional (a saber, '$P \to R$'), temos de assumir, além disso, o antecedente deste condicional. Portanto, nossa prova principal começa:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & P \to Q \\
2 & Q \to R \\
\cline{2-2}
3 & \quad \vert\; P \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

Note que temos 'P' disponível, quando a tratamos como uma suposição adicional, mas, agora, podemos usar →E na primeira premissa.

Isto produzirá ‘Q’. Podemos, então, usar →E na segunda premissa. Portanto, assumindo ‘P’, fomos capazes de provar ‘R’, logo aplicamos a regra →I — descartando ‘P’ — e terminamos a prova. Colocando tudo isto junto, temos:

$$\begin{array}{r|lll}
1 & P \to Q & & \\
2 & \underline{Q \to R} & & \\
3 & \quad \vert\ \underline{P} & & \\
4 & \quad \vert\ Q & & \to\text{E } 1, 3 \\
5 & \quad \vert\ R & & \to\text{E } 2, 4 \\
6 & P \to R & & \to\text{I } 3\text{–}5
\end{array}$$

15.5 Suposições adicionais e subprovas

A regra de →I invocou a ideia de fazer suposições adicionais. Estas suposições precisam ser manuseadas com algum cuidado.

Considere esta prova:

$$\begin{array}{r|lll}
1 & \underline{A} & & \\
2 & \quad \vert\ \underline{B} & & \\
3 & \quad \vert\ B & & \text{R } 2 \\
4 & B \to B & & \to\text{I } 2\text{–}3
\end{array}$$

Isto está perfeitamente de acordo com as regras que já estabelecemos e, particularmente, não deveria parecer estranho. Uma vez que ‘$B \to B$’ é uma tautologia, nenhuma premissa particular deveria ser exigida para prová-la.

Mas suponha que tentássemos continuar a prova como se segue:

1	A		
2		B	
3		B	R 2
4	$B \rightarrow B$		→I 2–3
5	B		tentativa imprópria de invocar →E 4, 3

Se fosse permitido fazer isto, seria um desastre. Seria permitido provar qualquer letra sentencial a partir de qualquer outra letra sentencial. Todavis, se você me diz que Anne é rápida (simbolizada por 'A'), não deveríamos ser capazes de concluir que a Rainha Boudica encontrava-se a seis metros de altura (simbolizada por 'B')! Temos de ser proibidos de fazer isto, mas como devemos implementar a proibição?

Podemos descrever o processo de fazer uma suposição adicional como o processo de executar uma *subprova*: uma prova subsidiária [auxiliar] dentro da prova principal. Quando começamos uma subprova, desenhamos uma outra linha vertical para indicar que não estamos mais na prova principal. Então, escrevemos [na linha] da suposição na qual a subprova será baseada. Uma subprova pode ser pensada essencialmente como levantando esta questão: *o que poderíamos mostrar, se fizermos também esta suposição adicional?*

Quando estamos trabalhando dentro da subprova, podemos referir-nos à suposição adicional que fizemos ao introduzir a subprova e a qualquer coisa que obtivemos a partir de nossas suposições iniciais (afinal das contas, estas suposições originais ainda estão valendo). Em algum momento, porém, desejaremos parar de trabalhar com a suposição adicional: desejaremos retornar da subprova para a prova principal. Para indicar que retornamos para a prova principal, a linha vertical da subprova termina. Neste ponto, dizemos que a subprova está *fechada*. Depois de fechar uma subprova, deixamos de lado a suposição adicional e, assim, será ilegítimo inferir qualquer coisa que dependa desta suposição adicional. Assim, estipulamos:

Para citar uma linha individual ao aplicar uma regra

1. a linha deve vir antes da linha onde a regra é aplicada, mas
2. não ocorre dentro de uma subprova que foi fechada antes da linha onde a regra é aplicada

Esta estipulação exclui a tentativa desastrosa de prova acima. A regra de →E requer que citemos duas linhas individuais anteriores na prova. Na suposta prova acima, uma das linhas (a saber, linha 4) ocorre dentro de uma subprova que foi fechada (na linha 5). Isto é iligítimo.

O fechamento de uma suprova é chamado DESCARTE das suposições desta subprova. Assim, podemos apresentar o ponto dessa forma: *voê não pode se referir a qualquer coisa que foi obtida usando suposições descartadas.*

Subprovas permite-nos, então, a pensar sobre o que poderíamos mostrar, se fizéssemos suposições adicionais. A questão a ser tirada disto não é surpreendente — no curso de uma prova, temos de acompanhar cuidadosamente quais suposições estamos fazendo, em qualquer dado momento. Nosso sistema de prova faz isso de forma bastante gráfica (de fato, é precisamente por isso que escolhemos usar *este* sistema de prova).

Uma vez que começamos a pensar sobre o que podemos mostrar ao fazer suposições adicionais, nada nos impede de levantar a questão sobre o que poderíamos mostrar se fizéssemos *novas* suposições. Poderíamos ser motivados a introduzir uma subprova dentro de uma subprova. Aqui está um exemplo que apenas usa as regras de prova que consideramos até agora:

1	A	
2	$\quad B$	
3	$\quad\quad C$	
4	$\quad\quad A \land B$	$\land$I 1, 2
5	$\quad C \to (A \land B)$	$\to$I 3–4
6	$B \to (C \to (A \land B))$	$\to$I 2–5

Perceba que a citação na linha 4 refere-se à suposição inicial (na linha 1) e a uma suposição de uma subprova (na linha 2). Isto está perfeitamente correto, uma vez que nenhuma suposição foi descartada ainda (o fechamento ocorre na linha 4).

Novamente, porém, precisamos acompanhar cuidadosamente o que estamos assumindo em qualquer dado momento. Suponha que tentássemos continuar a prova como se segue:

1	A	
2	$\quad B$	
3	$\quad\quad C$	
4	$\quad\quad A \land B$	$\land$I 1, 2
5	$\quad C \to (A \land B)$	$\to$I 3–4
6	$B \to (C \to (A \land B))$	$\to$I 2–5
7	$C \to (A \land B)$	tentativa imprópria de invocar $\to$I 3–4

Isto seria horrível. Se lhe contarmos que Anne é esperta, você não deveria ser capaz de inferir que se Cath é esperta (simbolizada por 'C'), então Anne é esperta *e* a Rainha Boudica encontrava-se a 6 metros de altura. Mas isto é exatamente o que uma tal prova sugere, se isso fosse permitido.

O problema essencial é que a subprova que começava com a suposição 'C' depende crucialmente do fato que tínhamos assumido 'B' na linha 2. Na linha 6, *descartamos* a suposição 'B': paramos de nos perguntar o que poderíamos mostrar, se também assumíssemos ‘B’. Assim, é simplesmente uma trapaça tentar obter a linha 7 da subprova que começa com a suposição ‘C’. Desse modo, estipulamos, como antes, que uma subprova pode apenas ser citada em uma linha se ela não ocorre dentro de alguma subprova que já está fechada nesta linha. A tentativa desastrosa de prova viola esta estipulação. A subprova das linhas 3–4 ocorre dentro de uma subprova que termina na linha 5. Assim, ela não pode ser invocada na linha 7.

Aqui está um outro caso que temos de excluir:

1	A	
2	B	
3	C	
4	$B \wedge C$	∧I 2, 3
5	C	∧E 4
6	$B \rightarrow C$	tentativa imprópria de invocar →I 2–5

Aqui estamos tentando citar uma subprova que começa na linha 2 e termina na linha 5 — mas a sentença na linha 5 depende não só da suposição na linha 2, mas também de uma outra suposição (linha 3) que não descartamos no fim da subprova. A subprova iniciada na linha 3 ainda está aberta na linha 3. Mas →I requer que a última linha da suprova conte *apenas* com a suposição da subprova a ser citada, ou seja, a subprova que inicia na linha 2 (e qualquer coisa antes dela) e não conte com as suposições de quaisquer subprovas dentro dela. Em particular, a última linha da subprova citada não deve se encontrar dentro de uma subprova aninhada.

Para citar uma subprova ao aplicar uma regra:

1. a subprova citada deve vir inteiramente antes da aplicação da regra onde ela é citada,
2. a subprova citada não deve se encontrar dentro de alguma outra subprova citada que está fechada na linha em que ela é citada, e
3. a última linha da subprova citada não deve ocorrer dentro de uma subprova aninhada.

Um último ponto que deve ser enfatizado é como as regras podem ser aplicadas: onde uma regra requer que você cite uma linha individual, você não pode citar uma subprova; e onde ela requer que você cite uma subprova, você não pode citar um linha individual. Desse modo, isto é incorreto:

1	$\vert\ \underline{A}$	
2	$\vert\ \vert\ \underline{B}$	
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \underline{C}$	
4	$\vert\ \vert\ \vert\ B \wedge C$	$\wedge$I 2, 3
5	$\vert\ \vert\ \vert\ C$	$\wedge$E 4
6	$\vert\ \vert\ C$	tentativa imprópria de invocar R 3–5
7	$\vert\ B \to C$	$\to$I 2–6

Aqui, tentamos justificar C na linha 6 pela regra de reiteração, mas citamos a subprova nas linhas3–5 com ela [sentença C]. Esta subprova está fechada e, a princípio, pode ser citada na linha 6 (por exemplo, poderíamos usá-la para justificar $C \to C$ por $\to$I). Mas a regra de reiteração R requer que você cite uma linha individual, assim citar a subprova inteira é inadmissível (mesmo se esta subprova contiver a sentença C que desejamos reiterar).

É sempre permitido abrir uma subprova com qualquer suposição. Todavia, há alguma estrtégia envolvida na escolha de uma suposição útil. Começar uma subprova com uma suposição arbitrária e excêntrica apenas desperdiçaria linhas da prova. A fim de obter, por exemplo, um condicional por meio de →I, devemos assumir o antecedente do condicional em uma subprova.

Similarmente, é sempre permitido fechar uma subprova (e descartar as suposições dela). Entretanto, não será de qualquer ajuda fazer isto, até que você tenha chegado a algo útil. Uma vez que a subprova está fechada, você pode somente citar a subprova inteira em qualquer justificação. Aquelas regras que exigem uma subprova ou subprovas, por sua vez, requerem que a última linha da subprova seja uma sentença de alguma forma ou outra. Por exemplo, é somente permitido citar um subprova para →I, se a linha que você está justificando é da forma $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, $\mathscr{A}$ é a suposição de sua subprova e $\mathscr{B}$ é a última linha de sua subprova.

15.6 Biconditional

As regras para o bicondicional serão uma versão em duas etapas das regras para o condicional.

A fim de provar '$W \leftrightarrow X$', por exemplo, devemos ser capazes de provar 'X' supondo 'W' *e* de provar 'W' supondo 'X'. A regra de introdução do bicondicional (↔I), portanto, requer duas subprovas. De forma esquemática, a regra trabalha dessa forma:

$$
\begin{array}{r|ll}
i & \left|\ \mathscr{A}\right. & \\ \cline{2-2}
j & \left|\ \mathscr{B}\right. & \\
k & \left|\ \mathscr{B}\right. & \\ \cline{2-2}
l & \left|\ \mathscr{A}\right. & \\
 & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \leftrightarrow\text{I } i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

Podem existir tantas linhas quanto você quiser entre i e j e tantas linhas quanto você quiser entre k e l. Ademais, as subprovas podem aparecer em qualquer ordem e a segunda subprova não precisa aparecer imediatamente depois da primeira.

A regra de eliminação do bicondicional (↔E) permite que você faça um pouco mais que a regra do condicional. Se você tem a subsentença à esquerda do bicondicional, você pode obter a subsentença à direita. Se você tem a subsentença à direita, você pode obter a subsentença à esquerda. Desse modo, é permitido:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \\ n & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} & \leftrightarrow\text{E } m,\ n \end{array}$$

and equally:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \\ n & \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} & \leftrightarrow\text{E } m,\ n \end{array}$$

Note que o bicondicional e a metade à direita ou a metade à esquerda podem ser separadas uma da outra e podem aparecer em qualquer ordem. Entretanto, na citação de ↔E, sempre citamos o bicondicional primeiro.

15.7 Disjunção

Suponha que Ludwig seja reacionário. Então, Ludwig é racionário ou libertário. Afinal da contas, dizer que Ludwig é reacionário ou libertário é dizer algo mais fraco do que dizer que Ludwig é reacionário.

Vamos enfatizar este ponto.Suponha que Ludwig seja reacionário. Segue-se que Ludwig é *ou* reacionário *ou* uma laranja. Da mesma maneira, segue-se que *ou* Ludwig é reacionário *ou* que laranjas são as únicas frutas. Similarmante, segue-se que *ou* Ludwig é reacionário *ou* que Deus está morto. Muitas destas [inferências] são inferências estranhas, mas há nada de *logicamente* errado com elas (mesmo se elas violem talvez todos os tipos de normas implícitas de conversação).

Armados com tudo isso, apresentamos a(s) regra(s) de introdução da disjunção:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{A} \lor \mathscr{B} & \lor\text{I } m \end{array}$$

e

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} \lor \mathscr{A} & \lor\text{I } m \end{array}$$

Note que $\mathscr{B}$ pode ser *qualquer* sentença, assim o seguinte é perfeitamente aceitável:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & M & \\ \cline{2-2} 2 & M \lor ([(A \leftrightarrow B) \to (C \land D)] \leftrightarrow [E \land F]) & \lor\text{I } 1 \end{array}$$

Usar uma tabela de verdade para mostrar isto teria tomado 128 linhas.

Não obstante, a regra de eliminação da disjunção é uma pouco mais complicada. Suponha que Ludwig é reacionário ou ele é libertário. O que podemos concluir? Não podemos concluir que Ludwig seja reacionário; em vez disso, poderia ser o caso que ele seja libertário. Igualmente, não podemos concluir que Ludwig seja necessário; pois, ele poderia ser apenas reacionário. Disjunções em si são difíceis de se trabalhar.

Mas suponha que poderíamos, de alguma forma, mostrar ambas seguintes coisas: em primeiro lugar, o fato de Ludwig ser reacionário acarreta que ele seja um economista austríaco; em segundo lugar, o fato de Ludwig acarreta libertário que ele seja um economista austríaco; Então, se sabemos que Ludwig é ou reacionário ou libertário, então sabemos que, seja o que ele for, Ludwig é um economista austríaco. Este *insight* pode ser expresso na seguinte regra, que é a nossa regra de eliminação da disjunção (∨E):

$$
\begin{array}{r|lll}
m & \mathscr{A} \lor \mathscr{B} & & \\
i & \mid \underline{\mathscr{A}} & & \\
j & \mid \mathscr{C} & & \\
k & \mid \underline{\mathscr{B}} & & \\
l & \mid \mathscr{C} & & \\
 & \mathscr{C} & & \lor\text{E } m,\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

Isto é obviamente uma pouco mais abstruso de escrever do que nossas regras anteriores, mas o ponto é bastante simples. Suponha que tenhamos alguma disjunção $\mathscr{A} \lor \mathscr{B}$. Suponha que tenhamos duas subprovas, mostrando-nos que $\mathscr{C}$ se segue da suposição $\mathscr{A}$ e que $\mathscr{C}$ se segue da suposição $\mathscr{B}$. Então, podemos inferir $\mathscr{C}$. Como habitual, podem existir tantas linhas quanto você quiser entre i e j e podem existir tantas linhas quanto você quiser entre k e l. Além disso, as subprovas e a disjunção podem aparecer em qualquer ordem e não precisam ser adjacentes.

Alguns exemplos poderiam ajudar a ilustrar isto:

$$(P \land Q) \lor (P \land R) \therefore P$$

Um exemplo de prova poderia ser executado assim:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \underline{(P \land Q) \lor (P \land R)} & \\
2 & \mid \underline{P \land Q} & \\
3 & \mid P & \land\text{E } 2 \\
4 & \mid \underline{P \land R} & \\
5 & \mid P & \land\text{E } 4 \\
6 & P & \lor\text{E } 1,\ 2\text{–}3,\ 4\text{–}5
\end{array}
$$

Aqui está um exemplo um pouco mais complexo. Considere:

$$A \land (B \lor C) \therefore (A \land B) \lor (A \land C)$$

Aqui está uma prova que corresponda a este argumento:

1	$A \wedge (B \vee C)$	
2	A	$\wedge$E 1
3	$B \vee C$	$\wedge$E 1
4	$\quad B$	
5	$\quad A \wedge B$	$\wedge$I 2, 4
6	$\quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee$I 5
7	$\quad C$	
8	$\quad A \wedge C$	$\wedge$I 2, 7
9	$\quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee$I 8
10	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee$E 3, 4–6, 7–9

Não fique assustado, se você acredita que não teria sido capaz de encontrar esta prova. A habilidade de encontrar novas provas vem com a prática e discutiremos algumas estratégias para achar provas em §16. A questão chave neste estágio é se, olhando para a prova, podemos provar que ela está em conformidade com as regras que estabelecemos. Isto envolve apenas checar qualquer linha, certificando-se que ela está justificada de cordo com as regras que estabelecemos.

15.8 Contradição e negação

Não tratamos apenas de um conectivo: a negação. Mas para lidar com esse conectivo, devemos conectar a negação com a *contradição.*

Uma forma efetiva de argumento é mostrar que seu oponente caiu em contradição. Neste ponto, ele ficará nas cordas. Ele terá de desistir de pelo menos uma das suposições dele. Iremos usar esta ideia em nosso sistema de prova, adicionando um novo símbolo, '$\bot$', às nossas provas. Isto deveria ser lido como 'contradição!' ou 'reductio!' ou 'mas isso é absurdo!'. A regra para introduzir este símolo é que podemos usá-lo, sempre que nos contradizemos explicitamente, ou seja, sempre que encontramos tanto uma sentença como a negação dela, que aparecem em nossa prova:

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\mathscr{A} & \\ n & \mathscr{A} & \\ & \bot & \neg\text{E } m, n \end{array}$$

Não importa em qual ordem a sentença e a negação dela aparecem e elas não precisam aparecer em linhas adjacentes. Entretanto, sempre citamos o número da linha da negação primeiro, seguido pelo número da sentença da qual aquela é negação.

Há obviamente uma estreita ligação entre contradição e negação.

A regra ¬E permite-nos prosseguir de duas sentenças contraditórias — $\mathscr{A}$ and its negation $\neg\mathscr{A}$ — para uma contradição explícita $\bot$. Escolhemos o rótulo por uma razão: ela é a regra mais básica que nos permite prosseguir de uma premissa contendo uma negação, ou seja, $\neg\mathscr{A}$, para uma sentença que não a contém, ou seja, $\bot$. Desse modo, ela é uma regra que *elimina* ¬.

Dissemos que '⊥' deveria ser lido como 'contradição!', mas isto não nos diz muito sobre o símbolo. Há, grosso modo, três maneiras de abordar o símbolo.

- Poderíamos considerar '⊥' como uma nova sentença atômica de LVF, mas uma que pode ter apenas o valor de verdade Falso.
- Poderíamos considerar '⊥' como uma abreviação para alguma contradição canônica tal como '$A \wedge \neg A$'. Isto terá o mesmo efeito como acima — obviamente, '$A \wedge \neg A$' tem apenas o valor de verdade Falso —, mas significa que, oficialmente, não precisamos adicionar um novo símbolo a LVF.
- Poderíamos considerar '⊥' não como um símbolo de LVF, mas muito mais como um símbolo de pontuação que aparece na prova.

Há algo filosoficamente atratvo sobre a terceira opção, mas aqui adotaremos *oficialmente* a primeira. '⊥' tem de ser lido como uma letra sentencial que é sempre falsa. Isto significa que podemos manipulá-la em nossas provas da mesma maneira que qualquer outra sentença.

Ainda temos de enunciar uma regra para introdução da negação. A regra é muito simples: se assumir algo levá-o a uma contradição., então a suposição deve ser errada. Este pensamento motiva a seguinte regra:

$$\begin{array}{r|l|l} i & & \mathscr{A} \\ \cline{3-3} j & & \bot \\ & \neg\mathscr{A} & \neg\mathrm{I}\ i\text{–}j \end{array}$$

Podem existir tantas linhas entre i e j quantas você quiser. Para ver isto na prática e interagir coma negação, considere esta prova:

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & D & \\ \cline{2-2} 2 & \quad\begin{array}{|l} \neg D \\ \hline \bot \end{array} & \\ 3 & & \neg\mathrm{E}\ 2, 1 \\ 4 & \neg\neg D & \neg\mathrm{I}\ 2\text{–}3 \end{array}$$

Se a suposição de que $\mathscr{A}$ é verdadeira leva a uma contradição, então $\mathscr{A}$ não pode ser verdadeira, ou seja, deve ser falsa, isto é, $\neg\mathscr{A}$ deve ser verdadeira. É claro, se a suposição de que $\mathscr{A}$ é falsa (ou seja, a suposição de que $\neg\mathscr{A}$ é verdadeira) leva a uma contradição, então $\mathscr{A}$ não pode ser falsa, isto é, $\mathscr{A}$ deve ser verdadeira. Desse modo, podemos considerar a seguinte regra:

$$\begin{array}{r|l|l} i & & \neg\mathscr{A} \\ \cline{3-3} j & & \bot \\ & \mathscr{A} & \mathrm{IP}\ i\text{–}j \end{array}$$

Esta regra é chama *prova indireta*, uma vez que ela permite que provemos $\mathscr{A}$ indiretamente, assumindo a negação dessa sentença. Formalmente, a regra é muito similar a ¬I, mas $\mathscr{A}$ e $\neg\mathscr{A}$ mudam de posições. Uma vez que $\neg\mathscr{A}$ não é a conclusão da regra, não estamos introduzindo ¬, assim IP não é uma regra que introduz qualquer conectivo. Ela não elimina também um conectivo, uma vez que ela não tem premissas independentes que contenha ¬, tem apenas uma subprova com uma suposição da forma $\neg\mathscr{A}$. Por outro lado, ¬E tem uma premissa da forma $\neg\mathscr{A}$: é por isso que ¬E elimina ¬, mas IP não elimina[1].

Usando ¬I, fomos capazes de dar uma prova de of $\neg\neg\mathscr{D}$ a partir de $\mathscr{D}$. Usando IP, podemos ir na direção contrária (essencialmente a prova é a mesma).

$$\begin{array}{r|l l}
1 & \neg\neg D & \\ \cline{2-2}
2 & \quad \neg D & \\
3 & \quad \bot & \neg\text{E } 1, 2 \\
4 & D & \text{IP } 2\text{–}3
\end{array}$$

Precisamos de uma última regra. É um tipo de regra de eliminação para '⊥' e é conhecida como *explosão*[2]. Se obtemos uma contradição, simbolizada por '⊥', então podemos inferir qualquer coisa que quisermos. Como isto pode ser motivado, como uma regra de argumentação? Ora, considere o estratagema retórico do Português '…e se *isso* é verdadeiro, eu comerei meu chapéu'. Uma vez que, simplesmente, contradições não podem ser verdadeiras, se alguma [contradição] *for* verdadeira, então não só comerei meu chapéu como também ficarei com ele. Aqui está a regra formal:

$$\begin{array}{r|l l}
m & \bot & \\
 & \mathscr{A} & \text{X } m
\end{array}$$

Note que $\mathscr{A}$ pode ser *qualquer* sentença.

A regra de explosão é um pouco estranha. Parece que $\mathscr{A}$ ocorre na prova como que do nada. Ao tentar encontrar provas, é muito tentador usá-la em qualquer lugar, uma vez que ela parece ser muito

---

[1] |Há lógicos que têm reservas em relação a IP, mas não em relação a ¬E. Eles são chamados "intuicionistas". Intuicionistas não compram nossas suposições básicas que toda sentença tem um dos dois valores de verdade, verdadeiro ou falso. Eles também pensam que ¬ funciona de forma diferente — para eles, uma prova de ⊥ a partir de $\mathscr{A}$ garante $\neg\mathscr{A}$, mas uma prova de ⊥ a partir de $\neg\mathscr{A}$ não garante que $\mathscr{A}$, mas somente $\neg\neg\mathscr{A}$. Portanto, para eles, $\mathscr{A}$ e $\neg\neg\mathscr{A}$ não são equivalentes.

[2] O nome latin para este princípio é *ex contradictione quod libet*, "de uma contradição, [segue-se] qualquer coisa".

poderosa. Resista a esta tentação: você apenas pode aplicá-la quando você já tiver $\bot$! E você obtém $\bot$ somente quando suas suposições são contraditórias.

Ainda assim, não é estranho que de uma contradição deveria seguir-se qualquer coisa? Não de acordo com a nossa noção de acarretamento e validade. Pois, $\mathscr{A}$ acarreta $\mathscr{B}$ sse não há valoração da letras sentenciais que faça $\mathscr{A}$ verdadeira e $\mathscr{B}$ falsa ao mesmo tempo. Ora, $\bot$ é uma contradição — nunca é verdadeira, qualquer que seja a valoração das letras sentenciais. Uma vez que não há valoração que faça $\bot$ verdadeira, não há também, é claro, valoração que faça $\bot$ verdadeira e $\mathscr{B}$ falsa! Assim, de acordo com nossa definição de acarretamento, $\bot \vDash \mathscr{B}$, seja o que for $\mathscr{B}$. Uma contradição acarreta tudo[3].

Estas são todas as regras básicas para o sistema de prova de LVF.

Exercícios Práticos

A. As seguintes duas 'provas' estão *incorretas*. Explique os erros cometidos.

1	$(\neg L \land A) \lor L$	
2	$\neg L \land A$	
3	$\neg L$	$\land$E 3
4	A	$\land$E 1
5	L	
6	$\bot$	$\neg$E 3, 5
7	A	X 6
8	A	$\lor$E 1, 2–4, 5–7

---

[3] Há alguns lógicos que não compram isto. Eles pensam que se $\mathscr{A}$ acarreta $\mathscr{B}$, deve existir alguma *conexão relevante* entre $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ — e não há entre $\bot$ e algumas sentença arbitrária $\mathscr{B}$. Desse modo, estes lógicos devenvolvem outras lógicas, chamadas "relevantes", nas quais a regra de explosão não é permitida.

$$\begin{array}{r|ll}
1 & A \wedge (B \wedge C) & \\
2 & (B \vee C) \to D & \\ \hline
3 & B & \wedge\text{E } 1 \\
4 & B \vee C & \vee\text{I } 3 \\
5 & D & \to\text{E } 4, 2
\end{array}$$

B. Estão faltando citações (regra e números de linha) nas seguintes três provas. Adicione-as para transformá-las em provas *bona fide*. Além disso, escreva o argumento que corresponda a cada prova.

$$\begin{array}{r|l}
1 & P \wedge S \\
2 & S \to R \\ \hline
3 & P \\
4 & S \\
5 & R \\
6 & R \vee E
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
1 & A \to D \\ \hline
2 & \mid\ \underline{A \wedge B} \\
3 & \mid\ A \\
4 & \mid\ D \\
5 & \mid\ D \vee E \\
6 & (A \wedge B) \to (D \vee E)
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
1 & \neg L \to (J \vee L) \\
2 & \neg L \\ \hline
3 & J \vee L \\
4 & \mid\ \underline{J} \\
5 & \mid\ J \wedge J \\
6 & \mid\ J \\
7 & \mid\ \underline{L} \\
8 & \mid\ \bot \\
9 & \mid\ J \\
10 & J
\end{array}$$

C. Dê uma prova para cada um dos seguintes argumentos:

1. $J \to \neg J \therefore \neg J$
2. $Q \to (Q \wedge \neg Q) \therefore \neg Q$
3. $A \to (B \to C) \therefore (A \wedge B) \to C$
4. $K \wedge L \therefore K \leftrightarrow L$

5. $(C \land D) \lor E \therefore E \lor D$
6. $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \therefore A \leftrightarrow C$
7. $\neg F \rightarrow G, F \rightarrow H \therefore G \lor H$
8. $(Z \land K) \lor (K \land M), K \rightarrow D \therefore D$
9. $P \land (Q \lor R), P \rightarrow \neg R \therefore Q \lor E$
10. $S \leftrightarrow T \therefore S \leftrightarrow (T \lor S)$
11. $\neg(P \rightarrow Q) \therefore \neg Q$
12. $\neg(P \rightarrow Q) \therefore P$

CAPÍTULO 16

Construindo provas

Não existe receita simples para encontrar provas e não há substituto para a prática. Aqui, todavia, estão algumas regras de ouro e estratégias para sempre ter em mente.

16.1 Trabalhando de trás para frente

Suponha que você esteja tentando encontrar uma prova de alguma conclusão $\mathscr{C}$, que será a última linha da sua prova. A primeira coisa a fazer é olhar para $\mathscr{C}$ e perguntar qual é a regra de introdução para o operador lógico principal dela. Isto já dá uma ideia do que deveria acontecer *antes* da última linha da prova. As justificações para a regra de introdução exige uma ou duas sentenças acima da última linha, ou uma ou duas subprovas. Além disso, a partir de $\mathscr{C}$, você pode falar quais são aquelas sentenças ou quais são as suposições e conclusões da(s) subprova(s). Então, podemos escrever aquelas sentenças ou esboçar as subprova(s) acima da última linha e tratar tudo isso como sendo seus novos objetivos.

Por exemplo: se sua conclusão é um condicional $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, planeje usar a regra →I. Isto requer que você comece uma subprova na qual você assuma $\mathscr{A}$.. A subprova deveria terminar com $\mathscr{B}$. Então, continue pensando sobre o que você deveria fazer para obter $\mathscr{B}$ dentro desta subprova e como você pode usar a suposição $\mathscr{A}$.

Se seu objetivo é uma conjunção, um condicional ou uma sentença negada, você deveria começar trabalhando de trás para frente. Descreveremos em detalhes o que você tem de fazer em cada um de stes casos.

Trabalhando de trás para frente a partir de uma conjunção

Se quisermos provar $\mathscr{A} \land \mathscr{B}$, trabalhar de trás para frente significa que deveríamos escrever $\mathscr{A} \land \mathscr{B}$ na parte inferior da nossa prova e tentar prová-la usando $\land$I. No topo, escreveremos as premissas da prova, se existirem. Então, na parte inferior, escrevemos a sentença que queremos provar. Se ela for uma conjunção, prová-la-emos usando $\land$I.

$$\begin{array}{l|ll}
1 & \mathscr{P}_1 & \\
 & \vdots & \\
k & \mathscr{P}_k & \\ \cline{2-2}
 & \vdots & \\
n & \mathscr{A} & \\
 & \vdots & \\
m & \mathscr{B} & \\
m+1 & \mathscr{A} \land \mathscr{B} & \land\text{I } n, m
\end{array}$$

Para $\land$I, precisamos provar $\mathscr{A}$ primeiro, então provar $\mathscr{B}$. Na última linha, temos de citar as linhas onde provamos (teremos provado) $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, e usamos $\land$Im, n. As partes da prova rotuladas por $\vdots$ ainda têm de ser preenchidas. Marcaremos os números de linha m, n por enquanto. Quando a prova estiver completa, estas metavariáveis podem ser substituídas por números reais.

Trabalhando de trás para frente a partir de um condicional

Se nosso objetivo é provar um condicional $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, teremos de usar $\to$I. Isto requer uma subprova iniciando com $\mathscr{A}$ e terminando com $\mathscr{B}$.

Estabeleceremos nossa prova da seguinte forma:

$$
\begin{array}{l|l|ll}
n & & \mathscr{A} & \\ \cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m & & \mathscr{B} & \\
m+1 & \multicolumn{2}{|l}{\mathscr{A} \to \mathscr{B}} & \to\text{I } n\text{–}m
\end{array}
$$

Novamente deixaremos metavariáveis 'm' e 'n' como reservadas para o número de linha. Registraremos a última inferência como →I, citando a subprova.

Trabalhando de trás para frente a partir de uma sentença negada

Se quisermos provar $\neg\mathscr{A}$, teremos de usar ¬I.

$$
\begin{array}{l|l|ll}
n & & \mathscr{A} & \\ \cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m & & \bot & \\
m+1 & \multicolumn{2}{|l}{\neg\mathscr{A}} & \neg\text{I } n\text{–}m
\end{array}
$$

Para ¬I, temos de iniciar uma subprova com suposição $\mathscr{A}$; a última linha da subprova tem de ser $\bot$. Citaremos a subprova e usaremos ¬I como a regra.

Ao trabalhar de trás para frente, continue fazendo isso até onde puder. Desse modo, se você está trabalhando de trás para frente para provar $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, estabeleça uma subprova na qual você você deseja provar $\mathscr{B}$. Olhe agora para $\mathscr{B}$. Se, digamos, ela for uma conjunção, trabalhe de trás para frente a partir dela e escreva os dois conjuntos dentro da subprova etc.

Trabalhando de trás para frente a partir de uma disjunção

É claro, você também pode trabalhar de trás para frente a partir de uma disjunção $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$, se isso é seu objetivo.

A regra ∨I requer que você tenha um dos disjuntos a fim de inferir $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$.

Desse modo, para trabalhar de trás para frente, escolha um disjunto e infira $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ dele e, então, continue buscando uma prova do disjunto que você escolheu:

$$\begin{array}{l|ll} & \vdots & \\ n & \mathscr{A} & \\ n+1 & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \vee\text{I } n \end{array}$$

Todavia, pode acontecer de você não ser capaz de provar o disjunto que você escolher. Neste caso, você tem de dar um passo atrás. Quando você não consegue preencher o $\vdots$, exclua tudo e tente com o outro disjunto:

$$\begin{array}{l|ll} & \vdots & \\ n & \mathscr{B} & \\ n+1 & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \vee\text{I } n \end{array}$$

Obviamente, excluir tudo e recomeçar é frustrante, assim você deveria evitar isso. Se, portanto, seu objetivo é uma disjunção, você *não* deveria *iniciar* trabalhando de trás para frente: tente trabalhar de forma direta primeiro e aplique a estratégia ∨I apenas quando trabalhar diretamente (e trabalhar de trás para frente usando ∧I, →I e ¬I) não funcionam mais.

16.2 Trabalhe diretamente a partir do que você tem

Sua prova pode ter premissas. E se você trabalhar de trás para frente a fim de provar um condicional ou uma sentença negada, você estabelecerá subprovas com uma suposição e buscará provar um sentença final na subprova. Estas premissas e suposições são sentenças que podemos trabalhar diretamente a fim de preencher os passos perdidos em sua prova. Isso significa aplicar regras de eliminação para os operadores principais destas sentenças. A forma das regras dir-lhe-ão o que você terá de fazer.

Trabalhando diretamente a partir de uma conjunção

Para trabalhar diretamente a partir de uma sentença da forma $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$, usamos $\wedge$E. Esta regra permite que façamos duas coisas: inferir $\mathscr{A}$ e inferir $\mathscr{B}$. Assim, em uma prova onde temos $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$, podemos trabalhar diretamente, inferindo $\mathscr{A}$ or $\mathscr{B}$ (ou ambos) imediatamente abaixo da conjunção.

$$\begin{array}{l|ll}
n & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \\
n+1 & \mathscr{A} & \wedge\text{E } n \\
n+2 & \mathscr{B} & \wedge\text{E } n
\end{array}$$

Em geral, ficará claro , por conta da situação particular, de qual dos dois $\mathscr{A}$ or $\mathscr{B}$ você precisará. Mas não há qualquer dano escrever ambos.

Trabalhando diretamente a partir de uma disjunção

Trabalhar diretmente a partit de uma disjunção funciona um pouco diferente. Para usar uma disjunção, usamos a regra $\vee$E. A fim de aplicar esta regra, não é suficiente saber quais são os disjuntos da disjunção que queremos usar. Também devemos ter em mente o que queremos provar. Suponha que queremos provar $\mathscr{C}$ e temos que trabalhar com $\mathscr{A} \vee B$ (ou seja, $\mathscr{A} \vee B$ pode ser uma premissa da prova, uma suposição de uma subprova ou algo já foi provado). Para conseguirmos aplicar a regra $\vee$E, teremos de estabelecer duas subprovas:

$$\begin{array}{l|l|ll}
n & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{A} \vee \mathscr{B}} & \\
n+1 & & \mathscr{A} & \\ \cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m & & \mathscr{C} & \\
m+1 & & \mathscr{B} & \\ \cline{3-3}
 & & \vdots & \\
k & & \mathscr{C} & \\
k+1 & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{C}} & \vee\text{E } n,\ (n+1)\text{–}m,\ (m+1)\text{–}k
\end{array}$$

A primeira subprova começa com o primeiro disjunto $\mathscr{A}$ e termina com a sentença que estamos buscando $\mathscr{C}$. A segunda subprova começa com o outro disjunto $\mathscr{B}$ e também termina com a sentença $\mathscr{C}$. Cada uma destas subprovas tem de ser preenchidas também. Podemos, então, justificar a sentença $\mathscr{C}$, usando-se ∨E e citndo-se a linha contendo $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ e as [linhas das] duas subprovas.

Trabalhando diretamente a partir de um condicional

A fim de usar um condicional $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$, você também precisará do antecedente $\mathscr{A}$ com intuito de aplicar →E. Desse modo, para trabalhar diretamente a partir de um condicional, você derivará $\mathscr{B}$ e justificará esta derivação por meio de →E e estabelecerá $\mathscr{A}$ como um novo objetivo secundário.

$$\begin{array}{l|ll}
n & \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B} & \\
 & \vdots & \\
m & \mathscr{A} & \\
m+1 & \mathscr{B} & \rightarrow\text{E } n, m
\end{array}$$

Trabalhando diretamente a partir de uma sentença negada

Finalmente, para usar uma sentença negada $\neg\mathscr{A}$, você deveria aplicar ¬E. Ela requer, além de $\neg\mathscr{A}$, também a sentença $\mathscr{A}$ sem a negação. A sentença que você irá obter é sempre a mesma: $\bot$. Assim, trabalhar diretamente a partir de uma sentença negada funciona especialmente bem dentro de uma subprova na qual você deseja usar ¬I (or IP). Você trabalha diretamente a partir de $\neg\mathscr{A}$, se você já tem $\neg\mathscr{A}$ e deseja provar $\bot$. Para fazer isso, você estabelece $\mathscr{A}$ como novo objetivo secundário.

$$\begin{array}{l|ll}
n & \neg\mathscr{A} & \\
 & \vdots & \\
m & \mathscr{A} & \\
m+1 & \bot & \neg\text{E } n, m
\end{array}$$

16.3 Estratégias em funcionamento

Suponha que desejamos mostrar que o argumento $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\therefore$ $A \wedge (B \vee C)$ é válido.

Iniciamos a prova escrevendo as premissas e a conclusão (em um pedaço de papel, seria desejável ter tanto espaço quanto for possível entre premissas e conclusão, portanto escreva as premissas no topo da página e a conlusão na parte inferior).

$$
\begin{array}{r|l}
1 & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ \hline
 & \vdots \\
n & A \wedge (B \vee C)
\end{array}
$$

Agora temos duas opções: ou trabalhar de trás para frente a partir da conclusão ou trabalhar diretamente a partir das premissas. Escolheremos a segunda estratégia: usamos a disjunção na linha 1, e estabelecemos as subprovas que precisamos para aplicar $\vee$E. A disjunção na linha 1 tem dois disjuntos: $A \wedge B$ e $A \wedge C$. Assim, neste caso, você tem de estabelecer duas subprovas, uma com suposição $A \wedge B$ e com última linha [na subprova] $A \wedge (B \vee C)$ e outra subprova com suposição $A \wedge C$ e última linha [na subprova] $A \wedge (B \vee C)$. A justificação para a conclusão será $\vee$E, citando a disjunção na linha 1 e as duas subprovas. Desse modo, sua prova terá a seguinte aparência:

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & \multicolumn{2}{l}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} & \\ \hline
2 & \mid & \underline{A \wedge B} & \\
 & \mid & \vdots & \\
n & \mid & A \wedge (B \vee C) & \\
n+1 & \mid & \underline{A \wedge C} & \\
 & \mid & \vdots & \\
m & \mid & A \wedge (B \vee C) & \\
m+1 & \multicolumn{2}{l}{A \wedge (B \vee C)} & \vee\text{E } 1,\ 2\text{–}n,\ n+1\text{–}m
\end{array}
$$

Agora temos duas tarefas separadas, a saber, preencher cada uma das duas subprovas. Na primeira subprova, trabalhamos de trás para frente a partir da conclusão $A \wedge (B \vee C)$. Isso é uma conjunção, assim dentro da primeira subprova, você terá dois objetivos secundários separados: provar A e provar $B \vee C$. Estes objetivos secundários permitem que você justifique a linha n usando $\wedge$I. Sua prova terá agora a seguinte aparência:

1	$\vert\; (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
2	$\vert\;\vert\; A \wedge B$	
	$\vert\;\vert\; \vdots$	
i	$\vert\;\vert\; A$	
	$\vert\;\vert\; \vdots$	
$n-1$	$\vert\;\vert\; B \vee C$	
n	$\vert\;\vert\; A \wedge (B \vee C)$	$\wedge$I i, $n-1$
$n+1$	$\vert\;\vert\; A \wedge C$	
	$\vert\;\vert\; \vdots$	
m	$\vert\;\vert\; A \wedge (B \vee C)$	
$m+1$	$\vert\; A \wedge (B \vee C)$	$\vee$E 1, 2–n, $(n+1)$–m

Imediatamente vemos que podemos obter a linha i a partir da linha 2 por meio de $\wedge$E. Assim, a linha i é, de fato, linha 3 e pode ser justificada por $\wedge$E a partir da linha 2. O outro objetivo secundário $B \vee C$ é uma disjunção. Aplicaremos a estratégica de trabalhar de trás para frente a partir da disjunção na linha $n-1$. Temos que escolher qual dos dois disjuntos B ou C selecionamos como objetivo secundário. Selecionar C não funcionaria e seríamos obrigados a voltar atrás. E você já pode ver que se você selecionar B como objetivo secundário, você poderia obter isso trabalhando diretamente a partir da conjunção $A \wedge B$ na linha 2. Assim, podemos completar a primeira subprova como se segue:

1	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
2	$\quad A \wedge B$	
3	$\quad A$	$\wedge$E 2
4	$\quad B$	$\wedge$E 2
5	$\quad B \vee C$	$\vee$I 4
6	$\quad A \wedge (B \vee C)$	$\wedge$I 3, 5
7	$\quad A \wedge C$	
	$\quad \vdots$	
m	$\quad A \wedge (B \vee C)$	
$m+1$	$A \wedge (B \vee C)$	$\vee$E 1, 2–6, 7–m

Como a linha 3, obtemos a linha 4 a partir da linha 2 por $\wedge$E. Linha 5 é justificada por $\vee$I a partir da linha 4, uma vez que estávamos trabalhando de trás para frente a partir de uma disjunção.

Isso é a primeira subprova. A segunda subprova é quase exatamente a mesma. Ela será deixada como exercício.

Lembre-se de que, quando iniciamos, tínhamos a opção de trabalhar diretamente a partir da premissa ou trabalhar de trás para frente a partir da conclusão e escolhemos a primeira opção. A segunda opção também leva a uma prova, mas ela parecerá diferente. Os primeiros passos seriam trabalhar de trás para frente a partir da conclusão e estabelecer duas provas secundárias A e $B \vee C$ e, então, trabalhar diretamente das premissas para prová-las. Por exemplo:

1	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
2	$\vert\; A \wedge B$	
	$\vert\; \vdots$	
k	$\vert\; A$	
$k+1$	$\vert\; A \wedge C$	
	$\vert\; \vdots$	
$n-1$	$\vert\; A$	
n	A	$\vee$E 1, 2–k, $(k+1)$–$(n-1)$
$n+1$	$\vert\; A \wedge B$	
	$\vert\; \vdots$	
l	$\vert\; B \vee C$	
$l+1$	$\vert\; A \wedge C$	
	$\vert\; \vdots$	
$m-1$	$\vert\; B \vee C$	
m	$B \vee C$	$\vee$E 1, $(n+1)$–l, $(l+1)$–$(m-1)$
$m+1$	$A \wedge (B \vee C)$	$\wedge$I n, m

Deixaremos para você preencher as partes que estão faltando indicadas por $\vdots$.

Daremos um outro exemplo para ilustrar como aplicar as estratégias para lidar com condicionais e negação. A sentença $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ é uma tautologia. Vejamos se podemos encontrar uma prova dela a partir de nenhuma premissa, usando as estratégias. Primeiro escrevemos a sentença no fim da folha. Uma vez que trabalhar diretamente não é uma opção (não há nada para trabalhar diretamente), trabalhamos de trás para frente e estipulamos uma subprova para estabelecer a sentença que desejamos $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$, usando →I. A suposição dessa subprova deve ser o antecedente do condicional que desejamos provar, ou seja, $A \rightarrow B$ e a última linha da subprova deve ser o consequente de $\neg B \to \neg A$.

1	$A \to B$	
	$\vdots$	
n	$\neg B \to \neg A$	
$n+1$	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	$\to$I 1–n

O novo objetivo $\neg B \to \neg A$ é novamente um condicional, assim trabalhando de trás para frente, estabelecemos um outra subprova:

1	$A \to B$	
2	$\neg B$	
	$\vdots$	
$n-1$	$\neg A$	
n	$\neg B \to \neg A$	$\to$I 2–$(n-1)$
$n+1$	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	$\to$I 1–n

A partir de $\neg A$, novamente trabalhamos de trás para frente. Para fazer isso, olhe para a regra $\neg$I. Ela requer um subprova com A como suposição e $\bot$ como a última linha dela. Assim, agora a prova é:

1	$A \to B$	
2	$\neg B$	
3	A	
	$\vdots$	
$n-2$	$\bot$	
$n-1$	$\neg A$	$\neg$I 3–$(n-2)$
n	$\neg B \to \neg A$	$\to$I 2–$(n-1)$
$n+1$	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	$\to$I 1–n

Agora nosso objetivo é provar ⊥. Quando discutimos como trabalhar diretamente a partir de uma sentença negada, dissemos acima que a regra ¬E permite que você prove ⊥, que é nosso objetivo n subprova mais interna. Desse modo, olhamos para um sentença negada com a qual podemos trabalhar diretamente: essa seria $\neg B$ na linha 2. Isso significa que temos de drivar B dentro da subprova, uma vez que ¬E exige não somente $\neg B$ (que já temos), mas também B. E B é obtida, por sua vez, trabalhando diretamente a partir de from $A \rightarrow B$, uma vez que →E permite que justifiquemos o consequente do condicional B por meio de →E. A regra →E tmbém requer o antecedente A do condicional, mas isso já está também disponível (na linha 3). Assim, terminamos com:

1	$A \rightarrow B$	
2	$\neg B$	
3	A	
4	B	→E 1, 3
5	$\bot$	¬E 2, 4
6	$\neg A$	¬I 3–5
7	$\neg B \rightarrow \neg A$	→I 2–6
8	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	→I 1–7

16.4 Trabalhando diretamente a partir de ⊥

Ao aplicar as estratégias, às vezes você se encontra em uma situação onde você pode justificar ⊥. Usando a regra da explosão, isto permitiria justificar *qualquer coisa*. Desse modo, ⊥ funciona como um curinga nas provas. Por exemplo, suponha que você deseja dar uma prova do argumento $A \vee B, \neg A \therefore B$. Você estabelece a sua prova, escrevendo as premissas $A \vee B$ e $\neg A$ no topo na linhas 1 e 2 e a conclusão B na parte inferior da página. B não tem conectivo principal, assim, você não pode trabalhar de trás para frente a partir dele. Em vez disso, você deve trabalhar diretamente a partir de $A \vee B$: Isso requer duas subprovas, assim:

1	$A \lor B$	
2	$\neg A$	
3	$\quad A$	
	$\quad \vdots$	
m	$\quad B$	
$m+1$	$\quad B$	
	$\quad \vdots$	
k	$\quad B$	
$k+1$	B	$\lor$E 1, 3–m, $(m+1)$–k

Observe que você tem $\neg A$ na linha 2 e A como suposição de nossa primeira subprova. Isso lhe dá $\bot$ usando $\neg$E e, a partir de $\bot$, você obtém a conclusão B da primeira subprova usando- X. Lembre-se de que você pode repetir uma sentença que você já tem, usando a regra de reiteração. Desse modo, a prova seria:

1	$A \lor B$	
2	$\neg A$	
3	$\quad A$	
4	$\quad \bot$	$\neg$E 2, 3
5	$\quad B$	X 4
6	$\quad B$	
7	$\quad B$	R 6
8	B	$\lor$E 1, 3–5, 6–7

16.5 Prosseguindo indiretamente

Proceed indirectly

Em muitos casos, as estratégias de trabalhar diretamente e de trás para frente serão, em geral, bem-sucedidas. Mas há casos onde elas não funcionam. Se você não consegue achar uma maneira de provar $\mathscr{A}$ diretamente, use, então, IP. Para fazer isto, estabeleça uma subprova na qual você assume $\neg\mathscr{A}$ e busque uma prova de $\bot$ dentro dessa subprova.

$$
\begin{array}{l|l|ll}
n & & \neg A & \\ \cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m & & \bot & \\ \cline{2-2}
m+1 & \mathscr{A} & & \text{IP } n\text{–}m
\end{array}
$$

Aqui, temos de iniciar uma subprova com a suposição $\neg\mathscr{A}$; a última linha da subprova tem de ser $\bot$. Citaremos a subprova e usaremos IP como regra. Na subprova, temos agora uma suposição adicional (na linha n) com a qual podemos trabalhar.

Suponha que usamos a estratégia de prova indireta ou estamos em alguma outra situação onde estamos buscando uma prova de $\bot$. Qual é um bom candidato? É claro, o candidato óbvio seria usar um sentença negad, uma vez que, como vimos acima, ¬E sempre produz $\bot$. Se você estabelece uma prova como acima, tentando provar $\mathscr{A}$ usando IP, você terá $\neg\mathscr{A}$ como suposição de sua subprova — desse modo, trabalhando diretamente dela para justificar $\bot$ dentro de sua subprova, você estabeleceria depois $\mathscr{A}$ como um objetivo dentro da sua subprova. Se você está usando esta estratégia IP, você encontrar-se-á na seguinte situação:

$$
\begin{array}{l|l|ll}
n & & \neg\mathscr{A} & \\ \cline{3-3}
 & & \vdots & \\
m-1 & & \mathscr{A} & \\
m & & \bot & \neg\text{E } n,\ m-1 \\ \cline{2-2}
m+1 & \mathscr{A} & & \text{IP } n\text{–}m
\end{array}
$$

Isto parece estranho: queríamos provar $\mathscr{A}$ e as estratégias falharam; assim, usamos IP como último recurso. E agora nos encontramos na mesma situação: estamos novamente buscando uma prova de $\mathscr{A}$. Mas observe que agora estamos *dentro* de uma subprova e, nessa subprova, temos uma suposição adicional ($\neg\mathscr{A}$) com a qual trabalhar que não tínhamos antes. Vamos olhar para um exemplo.

16.6 Prova indireta do terceiro excluído

A sentença $A \lor \neg A$ é uma tautologia e, assim, deveríamos ter uma prova mesmo sem premissas. Mas trabalhar de trás para frenete falha: para obter $A \lor \neg A$ usando $\lor$I , teríamos de provar A ou $\neg A$ — novamente, de nenhuma premissa. Nenhuma delas é uma tautologia, assim não conseguiremos prová-las. Trabalhando diretamente não funciona também, pois há nada com que trabalhar diretamente. Logo, a única opção é prova indireta.

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & \quad \underline{\neg(A \lor \neg A)} & \\
 & \quad \vdots & \\
m & \quad \bot & \\
m+1 & A \lor \neg A & \text{IP } 1\text{–}m
\end{array}
$$

Agora, temos algo com que trabalhar diretamente: a suposição $\neg(A \lor \neg A)$. Para usá-la, justificamos $\bot$ por $\neg$E, citando a suposição na linha 1 e, também, a sentença não-negada $A \lor \neg A$, que ainda será provada.

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & \quad \underline{\neg(A \lor \neg A)} & \\
 & \quad \vdots & \\
m-1 & \quad A \lor \neg A & \\
m & \quad \bot & \neg\text{E } 1,\ m-1 \\
m+1 & A \lor \neg A & \text{IP } 1\text{–}m
\end{array}
$$

No início, trabalhar de trás para frente para provar $A \lor \neg A$ não funcionou. Mas, agora, estamos em uma situação diferente: desejamos provar $A \lor \neg A$ dentro de uma subprova. Em geral, ao lidar com novos objetivos, deveríamos voltar atrás e iniciar com as estratégias básicas. Neste caso, em primeiro lugar, deveríamos tentar trabalhar de trás para frente a partir da disjunção $A \lor \neg A$, ou seja, temos de selecionar um disjunto e tentar prová-la [a disjunção]. Selecionemos $\neg A$. Isto permitiria que justificássemos $A \vee \neg A$ na linha $m-1$, usando $\vee$I. Então, trabalhando de trás para frente a partir de $\neg A$, iniciamos uma outra subprova a fim de justificar $\neg A$, usando $\neg$I. Essa subprova deve ter A como suposição e $\perp$ como última linha dela.

1	│ │ $\neg(A \vee \neg A)$	
2	│ │ │ A	
	│ │ │ $\vdots$	
$m-3$	│ │ │ $\perp$	
$m-2$	│ │ $\neg A$	$\neg$I 2–$(m-3)$
$m-1$	│ │ $A \vee \neg A$	$\vee$I $m-2$
m	│ │ $\perp$	$\neg$E 1, $m-1$
$m+1$	│ $A \vee \neg A$	$\neg$I 1–m

Dentro desta nova subprova, precisamos justificar novamente $\perp$. A melhor maneira de se fazer isto é trabalhar diretamente a partir de uma sentença negada; $\neg(A \vee \neg A)$ na linha 1 é a única sentença negada que podemos usar. A sentença não-negada correspondente $A \vee \neg A$, todavia, segue-se diretamente de A (a qual temos na linha 2) por $\vee$I. Nossa prova completa é:

1	│ │ $\neg(A \vee \neg A)$	
2	│ │ │ A	
3	│ │ │ $A \vee \neg A$	$\vee$I 2
4	│ │ │ $\perp$	$\neg$E 1, 3
5	│ │ $\neg A$	$\neg$I 2–4
6	│ │ $A \vee \neg A$	$\vee$I 5
7	│ │ $\perp$	$\neg$E 1, 6
8	│ $A \vee \neg A$	$\neg$I 1–7

Exercícios Práticos

A. Use as estratégias para encontrar provas para cada um dos seguintes argumentos:

1. $A \to B, A \to C \therefore A \to (B \wedge C)$
2. $(A \wedge B) \to C \therefore A \to (B \to C)$
3. $A \to (B \to C) \therefore (A \to B) \to (A \to C)$
4. $A \vee (B \wedge C) \therefore (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
5. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \therefore A \wedge (B \vee C)$
6. $A \vee B, A \to C, B \to D \therefore C \vee D$
7. $\neg A \vee \neg B \therefore \neg(A \wedge B)$
8. $A \wedge \neg B \therefore \neg(A \to B)$

B. Formule estratégias trabalhando de trás para frente e diretamente a partir de $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$.

C. Use as estratégias para encontrar provas para cada uma das seguintes sentenças:

1. $\neg A \to (A \to \bot)$
2. $\neg(A \wedge \neg A)$
3. $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$
4. $\neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$
5. $(A \vee \neg B) \to (A \to B)$

Uma vez que estas deveriam ser provas das sentenças a partir de nenhuma premissa, você iniciará com a respectiva sentença na *parte inferior* da prova, que não terá premissas.

D. Use as estratégias para encontrar provas para cada um dos seguintes argumentos e sentenças:

1. $\neg\neg A \to A$
2. $\neg A \to \neg B \therefore B \to A$
3. $A \to B \therefore \neg A \vee B$
4. $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$
5. $A \to (B \vee C) \therefore (A \to B) \vee (A \to C)$
6. $(A \to B) \vee (B \to A)$
7. $((A \to B) \to B) \to B$

Todas estas exigirão a estratégia IP. As últimas três são especialmente difíceis.

CAPÍTULO 17

Regras adicionais para LVF

Em §15, introduzimos as regras básicas de nosso sistema prova para LVF. Nesta seção, adicionaremos algumas regras adicionais ao nosso sistema. Nosso sistema de prova estendido é um pouco mais fácil de se trabalhar (todavia, em §19, veremos que elas não são, estritamente falando, necessárias).

17.1 Silogismo disjuntivo

Aqui está uma forma de argumento muito natural.

> Elizabeth está em Massachusetts ou em New York. Ela não está em New York. Logo, ela está em Massachusetts.

Este padrão de inferência é chamado *silogismo disjuntivo*. Ela será adicionada ao nosso sistema de prova como se segue:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \\ n & \neg\mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} & \text{DS } m, n \end{array}$$

e

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \\ n & \neg\mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} & \text{DS } m, n \end{array}$$

Como de costume, a disjunção e a negação de um dos disjuntos podem ocorrer em qualquer ordem e não precisam ser adjacentes. Entretanto, sempre citamos a disjunção primeiro.

17.2 Modus tollens

Um outro padrão útil de inferência é incorporado no seguinte argumento:

> Se Mitt venceu a eleição, então ele está na Casa Branca. Ele não está na Casa Branca. Logo, ele não venceu a eleição.

Este padrão de inferência é chamado *modus tollens.* A regra correspondente é:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \to \mathscr{B} & \\ n & \neg\mathscr{B} & \\ & \neg\mathscr{A} & \text{MT } m, n \end{array}$$

Como já dito, as premissas podem ocorrer em qualquer ordem, mas sempre citamos o condicional primeiro.

17.3 Eliminação da dupla negação

Uma outra regra útil é a *eliminação da dupla negação.* Esta regra faz exatamente o que ela diz:

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\neg\mathscr{A} & \\ & \mathscr{A} & \text{DNE } m \end{array}$$

A justificação para isto é que, na linguagem natural, em geral, duplas negações cancelam-se.

Dito isso, você deveria ser consciente que contexto e ênfase podem impedi-las de funcionar assim. Considere: 'Jane não é não feliz'. É plausível argumentar que não podemos inferir 'Jane é feliz', uma vez que a primeira sentença poderia ser entendida como significando o mesmo que 'Jane não é *in*feliz'. Isto é compatível com 'Jane está em um estado de infiferença profunda'. Em geral, ir pata LVF força-nos a sacrificar certas nuances das expressões do Português.

17.4 Terceiro excluído

Suponha que podemos mostrar que se estiver ensolarado, então Bill levará um guarda-chuva (por medo de queimadura). Suponha também que podemos mostrar que se não estiver ensolarado, então Bill levará guarda-chuva (por medo da chuva). Ora, não há terceira via de como estará o tempo. Assim, *seja como for o tempo*, Bill levará um guarda-chuva.

Esta linha de pensamento motiva a seguinte regra:

$$\begin{array}{r|l|ll} i & & \mathscr{A} & \\ \cline{3-3} j & & \mathscr{B} & \\ k & & \neg\mathscr{A} & \\ \cline{3-3} l & & \mathscr{B} & \\ & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{B}} & \text{LEM } i\text{–}j,\ k\text{–}l \end{array}$$

Às vezes, a regra é chamada a lei do *terceiro excluído*, uma vez que ela expressa resumidamente a idea segundo a qual $\mathscr{A}$ pode ser verdadeira ou $\neg\mathscr{A}$ pode ser verdadeira, mas não há uma terceiro caminho onde nenhum deles é verdadeiro[1]. Podem existir tantas linhas quantas você quiser entre i e j e tantas linhas quantas você quiser entre k e l. Além disso, as subprovas podem aparecer em qualquer ordem e a segunda prova não precisar aparecer imdiatamente após a primeira.

Para ver a regra em ação, considere:

$$P \therefore (P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$$

Aqui está uma prova que corresponde ao argumento:

1	P		
2		D	
3		$P \wedge D$	$\wedge$I 1, 2
4		$(P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$	$\vee$I 3
5		$\neg D$	
6		$P \wedge \neg D$	$\wedge$I 1, 5
7		$(P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$	$\vee$I 6
8	$(P \wedge D) \vee (P \wedge \neg D)$		LEM 2–4, 5–7

Aqui está um outro exemplo:

---

[1] Às vezes, você pode encontrar lógicos e filósofos falando sobre “tertium non datur”. Isso é o mesmo princípio que o terceiro excluído; essa expressão significa “nenhum terceiro caminho”. Lógicos que têm reservas sobre prova indireta também têm reservas sobre LEM

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & \underline{A \to \neg A} & & \\
2 & & \vert\ \underline{A} & \\
3 & & \vert\ \neg A & \to\text{E } 1, 2 \\
4 & & \vert\ \underline{\neg A} & \\
5 & & \vert\ \neg A & \text{R } 4 \\
6 & \neg A & & \text{LEM } 2\text{–}3, 4\text{–}5
\end{array}
$$

17.5 Regras de De Morgan

Nossas regras adicionais finais são chamadas Leis de De Morgan (devido a Augustus De Morgan). A forma das regras deveria ser familiar a partir das tabelas de verdade.

A primeira regra de De Morgan é:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg(\mathscr{A} \land \mathscr{B}) & \\
 & \neg\mathscr{A} \lor \neg\mathscr{B} & \text{DeM } m
\end{array}
$$

A segunda regra de De Morgan é a inversa da primeira:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg\mathscr{A} \lor \neg\mathscr{B} & \\
 & \neg(\mathscr{A} \land \mathscr{B}) & \text{DeM } m
\end{array}
$$

A terceira regra de De Morgan é a *dual* da primeira:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \neg(\mathscr{A} \lor \mathscr{B}) & \\
 & \neg\mathscr{A} \land \neg\mathscr{B} & \text{DeM } m
\end{array}
$$

E a quarta é a inversa da terceira:

m | $\neg\mathscr{A} \land \neg\mathscr{B}$
| $\neg(\mathscr{A} \lor \mathscr{B})$ DeM m

Estas são todas as regras adicionais de nosso sistema de prova para LVF.

Exercícios Práticos

A. Nas seguintes provas, as citações (regras e números de linhas) estão faltando. Adicione-as onde elas são necessárias:

1.
1 | $W \to \neg B$
2 | $A \land W$
3 | $B \lor (J \land K)$
4 | W
5 | $\neg B$
6 | $J \land K$
7 | K

2.
1 | $L \leftrightarrow \neg O$
2 | $L \lor \neg O$
3 | | $\neg L$
4 | | $\neg O$
5 | | L
6 | | $\bot$
7 | $\neg\neg L$
8 | L

3.

$$
\begin{array}{rl}
1 & \mid Z \rightarrow (C \land \neg N)\\
2 & \mid \underline{\neg Z \rightarrow (N \land \neg C)}\\
3 & \mid \; \mid \underline{\neg(N \lor C)}\\
4 & \mid \; \mid \neg N \land \neg C\\
5 & \mid \; \mid \neg N\\
6 & \mid \; \mid \neg C\\
7 & \mid \; \mid \; \mid \underline{Z}\\
8 & \mid \; \mid \; \mid C \land \neg N\\
9 & \mid \; \mid \; \mid C\\
10 & \mid \; \mid \; \mid \bot\\
11 & \mid \; \mid \neg Z\\
12 & \mid \; \mid N \land \neg C\\
13 & \mid \; \mid N\\
14 & \mid \; \mid \bot\\
15 & \mid \neg\neg(N \lor C)\\
16 & \mid N \lor C
\end{array}
$$

B. Dê uma prova para cada um destes argumentos:

1. $E \lor F, F \lor G, \neg F \therefore E \land G$
2. $M \lor (N \rightarrow M) \therefore \neg M \rightarrow \neg N$
3. $(M \lor N) \land (O \lor P), N \rightarrow P, \neg P \therefore M \land O$
4. $(X \land Y) \lor (X \land Z), \neg(X \land D), D \lor M \therefore M$

CAPÍTULO 18

Conceitos prova-teóricos

Neste capítulo, introduziremos um novo vocabulário. A expressão seguinte:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{C}$$

significa que há alguma prova que inicia com suposições entre $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ e termina com $\mathscr{C}$ (e não contém quaisquer suposições exceto aquelas com as quais iniciamos)). De forma derivada, escreveremos:

$$\vdash \mathscr{A}$$

significando que há uma prova de $\mathscr{A}$ a partir de nenhuma suposição.

O símbolo '$\vdash$' é chamado *catraca* simples. Desejamos enfatizar que isto não é o símbolo da *dupla catraca* ('$\vDash$') que introduzimos no capítulo 11 para simbolizar acarretamento. A catraca simples, '$\vdash$', lida com a existência de provas; a dupla catraca, '$\vDash$', lida com a existência de valorações (ou interpetações, quando usada para LPO). *Elas são noções muito diferentes.*

Uma vez que temos nosso símbolo '$\vdash$', podemos introduzir mais alguma terminologia. Para dizer que há uma prova de $\mathscr{A}$ com nenhuma suposição não-descartada, escrevemos: $\vdash \mathscr{A}$. Neste caso, dizemos que $\mathscr{A}$ é um TEOREMA.

> $\mathscr{A}$ é um TEOREMA sse $\vdash \mathscr{A}$

Para ilustrar isto, suponha que desejamos mostrar que '$\neg(A \wedge \neg A)$' é um teorema. Desse modo, precisamos de uma prova de '$\neg(A \wedge \neg A)$', que tem *nenhum* suposição não-descartada. Todavia, uma vez que desejamos provar uma sentença cujo operador lógico principal é a negação, desejamos iniciar com uma *subprova* dentro da qual assumimos '$A \wedge \neg A$' e mostramos que esta suposição leva a uma contradição. Dito isso, então, a prova é assim:

1	$\quad A \wedge \neg A$	
2	$\quad A$	$\wedge$E 1
3	$\quad \neg A$	$\wedge$E 1
4	$\quad \bot$	$\neg$E 3, 2
5	$\neg(A \wedge \neg A)$	$\neg$I 1–4

Portanto, provamos '$\neg(A \wedge \neg A)$' sem usar suposições (não-descartadas). Este teorema particular é uma instância do que é chamado, às vezes, *Lei de não-Contradição.*

Para mostrar que algo é um teorema, você tem de encontrar apenas uma prova adequada. É tipicamente muito mais difícil mostrar que algo *não* um teorema. Para fazer isso, você teria de demonstrar não apenas que certas estratégias de prova falham, mas que *nenhuma* prova é possível. Mesmo se você falha na tenttiva de provar um sentença em milhares de formas diferentes, talvez a prova seja apenas muito longa e complexa para você entender.

Aqui está uma nova terminologia:

Duas sentenças $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são DEDUTIVAMENTE EQUIVALENTES sse cada uma pode ser provada da outra; ou seja, $\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$ e $\mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$.

Como no caso de mostrar que uma sentença é um teorema, é relativamente fácil mostrar que duas sentenças são dedutivamente equivalentes: ela apenas requer um par de provas. Mostar que sentenças *não* são dedutivamente equivalentes seria muito mais difícil: é tão difícil quanto mostrar que uma sentença não é um teorema.

Aqui está uma terceira terminologia relacionada:

As sentenças $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ são DEDUTIVAMENTE INCONSISTENTES sse uma contradição pode ser provada a partir delas, ou seja, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \bot$. Se elas não são INCONSISTENTES, chamamo-las DEDUTIVAMENTE CONSISTENTES.

É fácil mostrar que algumas sentenças são dedutivamente inconsistentes: você precisa apenas provar um contradição a partir da suposição de todas as sentenças. Mostrar que algumas sentenças não são dedutivamente inconsistentes é muito mais difícil. Exigiria mais do que apenas fornecer uma prova ou duas; exigiria mostrar que nenhuma prova de um certo tipo é *possível*.

Esta tabela resume se uma ou duas provas são suficientes ou se devemos raciocinar todas as provas possíveis.

	Sim	**Não**
teorema?	uma prova	todas provas possíveis
inconsistente?	uma prova	todas provas possíveis
equivalent?	duas provas	todas provas possíveis
consistent?	todas provas possíveis	uma prova

Exercícios Práticos

A. Mostre que cada uma das seguintes sentenças é um teorema:

1. $O \rightarrow O$
2. $N \vee \neg N$
3. $J \leftrightarrow [J \vee (L \wedge \neg L)]$
4. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

B. Apresente provas para mostrar cada um dos seguintes:

1. $C \rightarrow (E \wedge G), \neg C \rightarrow G \vdash G$
2. $M \wedge (\neg N \rightarrow \neg M) \vdash (N \wedge M) \vee \neg M$
3. $(Z \wedge K) \leftrightarrow (Y \wedge M), D \wedge (D \rightarrow M) \vdash Y \rightarrow Z$
4. $(W \vee X) \vee (Y \vee Z), X \rightarrow Y, \neg Z \vdash W \vee Y$

C. Mostre que cada um dos seguintes pares de sentenças são dedutivamente equivalentes:

1. $R \leftrightarrow E, E \leftrightarrow R$
2. $G, \neg\neg\neg\neg G$
3. $T \rightarrow S, \neg S \rightarrow \neg T$
4. $U \rightarrow I, \neg(U \wedge \neg I)$
5. $\neg(C \rightarrow D), C \wedge \neg D$
6. $\neg G \leftrightarrow H, \neg(G \leftrightarrow H)$

D. Se você sabe que $\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$, o que você pode dizer sobre $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{C}) \vdash \mathscr{B}$? O que você pode dizer sobre $(\mathscr{A} \vee \mathscr{C}) \vdash \mathscr{B}$? Explique suas respostas.

E. Neste capítulo, reivindicamos que é difícil mostrar que duas sentenças não são dedutivamente equivalentes, como também é mostrar que uma sentença não é teorema. Por que reivindicamos isto? (*Dica*: pense em um sentença que seria um teorema sse $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ fossem dedutivamente equivalentes).

CAPÍTULO 19

Regras derivadas

Nesta seção, veremos por que introduzimos as regras de nosso sistema de prova em dois lotes separados. Em particular, desejamos mostrar que as regras adicionais de §17 não são, estritamente falando, necessárias, mas podem ser derivadas a partir de regras básicas de §15.

19.1 Derivação de reiteração

Para ilustrar o que significa derivar uma regra de outras regras, considere primeiro a reiteração. É uma regra básica do sistema, mas também não é necessária. Suponha que você tenha alguma sentença em alguma linha da sua dedução:

$$\begin{array}{r|l} m & \mathscr{A} \end{array}$$

Agora, você deseja repetir $\mathscr{A}$ em alguma linha k. Poderíamos apenas invocar a regra R. Mas, da mesma forma, você pode fazer isto com outras regras básicas de §15:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ k & \mathscr{A} \wedge \mathscr{A} & \wedge\text{I } m, m \\ k+1 & \mathscr{A} & \wedge\text{E } k \end{array}$$

Esclarecendo: isto não é uma prova. Em vez disso, é um *esquema* de prova. Acima de tudo, ela usa uma variável '$\mathscr{A}$', em vez de uma sentença de LVF, mas o ponto é simples: qualquer que seja a sentença de LVF que substitua '$\mathscr{A}$' e quaisquer que sejam as linhas que estávamos trabalhando, poderíamos produzir uma prova bona fide. Assim, podemos pensar nisto como uma receira para produzir provas.

De fato, é uma receita que nos mostra que tudo que podemos provar usando a regra R podemos provar (com mais uma linha) usando apenas as regras básicas de §15 sem R. Isso é o que significa dizer que a regra R pode ser derivada de outras regras básicas: tudo que pode ser justificado usando R pode ser justificado usando somente as outras regras básicas.

19.2 Derivação do silogismo disjuntivo

Suponha que você esteja em uma prova e que você tenha algo desta forma:

m	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
n	$\neg\mathscr{A}$

Agora, você deseja, na linha k, provar $\mathscr{B}$. Você pode fazer isto com a regra de DS, introduzida em §17, mas, da mesma forma, podemos fazer isto com as regras básicas de §15:

m	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$		
n	$\neg\mathscr{A}$		
k		$\mathscr{A}$	
$k+1$		$\bot$	$\neg$E n, k
$k+2$		$\mathscr{B}$	X $k+1$
$k+3$		$\mathscr{B}$	
$k+4$		$\mathscr{B}$	R $k+3$
$k+5$	$\mathscr{B}$		$\vee$E m, k–$k+2$, $k+3$–$k+4$

Assim, a regra DS pode ser derivada novamente a partir de nossas regras mais básicas. Adicioná-la a nosso sistema não produzirá qualquer nova prova. Toda vez que você usa a regra DS, você sempre poderia tomar algumas linhas extras e provar a mesma coisa usando somente nossas regras básicas. DS é uma regra *derivada*.

19.3 Derivação de Modus Tollens

Suponha que você tenha o seguinte na sua prova:

m	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$
n	$\neg\mathscr{B}$

Você deseja agora, na linha k, provar $\neg\mathscr{A}$. Você pode fazer isto com a regra de MT, introduzida em §17. Igualmente, você pode fazer isto com as regras *básicas* de §15:

m	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	
n	$\neg\mathscr{B}$	
k	$\vert\ \mathscr{A}$	
$k+1$	$\vert\ \mathscr{B}$	$\to$E m, k
$k+2$	$\vert\ \bot$	$\neg$E $n, k+1$
$k+3$	$\neg\mathscr{A}$	$\neg$I k–$k+2$

Novamente, a regra de MT pode ser derivada a partir das regras básicas de §15.

19.4 Derivação da eliminação da dupla negação

Considere o seguinte esquema de dedução:

$$
\begin{array}{r|l l}
m & \neg\neg\mathscr{A} & \\
k & \quad \vert\; \underline{\neg\mathscr{A}} & \\
k+1 & \quad \vert\; \bot & \neg\text{E } m,\ k \\
k+2 & \mathscr{A} & \text{IP } k\text{–}k+1
\end{array}
$$

Novamente, podemos derivar a regra DNE a partir das regras *básicas* de §15.

19.5 Derivação do terceiro excluído

Suponha que você deseja provar algo usando a regra LEM, ou seja, você tem em sua prova

$$
\begin{array}{r|l}
m & \quad \vert\; \underline{\mathscr{A}} \\
n & \quad \vert\; \mathscr{B} \\
k & \quad \vert\; \underline{\neg\mathscr{A}} \\
l & \quad \vert\; \mathscr{B}
\end{array}
$$

Você deseja agora, na linha $l+1$, provar $\mathscr{B}$. A regra LEM em §17 permitiria que você fizesse isso. Mas você pode fazer isto com as regras *básicas* de §15?

Uma opção é provar primeiro $\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{A}$, e, então, aplicar $\vee$E, ou seja, prova por casos:

$$
\begin{array}{r|l l}
m & \quad \vert\; \underline{\mathscr{A}} & \\
n & \quad \vert\; \mathscr{B} & \\
k & \quad \vert\; \underline{\neg\mathscr{A}} & \\
l & \quad \vert\; \mathscr{B} & \\
 & \vdots & \\
i & \mathscr{A} \vee \neg\mathscr{A} & \\
i+1 & \mathscr{B} & \vee\text{E } i,\ m\text{–}n,\ k\text{–}l
\end{array}
$$

(Demos uma prova de $\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{A}$ usando apenas nossas regras básicas em §16.6).

Aqui está outra maneira que é um pouco mais complicada que as anteriores. O que você tem de fazer é incorpor (aninhar?) ar duas subprovas dentro de uma outra subprova. A suposição da subprova será $\neg\mathscr{B}$ e a última linha será $\perp$. Assim, a subprova completa é o tipo que você precisa para concluir $\mathscr{B}$ usando IP. Dentro da prova, você teria de fazer um pouco mais de trabalho para obter $\perp$:

m	│ │ $\neg\mathscr{B}$	
$m+1$	│ │ │ $\mathscr{A}$	
	│ │ │ ⋮	
n	│ │ │ $\mathscr{B}$	
$n+1$	│ │ │ $\perp$	$\neg$E m, n
$n+2$	│ │ │ $\neg\mathscr{A}$	
	│ │ │ ⋮	
l	│ │ │ $\mathscr{B}$	
$l+1$	│ │ │ $\perp$	$\neg$E m, l
$l+2$	│ │ $\neg\mathscr{A}$	$\neg$I $(m+1)$–$(n+1)$
$l+3$	│ │ $\neg\neg\mathscr{A}$	$\neg$I $(n+2)$–$(l+1)$
$l+4$	│ │ $\perp$	$\neg$E $l+3$, $l+2$
$l+5$	│ $\mathscr{B}$	IP m–$(l+4)$

Note que, porque adicionamos um suposição no topo e conclusões adicionais dentra da subprova, os números de linha mudaram. Você pode ter de ficar atento nisto por enquanto, antes que você entenda o que está acontecendo.

19.6 Derivation of De Morgan rules

Aqui está uma demonstração de como poderíamos derivar a primeira regra de De Morgan:

m	$\neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$			
k		$\mathscr{A}$		
$k+1$			$\mathscr{B}$	
$k+2$			$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$	$\wedge$I k, $k+1$
$k+3$			$\bot$	$\neg$E m, $k+2$
$k+4$		$\neg\mathscr{B}$		$\neg$I $k+1$–$k+3$
$k+5$		$\neg\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B}$		$\vee$I $k+4$
$k+6$		$\neg\mathscr{A}$		
$k+7$		$\neg\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B}$		$\vee$I $k+6$
$k+8$	$\neg\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B}$			LEM k–$k+5$, $k+6$–$k+7$

Aqui está a demonstração de como poderíamos derivar a segunda regra de De Morgan:

m	$\neg\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B}$			
k		$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$		
$k+1$		$\mathscr{A}$		$\wedge$E k
$k+2$		$\mathscr{B}$		$\wedge$E k
$k+3$			$\neg\mathscr{A}$	
$k+4$			$\bot$	$\neg$E $k+3$, $k+1$
$k+5$			$\neg\mathscr{B}$	
$k+6$			$\bot$	$\neg$E $k+5$, $k+2$
$k+7$		$\bot$		$\vee$E m, $k+3$–$k+4$, $k+5$–$k+6$
$k+8$	$\neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$			$\neg$I k–$k+7$

Demonstração similares podem ser oferecidas para explicar como derivar a terceira e a quarta regras de De Morgan.

Exercícios Práticos

A. Forneça esquemas de prova que justifiquem a adição da terceira e quarta regras de De Morgan como regras derivadas.

B. As provas que você ofereceu em respostas aos exercícios práticos de §§17–18 usavam regras derivadas. Substitua o uso das regras derivadas em tais provas por apenas regras básicas. Você encontrará alguma 'repetição' nas provas resultantes; em tais casos, ofereça uma prova simplificada usando somente as regras básicas (isto dar-lhe-á um sentido do poder das regras derivadas e de como todas as regras interagem).

C. Dê uma prova de $\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{A}$. Então dê uma prova que *use apenas as regras básicas.*

D. Mostre que se você tivesse LEM como uma regra básica, você poderia justificar IP como regra derivada. Ou seja, suponha que você tivesse a prova:

$$\begin{array}{r|l|l}
m & & \neg\mathscr{A} \\ \cline{3-3}
 & & \dots \\
n & & \bot
\end{array}$$

Como você poderia usá-la para provar $\mathscr{A}$ sem usar IP, mas usando LEM assim como todas as regras básicas?

E. Dê uma prova da primeira regra de De Morgan, mas usando apenas regras básicas, em particular, *sem usar LEM* (é claro, você pode combinar a prova usando LEM com a prova *de* LEM. Tente encontrar uma prova direta).

CAPÍTULO 20

Corretude e completude

Em §18, vimos que poderíamos usar derivações para testar os mesmos conceitos que testamos usando tabelas de verdade. Não somente poderíamos usar derivações para prvar que um argumento é válido, também poderíamos usá-las para testar se uma sentença é uma tautologia ou se um par de sentenças são equivalentes. Também começamos usar a catraca simples da mesma forma que usamos a dupla catraca. Se pudéssemos provar que $\mathscr{A}$ era uma tautologia com tabela de verdade, escreveríamos $\vDash \mathscr{A}$ e se pudéssemos provar isso usando uma derivação, escreveríamos $\vdash \mathscr{A}$.

Você pode ter se perguntado naquele momento se os dois tipos de catracas sempre funcionavam da mesma forma. Se você pode mostrar que $\mathscr{A}$ é uma tautologia usando tabelas de verdade, você pode também sempre mostrar que ela é um teorema usando uma derivação? O inverso é verdadeiro? Estas coisas são verdadeiras para argumentos e pares de sentenças equivalentes? Como se vê, a resposta a todas estas questões e muitas outras semelhantes a estas é sim. Podemos mostrar isto definindo todos estes conceitos separadamente e, então, provando que eles são equivalentes. Ou seja, imaginamos que temos, de fato, duas noções de validade — ou seja, válido$_{\vDash}$ e válido$_{\vdash}$ — e, então, mostramos que os dois conceitos sempre funcionam da mesma forma.

Para começar, precisamos definir todos os nossos conceitos lógicos separadamente em relação às tabelas de verdade e às derivações.

Muito deste trabalho já foi feito. Lidamos com todas as definições relacionadas às tabelas de verdade em §11. Já demos também definições sintáticas de tautologias (teoremas) e pares de sentenças logicamente equivalentes. As outras definições seguem-se naturalmente. Para muitas propriedades lógicas, podemos elaborar um teste usando derivações e aquelas propriedades que não podemos testar diretamente podem ser definidas em termos dos conceitos que podemos definir.

Por exemplo, definimos um teorema como uma sentença que pode ser derivada sem quaisquer premissas (p. 150). Uma vez que a negação de uma contradição é uma tautologia, podemos definir uma CONTRADIÇÃO SINTÁTICA EM LVF como uma sentença cuja negação pode ser derivada sem quaisquer premissas. A definição sintática de uma sentença contingentes é um pouco diferente. Não temos qualquer método prático, finito para provar que uma sentença é contingente usando derivações, a maneira na qual fizemos isso foi usando tabelas de verdade. Desse modo, temos de nos contentar com a definição de "sentença contingente" negativamente. Uma sentença é SINTATICAMENTE CONTINGENTE EM LVF, se ela não é um teorema nem uma contradição.

Uma coleção de sentenças é DEDUTIVAMENTE INCONSISTENTE EM LVF sse podemos derivar uma contradição dessa coleção. Consistência, por outro lado, é similar à contingência, já que não temos método finito prático para testá-la diretamente. Desse modo, novamente, temos de definir um termo negativamente. Uma coleção de sentenças é DEDUTIVAMENTE CONSISTENTE EM LVF sse a coleção não é dedutivamente inconsistente.

Enfim, uma argumento é DEDUTIVAMENTE VÁLIDO EM LVF sse há uma derivação da conclusão dele a partir das premissas. Todas estas definições são dadas na Tabela 20.1.

Todos nossos conceitos foram agora definidos semantica e sintaticamente. Como podemos provar que estas definições sempre funcionam da mesma forma? Uma prova completa aqui irá muito além do escopo deste livro. Entretanto, podemos esboçar como ela seria. Será nosso foco mostrar que as duas noções de validade são equivalentes. Desse fato, seguir-se-ão rapidamente os outros conceitos. A prova terá de ir em duas direções. Em primeiro lugar, teremos de mostrar que coisas que são sintaticamente válidas serão também semanticamente válidas. Em outras palavras, tudo que podemos provar usando derivações poderia também ser provado usando tabelas de verdade.

Conceito	**Definição semântica (tabela de verdade)**	**Definição sintática (prova-teórica)**
Tautologia	Uma sentença cuja tabela de verdade tem apenas Vs sob o conectivo principal	Uma sentença que pode ser derivada sem quaisquer premissas
Contradição	Uma sentença cuja tabela de verdade tem apenas Fs sob o conectivo principal	Uma sentença cuja negação pode ser derivada sem quaisquer premissas
Sentença contingente	Uma sentença cuja tabela de verdade contém tanto Vs como Fs sob o conectivo principal	Uma sentença que é nem teorema nem contradição
Sentenças equivalentes	As colunas sob os conectivos principais são idênticos	As sentenças podem ser derivadas uma da outra e vice-versa
Sentenças insatisfatíveis/inconsistentes	Sentenças que não têm uma única linha nas tabelas de verdade delas onde elas são todas verdadeiras	Sentenças a partir das quais se pode derivar uma contradição
Sentenças satisfatíveis/consistentes	Sentenças que têm pelo menos uma linha nas suas tabelas de verdade onde elas são todas verdadeiras	Sentenças a partir das quais não se pode derivar uma contradição
Argumento válido	Uma argumento cuja tabela de verdade não tem linhas onde há Vs sob os conectivos principais das premissas e um F sob o conectivo principal da conclusão	Uma argumento onde podemos derivar a conclusão das premissas

Tabela 20.1: Duas maneiras de se definir conceitos lógicos.

Simbolicamente, queremos mostrar que válido$_\vdash$ implica válido$_\vDash$. Depois, precisaremos mostrar coisas na outra direção, ou seja, válido$_\vDash$ implica válido$_\vdash$.

Este argumento de $\vdash$ a $\vDash$ é o problema da CORRETUDE . Um sistema de prova é CORRETO, se não há derivações de argumentos que podem ser mostrados como inválidos pelas tabelas de verdade. Demonstrar que o sistema de prova é correto exigiria mostrar que *qualquer* prova possível é a prova de um argumento válido. Não seria suficiente simplesmente ser bem-sucedido ao tentar provar muitos argumentos válidos e não ser bem-sucedido ao tentar provar argumentos inválidos.

A prova que esboçaremos depende do fato que nós definimos inicialmente uma sentença de LVF, usando uma definição indutiva (veja p. 46). Poderíamos ter usado definições indutivas para definir uma prova própria em LVF e definir uma tabela de verdade própria (todavia, não fizemos assim). Se tivássemos estas definições, então poderíamos usar uma *prova indutiva* para mostrar a corretude de LVF. Uma prova indutiva funciona da mesma forma que um definição indutiva. Com a definição indutiva, identificamos um grupo de elementos básicos que são estipulados como sendo exemplos da coisa que estamos tentando definir. No caso de uma sentença de LVF, a classe básica era o conjunto de letras sentenciais A, B, C, ... Anunciamos apenas que estas eram as sentenças. O segundo passo de uma definição indutiva é dizer que tudo que é construído a partir da sua classe básica usando certas regras também conta como um exemplo da coisa que estamos definindo. No caso de uma definição de uma sentença, as regras correspondiam aos cinco conectivos sentenciais (veja p. 46). Uma vez que você estabeleceu uma definição indutiva, você pode usar essa definição para mostrar que todos os membros da classe que você definiu têm uma certa propriedade. Simplesmente, você prova que a propriedade é verdadeira dos membros da classe básica e, então, provamos que as regras que estendem a classe básica não mudam a propriedade. Isto é o que se entende ao dar uma prova indutiva.

Embora não tenhamos uma definição indutiva de prova em LVF, podemos esboçar como uma prova indutiva de corretude de LVF iria. Imagine uma classe básica de provas de uma linha, aquela para cada uma das onze regras de inferência. Os membros desta classe seriam assim: $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$; $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$; $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}, \neg\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$ ... etc. Uma vez que algumas regras têm duas formas diferentes, teríamos de ter adicionado alguns membros a esta classe básica, por exemplo: $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \vdash \mathscr{B}$. Observe que estes são todos os enunciados na metalinguagem. A prova que LVF é correto não é parte de LVF, porque LVF não tem o poder de falar sobre si mesma.

Você pode usar tabelas de verdade para provar que cada uma destas provas de uma linha nesta classe básica é válida$_{\vDash}$. Por exemplo, a prova $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ corresponde a uma tabela de verdade que mostra $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vDash \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$. Isto estabelece a primeira parte de nossa prova indutiva.

O próximo passo é mostrar que adicionar linhas a qualquer prova nunca mudará uma prova válida$_{\vDash}$ para uma prova inválida$_{\vDash}$. Precisaríamos fazer isto para cada um das nossas onze regras de inferência. Assim, por exemplo, para $\wedge$I precisamos mostrar que, para qualquer $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B}$, adicionar uma linha onde usamos $\wedge$I para inferir $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}$ — onde $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}$ pode ser legitimamente inferida de $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n, \mathscr{B}$ — não mudaria uma prova válida para uma prova inválida. Mas espere, se podemos legitimamente derivar $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}$ destas premissas, então $\mathscr{C}$ and $\mathscr{D}$ devem já estar disponíveis na prova. Elas já estão entre $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n, \mathscr{B}$ ou podem ser ligitimamente derivadas a partir de $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n, \mathscr{B}$. Como tal, qualquer linha da tabela de verdade na qual as premissas são verdadeiras deve ser uma linha da tabela de verdade na qual $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são verdadeiras. De acordo com a tabela de verdade característica para $\wedge$, isto significa que $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}$ é também verdadeira nesta linha. Portanto, $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}$ segue-se validamente das premissas. Isto significa que usar a regra $\wedge$E para estender uma prova válida produz uma outra prova válida.

A fim de mostrar que o sistema de prova é correto, precisaríamos mostrar isto para as outras regras de inferência. Uma vez que as regras derivadas são consequências das regras básicas, seria suficiente fornecer argumentos similares para as outras 11 regras básicas. Este exercício tedioso está além do escopo deste livro.

Desse modo, mostramos que $\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$ implies $\mathscr{A} \vDash \mathscr{B}$. A outra direção diz que *todo* argumento que pode ser mostrado válido usando tabelas de verdade pode ser provado usando uma derivação.

Este é o problema da completude. Um sistema de prova tem a propriedade de COMPLETUDE sse há uma derivação de qualquer argumento semanticamente válido. Provar que um sistema é completo é, em geral, mais difícil que provar que é é correto. Provar que um sistema é correto equivale a mostrar que todas as regras de nosso sistema de prova funcionam como elas deveriam supostamente funcionar. Mostrar que um sistema é completo significa mostrar que você incluiu *todas* as regras que você precisa, que você não deixou qualquer coisa de fora. Mostrar isto está além do escopo deste livro. O ponto importante é que, felizmente, o sistema de prova para LVF é tanto correto como completo. Isto não é o caso para todos os sistemas de prova ou de todas linguagens formais. Porque isso é verdadeiro de LVF, podemos escolher dar provas ou dar tabelas de verdade — o que for mais fácil para tarefa em questão.

Agora que sabemos que o método de tabela de verdade é intercambiável com o método de derivações, você pode escolher qual método você deseja usar para resolver qualquer problema dado. Frequentemente, estudantes preferem usar tabelas de verdade, porque elas podem ser produzidas de forma puramente mecânica e que parece ser 'mais fácil'. Entretanto, já vimos que tabelas de verdade tornam-se inviavelmente largas com algumas poucas letras sentenciais. Por outro lado, há duas situações onde usar provas simplesmente não é possível. Definimos sintaticamente uma sentença contingente como uma sentença que não poderia ser provada como sendo uma tautologia ou uma contradição. Não há maneira prática para provar este tipo de enunciado negativo. Nunca saberemos se não há alguma prova lá fora que um enunciado é uma contradição e só não a encontramos ainda. Não há nada a fazer nessa situação, exceto recorrer às tabelas de verdade. Da mesma forma, podemos usar derivações para provar que duas sentenças são equivalentes, mas o que podemos dizer se desejamos provar que elas não são equivalentes? Não temos nenhuma maneira de provar que nunca encontraremos a prova relevante. Desse modo, temos de retornar às tabelas de verdade.

A tabela 20.2 resume quando é melhor dar provas e uando é melhor dar tabelas de verdade.

Propriedade lógica	**Provar que a propriedade está presente**	**Provar que a propriedade está faltando**
Ser um teorema	Derive a sentença	Encontre uma linha falsa na tabela de verdade para a sentença
Ser uma contradição	Derive a negação da sentença	Encontre uma linha verdadeira na tabela de verdade para a sentença
Contingência	Encontre uma linha falsa e uma linha verdadeira na tabela de verdade para a sentença	Prove a sentença ou a negação dela
Equivalência	Derive cada sentença da outra e vice-versa	Encontre uma linha nas tabelas de verdade para as sentenças onde elas têm valores diferentes
Consistência	Encontre uma linha na tabela de verdade para as sentenças onde elas são todas verdadeiras	Derive uma contradição das sentenças
Validade	Derive a conclusão das premissas	Encontre uma linha na tabela de verdade onde as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa.

Tabela 20.2: Quando usar uma tabela de verdade e quando dar uma prova.

Exercícios Práticos

A. Use uma derivação ou uma tabela de verdade para cada um dos seguintes:

1. Mostre que $A \rightarrow [((B \wedge C) \vee D) \rightarrow A]$ é um teorema.
2. Mostre que $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ não é um teorema.
3. Mostre que a sentença $A \rightarrow \neg A$ não é uma contradição.
4. Mostre que a sentença $A \leftrightarrow \neg A$ é uma contradição.

5. Mostre que a sentença $\neg(W \rightarrow (J \vee J))$ é contingente.
6. Mostre que a sentença $\neg(X \vee (Y \vee Z)) \vee (X \vee (Y \vee Z))$ não é contingente.
7. Mostre que a sentença $B \rightarrow \neg S$ é equivalente à sentença $\neg\neg B \rightarrow \neg S$.
8. Mostre que a sentença $\neg(X \vee O)$ não é equivalente à sentença $X \wedge O$.
9. Mostre que as sentenças $\neg(A \vee B)$, C, $C \rightarrow A$ são conjuntamente inconsistentes.
10. Mostre que as sentenças $\neg(A \vee B)$, $\neg B$, $B \rightarrow A$ são conjuntamente consistentes.
11. Mostre que $\neg(A \vee (B \vee C)) \therefore \neg C$ é válido.
12. Mostre que $\neg(A \wedge (B \vee C)) \therefore \neg C$ é inválido.

B. Use uma derivação ou uma tabela de verdade para cada um dos seguintes:

1. Mostre que $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ é um teorema.
2. Mostre que $\neg(((N \leftrightarrow Q) \vee Q) \vee N)$ não é um teorema.
3. Mostre que $Z \vee (\neg Z \leftrightarrow Z)$ é contingente.
4. Mostre que $(L \leftrightarrow ((N \rightarrow N) \rightarrow L)) \vee H$ não é contingente.
5. Mostre que $(A \leftrightarrow A) \wedge (B \wedge \neg B)$ é uma contradição.
6. Mostre que $(B \leftrightarrow (C \vee B))$ não é uma contradição.
7. Mostre que $((\neg X \leftrightarrow X) \vee X)$ é equivalente a X.
8. Mostre que $F \wedge (K \wedge R)$ não é equivalente a $(F \leftrightarrow (K \leftrightarrow R))$.
9. Mostre que as sentenças $\neg(W \rightarrow W)$, $(W \leftrightarrow W) \wedge W$, $E \vee (W \rightarrow \neg(E \wedge W))$ não conjuntamente inconsistentes.
10. Mostre que as sentenças $\neg R \vee C$, $(C \wedge R) \rightarrow \neg R$, $(\neg(R \vee R) \rightarrow R)$ são conjuntamente consistentes.

11. Mostre que $\neg\neg(C \leftrightarrow \neg C), ((G \vee C) \vee G) \therefore ((G \rightarrow C) \wedge G)$ é válido.

12. Mostre que $\neg\neg L, (C \rightarrow \neg L) \rightarrow C) \therefore \neg C$ é inválido.

PARTE V

Lógica de primeira ordem

CAPÍTULO 21

Blocos de construção de LPO

21.1 A necessidade de decompor sentenças

Considere o seguinte argumento, que é obviamente válido no Português:

> Willard é um lógico. Todos os lógicos usam um chapéu engraçado. $\therefore$ Willard usa um chapéu engraçado.

Para simbolizá-lo em LVF, poderíamos oferecer uma chave de simbolização:

L: Willard é um lógico.
A: Todos os lógicos usam chapéu engraçados.
F: Willard usa um chapéu engraçado.

E o próprio argumento torna-se:

$$L, A \therefore F$$

Isto é *inválido* em LVF, mas o argumento Português original é claramente válido.

O problema não é que cometemos um erro ao simbolizar o argumento. Esta é a melhor simbolização que podemos dar *em LVF*. O problema encontra-se na própria LVF. ‘Todos os lógicos usam um chapeu engraçado’ é sobre lógicos e usar chapéu. Ao não manter esta estrutura em nosso simbolização, perdemos a conexão entre Willard ser lógico e Willard usar um chapeu.

As unidades básicas de LVF são letras sentenciais e LVF não pode decompô-las. Para simbolizarmos argumentos como aquele supracitado, teremos de desenvolver uma nova linguagem lógica que nos permitirá *dividir o átomo*. Chamaremos esta linguagem *lógica de primeira ordem* ou *LPO*.

Os detalhes de LPO serão explicados por todo este capítulo, mas aqui a ideia básica é dividir o átomo.

Em primeiro lugar, temos *nomes*. Em LPO, indicamos estes com letras minúsculas em itálico. Por exemplo, poderíamos estabelecer que ‘b’ refira-se a Bertie ou que ‘i’ refira-se a Willard.

Em segundo lugar, temos predicados. Predicados no Português são expressões tais como ‘_____ é um cão’ ou ‘_____ é um lógico’. Estes não são sentenças completas. Para fazer uma sentença completa, precisamos preencher a lacuna. Precisamos dizer algo como ‘Bertie é um cão’ ou ‘Willard é um lógico’. Em LPO, indicamos predicados por letras maiúsculas em itálico. Por exemplo, permita que o predicado de LPO ‘D’ simbolize o predicado do Português ‘_____ é um cão’. Então a expressão ‘$D(b)$’ será uma sentença em LPO, que simboliza a sentença do Português ‘Bertie é um cão’. Da mesma forma, permita que o predicado de LPO ‘L’ simbolize o predicado do Português ‘_____ é um lógico’. Então, a expressão ‘$L(i)$’ simbolizará a sentença do Português ‘Willard é um lógico’.

Em terceiro lugar, temos quantificadores. Por exemplo, ‘$\exists$’ comunicará, aproximadamente, ‘há pelo menos um . . . ’. Desse modo, poderíamos simbolizar a sentença do Português ‘há um cão’ pela sentença de LPO ‘$\exists x\, D(x)$’, que seria naturalmente lida como ‘há pelo menos yma coisa x tal que x é um cão’.

Essa é a ideia geral, mas LPO é significativamente mais sutil do que LVF, assim iremos abordá-la vagarosamente.

21.2 Nomes

No Português, um *termo singular* é uma palavra ou expressão que se refere a uma pessoa *específica*, a um lugar ou uma coisa. A palavra 'cão' não é um termo singular, porque há muitos cães. A expressão 'Bertie' é um termo singular, porque ela refere-se a um terrier específico. Da mesma forma, a expressão 'o cão Bertie do Philip' é um termo singular, porque ela refere-se a um pequeno terrier específico.

Nomes próprios são um tipo particularmente importante de termo singular. Estas são expressões que selecionam indivíduos sem descrevê-los. O nome 'Emerson' é um nome próprio e o nome spzinho não lhe diz qualquer coisa sobre Emerson. É claro, alguns nomes são tradicionalmente dados a meninos e outros são tradicionalmente dados a meninas. Se 'Hilary' é usado como termo singular, poderíamos dar o palpite de que esse nome refere-se a uma mulher. Todavia, poderíamos ter dado um palpite errado. De fato, o nome não necessariamente significa que a pessoa referida seja mesmo uma pessoa: Hilary poderia ser uma girafa.

Em LPO, nossos NOMES são letras minúsculas de a' a 'r'. Podemos adicionar subscritos, se desejarmos usar algumas letras mais de uma vez. Assim, aqui estão alguns termos singulares em LPO:

$$a, b, c, \ldots, r, a_1, f_{32}, j_{390}, m_{12}$$

Estes deveriam ser pensados similarmente como nomes próprios do Português, mas com uma diferença. 'Tim Burton' é um nome próprio, mas há várias pessoas que têm este nome (da mesma forma, há pelo menos duas pessoas com o nome 'P.D. Magnus'). Vivemos com este tipo de ambiguidade no Português, permitindo que o contexto especifique o fato que 'Tim Burton' refere-se a um autor deste livro e não algum outro Tim. Em LPO, não toleramos qualquer tal ambiguidade. Cada nome deve selecionar *exatamente* uma coisa (todavia, dois nomes diferentes podem selecionar a mesma coisa).

Similar à LVF, podemos fornecer chaves de simbolização. Estas indicam temporariamente o que um nome selecionará. Assim, poderíamos oferecer:

e: Elsa
g: Gregor
m: Marybeth

21.3 Predicados

Os predicados mais simples são propriedades de indivíduos. Eles são coisas que você pode dizer sobre um objeto. Aqui estão alguns exemplos dos predicados do Português:

_____ é um cão
_____ é um membro de Monty Python
Um piano caiu em _____

Em geral, você pode pensar sobre predicados como coisas que se combinam com termos singulares para fazer sentenças. Inversamente, você pode iniciar com sentenças e fazer predicados a partir delas, removendo termos. Considere a sentença ‘Vinnie pegou emprestado o carro da família de Nunzio’. Ao removermos um termo singular, podemos obter qualquer um dos três predicados:

_____ borrowed pegou emprestado o carro da família de Nunzio
Vinnie pegou emprestado _____ de Nunzio
Vinnie pegou emprestado o carro da família de _____

Em LPO, PREDICADOS são letras maiúsculas de A a Z, com ou sem subscritos. Poderíamos escrever uma chave de simbolização para predicados, assim:

$A(x)$: $\underline{\hspace{2em}}_x$ está zangado
$H(x)$: $\underline{\hspace{2em}}_x$ está feliz

Por que os subscritos nas lacunas? Retornaremos a isto em in §23.

Se combinarmos nossas duas chaves de simbolização, podemos começar simbolizando algumas sentenças do Português que usam nomes e predicados em combinação. Por exemplo, considere as sentenças do Português:

1. Elsa está zangada.
2. Gregor e Marybeth estão zangados.
3. Se Elsa está zangada, então Gregor e Marybeth estão zangados.

Sentença 1 é simples e direta: ela é simbolizada por ‘$A(e)$’.

Sentença 2: esta é uma conjunção de duas sentenças mais simples. As sentenças simples podem ser simbolizadas por ‘$A(g)$’ e

‘$A(m)$’. Então recorremos a LVF e simbolizamos a sentença inteira por ‘$A(g) \wedge A(m)$’. Isto ilustra um ponto importante: LPO tem todos os conectivos verofuncionais de LVF.

Sentença 3: esta é um condicional, cujo antecedente é a sentença 1 e cujo consequente é a sentença 2, assim podemos simbolizá-la por ‘$A(e) \rightarrow (A(g) \wedge A(m))$’.

21.4 Quantificadores

Estamos prontos agora para introduzir quantificadores. Considere duas sentenças:

4. Todo mundo está feliz.
5. Alguém está zangado.

Poderia ser tentador simbolizar a sentença 4 como ‘$H(e) \wedge H(g) \wedge H(m)$’. Todavia, isto apenas diria que Elsa e Marybeth estão felizes. Desejamos dizer que *todo mundo* está feliz, mesmos aqueles sem nomes. Para fazer isto, introduzimos o símbolo ‘$\forall$’. Isto é chamado QUANTIFICADOR UNIVERSAL.

Um quantificador deve ser sempre seguido por uma VARIÁVEL. Em LPO, variáveis são letras minúsculas em itálico de ‘s’ a ‘z’, com ou sem subscritos. Assim, poderíamos simbolizar a sentença 4 como ‘$\forall x\, H(x)$’. A variável ‘x’ está servindo como um tipo de espaço reservado [*placeholder*][1]. A expressão ‘$\forall x$’ intuitivamente significa que você pode selecionar qualquer coisa e colocá-la no lugar de ‘x’. O subsequente ‘$H(x)$’ indica que esta coisa que você selecionou está feliz.

Deveria ser enfatizado que não há razão especial para usar ‘x’ em vez de alguma outra variável. As sentenças ‘$\forall x\, H(x)$’, ‘$\forall y\, H(y)$’, ‘$\forall z\, H(z)$’, e ‘$\forall x_5 H(x_5)$’ usam variáveis diferentes, mas elas são todas logicamente equivalentes.

Para simbolizar a sentença 5, introduzimos um outro novo símbolo: o QUANTIFICADOR EXISTENCIAL , ‘$\exists$’. Como o quantificador universal, o quantificador existencial requer uma variável. A sentença 5 pode ser simbolizada por ‘$\exists x\, A(x)$’. Enquanto ‘$\forall x\, A(x)$’ é naturalmente lido como ‘para todo x, x está zangado, ‘$\exists x\, A(x)$’ é naturalmente lido como ‘há algo x tal que x está zangado’. Mais uma vez, a variável é um tipo

---

[1] ver melhor expressão

de espaço reservado [*placeholder*]; Poderíamos ter simbolizado também a sentença 5 por '$\exists z\, A(z)$', '$\exists w_{256}\, A(w_{256})$', ou afins.

Mais alguns exemplos ajudarão. Considere estas outras sentenças:

6. Ninguém está zangado.
7. Há alguám que não está feliz.
8. Nem todos são felizes.

A sentença 6 pode ser parafraseada por 'não é o caso que alguém esteja zangado'. Podemos, então, simbolizá-la usando a negação e um quantificador existencial: '$\neg\exists x\, A(x)$'. Todavia, a sentença 6 poderia ser parafraseada por 'todos não estão zangados'. Com isto em mente, ela pode ser simbolizada usando a negação e um quantificador universal: '$\forall x\, \neg A(x)$'. Ambas são simbolizações aceitáveis. De fato, acontece que, em geral, $\forall x\, \neg\mathscr{A}$ é logicamente equivalente a $\neg\exists x\, \mathscr{A}$ (observe que aqui retornamos à prática de usar '$\mathscr{A}$' como uma metavariável, veja §7). Simbolizar uma sentença de uma maneira, em vez da outra, poderia parecer mais 'natural' em alguns contextos, mas isso não é mais do que uma questão de gosto.

A sentença 7 é mais naturalmente parafraseada por 'há algum x tal que x não está feliz'. Então, Isto torna-se '$\exists x\, \neg H(x)$'. É claro, poderíamos igualmente ter escrito '$\neg\forall x\, H(x)$', que leríamos naturalmente como 'não é o caso que todos estejam felizes'. Isso também seria uma simbolização perfeitamente adequada da sentença 8.

21.5 Domínios

Dada a chave de simbolização que usamos, '$\forall x\, H(x)$' simboliza 'todos estão felizes'. Quem está incluído neste *todos*? Quando usamos sentenças como esta no Português, em geral não queremos dizer todos que estão agora vivos na Terra. Dertamente, não queremos dizer qualquer um que já viveu ou que viverá. Muito das vezes, queremos dizer algo mais modesto: todos que estão agora no prédio, todos que estão matriculados na aula de balé ou afins.

A fim de eliminar esta ambiguidade, precisaremos especificar um DOMÍNIO. O domínio é a coleção de coisas sobre as quais estamos falando. Assim, se desejamos falar sobre pessoas em Chicago, definimos o domínio como sendo as pessoas que estão em Chicago. Escrevemos isto no início da chave de simbolização, assim:

Domínio: Pessoas que estão em Chicago

Os quantificadores *percorrem*[*range over*] o domínio. Dado este domínio, '$\forall x$' tem de ser lido, grosso modo, como 'qualquer pessoa que está em Chicago é tal que. . . ' e $\exists x$' tem de ser lido como 'alguma pessoa que está em Chicago é tal que. . . '.

Em LPO, o domínio deve sempre incluir pelo menos uma coisa. Além disso, no Português, podemos inferir 'alguma coisa está feliz' a partir de 'Gregor está feliz'. Em LPO, então, desejamos ser capazes de inferir '$\exists x\, A(x)$' a partir de '$A(g)$'. Desse modo, insistiremos que cada nome selecione exatamente uma coisa do domínio. Se quisermos nomear pessoas em lugares fora de Chicago, então precisamos incluir estas pessoas no domínio.

Um domínio deve ter *pelo menos* um membro. Um nome deve selecionar *exatamente* um membro do domínio, mas um membro do domínio pode ser selecionado por um nome, por muitos nomes ou por nenhum nome.

Mesmo permitir um domínio com apenas um membro pode produzir alguns resultados estranhos. Suponha que temos isto como uma chave de simbolização:

domínio: a Torre Eiffel
$P(x)$: $\underline{\qquad}_x$ está em Paris

A sentença $\forall x\, P(x)$ poderia ser parafraseada em Português por 'tudo está em Paris'. Todavia, isso seria enganoso. Significa que tudo *no domínio* está em Paris. Este domínio contém somente a Torre Eiffel, assim, com esta chave de simbolização, $\forall x\, P(x)$ significa justamente que a Torre Eiffel está em Paris.

Termos não-denotativos

Em LPO, cada nome deve selecionar exatamente um membro do domínio. Um nome não pode se referir a mais de uma coisa — ele é um termo *singular*. Cada nome deve ainda selecionar *algo*. Isto está conectado a um problema filosófico clássico: o então chamado problema dos termos não-denotativos.

Filósofos medievais tipicamente usavam sentenças sobre a *quimera* para exemplificar este problema. Quimera é uma criatura mitológica; de fato, ela não existe. Considere estas duas sentenças:

9. Quimera está zangada.
10. Quimera não está zangada.

É tentador definir um nome para significar 'quimera'. A chave de simbolização seria assim:

domínio: criaturas na Terra
$A(x)$: $\underline{\qquad}_x$ está zangado
c: Quimera

Poderíamos, então, simbolizar a sentença 9 como $A(c)$ e a sentença 10 como $\neg A(c)$.

Problemas surgirão quando perguntamos se estas sentenças são verdadeiras ou falsas.

Uma opção é dizer que a sentença 9 não é verdadeira, porque não existe quimera. Se a sentença 9 é falsa, porque ela fala sobre uma coisa não-existente, então a sentença 10 é falsa pela mesma razão. Todavia, isto significaria que $A(c)$ e $\neg A(c)$ seriam ambas falsas. Dadas as condições de verdade para negação, isto não pode ser o caso.

Uma vez que não podemos dizer que elas são ambas falsas, o que deveríamos fazer? Uma outra opção é dizer que a sentença 9 é não-significativa [*is meaningless*][2], porque ela fala sobre uma coisa não-existente. Desse modo, $A(c)$ seria uma expressão significativa em LPO para algumas interpretações, mas não para outras. Todavia, isto faria com que nossa linguagem formal fosse refém de interpretações particulares. Uma vez que estamos interessados na forma lógica, queremos considerar a força lógica de uma sentença como $A(c)$ independemente de qualquer interpretação particular. Se $A(c)$ fosse às vezes significativo e fosse às vezes não-significativo, não poderíamos fazer isso.

Isto é o *problema de termos não-denotativos* e retornaremos a ele mais tarde (veja p. 212). Por enquanto, o ponto importante é que cada nome em LPO *deve* referir-se a algo no domínio, embora o domínio possa conter qualquer coisa que quisermos. Se quisermos simbolizar argumentos sobre criaturas mitológicas, então devemos definir um domínio

---

[2] Talvez, "não tem significado".

que as inclua. Esta opção é importante, se desejamos considerar a lógica das ficções. Podemos simbolizar uma sentença como “Sherlock Holmes viveu na rua Baker 221B”, incluindo personagens ficcionais como Sherlock Holmes em nosso domínio.

CAPÍTULO 22

Sentenças com único quantificador

Agora temos todas as peças de LPO. Simbolizar sentenças mais complicadas será apenas uma questão de saber a maneira correta de combinar predicados, nomes, quantificadores e conectivos. Não há um talento especial para isto e não há substituto para prática.

22.1 Expressões quantificadoras comuns

Considere estas sentenças:

1. Toda moeda no meu bolso é de 25 centavos.
2. Alguma moeda na mesa é de 1 centavo.
3. Nem todas as moedas na mesa são de 1 centavo.
4. Nenhuma moeda no meu bolso é de 1 centavo.

Ao fornecer uma chave de simbolização, precisamos especificar um domínio. Uma vez que estamos falando sobre moedas no meu bolso e na mesa, o domínio deve conter pelo menos todas estas moedas. Uma vez que não estamos falando sobre qualquer moeda específica, não precisamos lidar com qualquer nome. Asiim, aqui está a nossa chave:

domínio: todas as moedas
$P(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ está no meu bolso
$T(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ está na mesa
$Q(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ é de 25 centavos
$D(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ é de 1 centavo

A sentença 1 é mais naturalmente simbolizada usando um quantificador universal. O quantificador universal diz algo sobre tudo que está no domínio, não apenas sobre as moedas no meu bolso. A sentença 1 pode ser parafraseada por 'para qualquer moeda, *se* essa moeda está no meu bolso, *então* ela é de 25 centavos'. Assim, podemos simbolizá-la como '$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$'.

Uma vez que a sentença 1 é sobre moedas que estão no meu bolso *e* que são de 25 centavos, poderia ser tentador simbolizá-la usando a conjunção. Entretanto, a sentença '$\forall x(P(x) \land Q(x))$' simbolizaria a sentença 'toda moeda é de 25 centavos e está no meu bolso'. Isto significa algo muito diferente que a sentença 1. E, assim, vemos:

Uma sentença pode ser simbolizada por $\forall x(\mathscr{F}(x) \rightarrow \mathscr{G}(x))$, se ela pode ser parafraseada no Português por 'qualquer F é G'.

A sentença 2 é mais naturalmente simbolizada usando um quantificador existencial. Ela pode ser parafraseada por 'há alguma moeda que está na mesa e que é de 1 centavo'. Dessa forma, podemos simbolizá-la como '$\exists x(T(x) \land D(x))$'.

Observe que precisamos usar um condicional com quantificador universal, mas usamos uma conjunção com o quantificador existencial. Suponha que, em vez disso, tivéssemos escrito '$\exists x(T(x) \rightarrow D(x))$'. Isto significaria que há algum objeto no domínio do qual '$(T(x) \rightarrow D(x))$' é verdadeiro. Lembre-se que, em LVF, $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ é logicamente equivalente (em LVF) a $\neg\mathscr{A} \lor \mathscr{B}$. Esta equivalência também valerá em LPO. Assim, '$\exists x(T(x) \rightarrow D(x))$' é verdadeira se há algum objeto no domínio tal que '$(\neg T(x) \lor D(x))$' é verdadeira desta objeto. Ou seja, '$\exists x(T(x) \rightarrow D(x))$' é verdadeira, se alguma moeda *ou* não está na mesa *ou* é de 1 centavo. É claro, há uma moeda que não está na mesa: há moedas em muitos outros lugares. Assim, é muito fácil ver que '$\exists x(T(x) \rightarrow D(x))$' é verdadeira. Em geral, um condicional será um conectivo natural para usar com um quantificador universal, mas um condicional dentro do escopo de um quantificador existencial tende a dizer, de fato, algo muito mais fraco. Como uma regra de ouro geral, não coloque condicionais no escopo de quantificadores existenciais, a menos que você tenha certeza que você necessite fazer isto.

> Uma sentença pode ser simbolizada por $\exists x(\mathscr{F}(x) \land \mathscr{G}(x))$, se ela pode ser parafraseada em Português como 'algum F é G'.

A sentença 3 pode ser parafraseada por 'não é o caso que todo moeda na mesa é de 1 centavo'. Desse modo, podemos simbolizá-la por '$\neg\forall x(T(x) \rightarrow D(x))$'. Poderíamos olhar para a sentença 3 e parafraseá-la por 'alguma moeda na mesa não é de 1 centavo'. Ela seria, então, simbolizada por $\exists x(T(x) \land \neg D(x))$'. Embora não seja imediatamente óbvio ainda, estas duas sentenças são logicamente equivalentes (isto é devido à equivalência lógica entre $\neg\forall x\, \mathscr{A}$ e $\exists x\neg\mathscr{A}$, mencionada em §21, junto com a equivalência entre $\neg(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ e $\mathscr{A} \land \neg\mathscr{B}$).

A sentença 4 pode ser parafraseada por 'não é o caso que há alguma moeda de 1 centavo no meu bolso'. Isto pode ser simbolizado por '$\neg\exists x(P(x) \land D(x))$'. Ela poderia também ser parafraseada por 'qualquer moeda no meu bolso não é de 1 centavo' e, então, poderia ser simbolizada por '$\forall x(P(x) \rightarrow \neg D(x))$'. Novamente, as duas simbolizações são logicamente equivalentes; ambas são simbolizações corretas da sentença 4.

22.2 Predicados vazios

Em §21, enfatizamos que um nome deve selecionar exatamente um objeto no domínio. Entretanto, um predicado não precisa se aplicar a qualquer coisa no domínio. Um predicado que se aplica a nada no domínio é chamado PREDICADO VAZIO. Vale a pena explorar isto.

Suponha que desejamos simbolizar estas duas sentenças:

5. Todo macaco conhece a linguagem de sinais
6. Algum macaco conhece a linguagem de sinais

É possível escrever a chave de simbolização para estas sentenças da seguinte forma:

domínio: animais
$M(x)$: _____$_x$ é um macaco.

$S(x)$: $\_\_\_\_\__x$ conhece a linguagem de sinais.

A sentença 5 pode ser agora simbolizada por '$\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$'. A sentença 6 pode ser simbolizada por '$\exists x(M(x) \wedge S(x))$'.

É tentador dizer que a sentença 5 acarreta a sentença 6. Ou seja, poderíamos pensar que é impossível que seja o caso que todo macaco conheça a linguagem de sinais, sem ser também o caso que algum macaco conheça a linguagem de sinais, mas isto seria um erro. É possível que a sentença '$\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$' seja verdadeira, embora a sentença '$\exists x(M(x) \wedge S(x))$' seja falsa.

Como isso é possível? A resposta é obtida considerando se estas sentenças seriam verdadeiras ou falsas, *caso não existissem macacos*. Se não existissem macacos (no domínio), então '$\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$' seria *vacuamente* verdadeira: tome qualquer macaco que você quiser — ele conhece linguagem de sinais! Mas se não houvesse macacos (no domínio), então '$\exists x(M(x) \wedge S(x))$' seria falsa.

Um outro exemplo ajudará a entender esse ponto melhor. Suponha que estendemos a chave de simbolização acima, adicionando:

$R(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é uma geladeira

Agora considere a sentença '$\forall x(R(x) \rightarrow M(x))$'. Isto simboliza 'toda geladeira é um macaco'. Esta sentença é verdadeira, dada nossa chave de simbolização, que é contraintuitiva, uma vez que, presumivelmente, não queremos dizer que há um monte de macacos que são geladeiras. É importante lembrar, entretanto, que '$\forall x(R(x) \rightarrow M(x))$' é verdadeira sse qualquer membro do domínio que é uma geladeira é um macaco. Uma vez que o domínio é *a classe dos animais*, então não há geladeiras no domínio. Novamente, então, a sentença é *vacuamente* verdadeira.

De fato, se estivéssemos lidando com a sentença 'todas as geladeiras são macacos', então, muito provavelmente, você gostaria de incluir utensílios de cozinha no domínio. Então, o predicado 'R' não seria vazio e a sentença '$\forall x(R(x) \rightarrow M(x))$' seria falsa.

Quando $\mathscr{F}$ é um predicado vazio, a sentença $\forall x(\mathscr{F}(x) \rightarrow \ldots)$ será vacuamente verdadeira.

22.3 Selecionando um domínio

A simbolização apropriada de uma sentença do Português em LPO dependerá da chave de simbolização. Escolher uma chave pode ser difícil. Suponha que desejamos simbolizar a sentença do Português:

7. Toda rosa tem espinhos

Poderíamos oferecer esta chave de simbolização:

$R(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é uma rosa
$T(x)$: $\underline{\qquad}_x$ tem espinhos

É tentador dizer que a sentença 7 deveria ser simbolizada por '$\forall x(R(x) \rightarrow T(x))$', mas não escolhemos, contudo, um domínio. Se o domínio contém todas as rosas, isto seria uma boa simbolização. Contudo, se o domínio é composto apenas das *coisas que estão na minha mesa de cozinha*, então '$\forall x(R(x) \rightarrow T(x))$' apenas abarcaria o fato de que toda rosa que está *na minha mesa de cozinha* tem espinhos. Se não há rosas na minha mesa da cozinha, então a sentença seria trivialmente verdadeira. Isto não é o que queremos. Para simbolizar a sentença 7 adequadamente, precisamos incluir todas as rosas no domínio, mas agora temos dua opções.

Em primeiro lugar, podemos restringir o domínio para incluir todas as rosas, mas *somente* rosa. Então, a sentença 7 pode ser simbolizada, se quisermos, por '$\forall x\, T(x)$'. Isto será verdadeiro sse tudo no domínio tiver espinhos. Uma vez que o domínio é composto somente por rosas, isto é verdadeiro sse toda rosa tem espinhos. Ao restringirmos o domínio, fomos capazes de simbolizar a sentença em Português por uma sentença muito curta de LPO. Assim, esta abordagem pode nos livrar de problemas, se toda sentença com a qual queremos lidar é sobre rosas.

Em segundo lugar, podemos permitir que o domínio contenha coisas além de rosas: margaridas, ratos, rifles e afins. E, certamente, precisaremos incluir um domínio mais expansivo, se queremos simultaneamente simbolizar sentenças como:

8. Todo caubói canta músicas muito tristes.

Nosso domínio deve incluir todas as rosas (de forma que possamos simbolizar a sentença 7) e todos os caubóis (de forma que possamos simbolizae a sentença 8).. Assim, poderíamos oferecer a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas e plantas
$C(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um caubói
$S(x)$: $\_\_\_\_\__x$ canta músicas muito tristes
$R(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é uma rosa
$T(x)$: $\_\_\_\_\__x$ tem espinhos

Agora teremos de simbolizar a sentença 7 com '$\forall x(R(x) \rightarrow T(x))$', uma vez que '$\forall x\, T(x)$' simbolizaria a sentença 'toda pessoa ou planta têm espinhos'. Similarmente, teremos de simbolizar a sentença 8 com '$\forall x(C(x) \rightarrow S(x))$'.

Em geral, o quantificador universal pode ser usado para simbolizar a expressão do Português 'qualquer um', se o domínio contém apenas pessoas. Se há pessoas e outras coisas no domínio, então qualquer um' deve ser tratado como 'toda pessoa'.

22.4 A utilidade da paráfrase

Ao simbolizar as sentenças do Português em LPO, é importante entender a estrutura das sentenças que você deseja simbolizar. O que importa é a simbolização final e, à vezes, você consegue ir de uma sentença do Português diretamente a uma sentença de LPO. Outras vezes, é de grande ajuda parafrasear a sentença uma ou mais vezes. Cada parafrase sucessiva deveria ir da sentença original a algo que você pode simbolizar diretamente em LPO

Para os próximos exemplos, usaremos esta chave de simbolização:

domínio: pessoas
$B(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é baixista
$R(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é uma estrela do rock
k: Kim Deal

Agora considere estas sentenças:

9. Se Kim Deal é um baixista, então ela é uma estrela do rock.
10. Se uma pessoa é um baixista, então ela é uma estrela do rock.

As mesmas palavras aparecem como o consequente nas sentenças 9 e 10 ('. . . ela é uma estrela do rock'), mas elas significam coisas muito diferentes. Para esclarecer o ponto, é frequentemente útil parafrasear as sentenças originais, removendo os pronomes.

A sentença 10 pode ser parafraseada por 'Se Kim Deal é um baixista, então *Kim Deal* é uma estrela do rock'. Isto pode se obviamente simbolizado por '$B(k) \to R(k)$'.

A sentença 10 deve ser parafraseada de forma diferente: 'se uma pessoa é um baixista, então *essa pessoa* é uma estrela do rock'. Esta sentença não é sobre qualquer pessoa particular, assim precisamos de uma variável. Como um passo intermediário, podemos parafrasear isto por 'para qualquer pessoa x, se x é um baixista, então x é uma estrela do rock'. Agora isto pode ser simbolizado por '$\forall x(B(x) \to R(x))$'. Esta é a mesma sentença que teríamos usado para simbolizar 'qualquer um que é um baixista é uma estrela do rock'. Refletindo, essa sentença é seguramente verdadeira sse a sentença 10 é verdadeira, como seria o esperado.

Considere estas outras sentenças:

11. Se cada um é baixista, então Kim Deal é uma estrela do rock.
12. Se cada um é baixista, então ele é uma estrela do rock.

As mesmas palavras aparecem como o antecedente nas sentenças 11 e 12 ('se cada um é baixista...'), mas pode ser complicado descobrir como simbolizar estes dois usos. Novamente, a paráfrase virá ao seu axílio.

A sentença 11 pode ser parafraseada por 'se há pelo menos um baixista, então Kim Deal é uma estrela do rock'. É claro agora que isto é condicional cujo antecedente é uma expressão quantificada; assim, podemos simbolizar a sentença inteira com um condicional como operador lógico principal: '$\exists x B(x) \to R(k)$'.

A sentença 12 pode ser parafraseada por 'para toda pessoa x, se x é um baixista, então x é uma estrela do rock'. Ou, em um Português mais natural, ela pode ser parafraseada por 'todos baixistas são estrelas do rock'. Ela é melhor simbolizada por '$\forall x(B(x) \to R(x))$', da mesma maneira qu a sentença 10.

A moral é que as palavras do Português 'cada' e 'cada um' deveriam ser tipicamente simbolizadas, usando-se quantificadores e se você estiver tendo dificuldades em determinar se é para usar um quantificador universal ou um quantificador existencial, tente parafrasear a sentença com uma sentença do Português que use palavras além de 'cada' ou 'cada um'.

22.5 Quantificadores e escopo

Continuando o exemplo, suponha que desejamos simbolizar estas sentenças:

13. Se qualquer um é baixista, então Lars é um baixista.
14. Qualquer um é tal que se ele é baixista, então Lars é um baixista.

Para simbolizar estas sentenças, teremos de adicionar um novo nome à chave de simbolização, a saber:

l: Lars

A sentença 13 é um condicional, cujo atecedente é 'qualquer um é baixista', assim ela será simbolizada por '$\forall x\, B(x) \rightarrow B(l)$'. Esta sentença é necessariamente verdadeira: se *qualquer um* é, de fato, baixista, então tome quanlquer um que você quiser — por exemplo, Lars — e ele será um baixista.

A sentença 14, ao contrário, poderia ser melhor parafraseada por 'qualquer pessoa x é tal que, se x é baixista, então Lars é um baixista'. Isto é simbolizado por '$\forall x(B(x) \rightarrow B(l))$'. Esta sentença é falsa; Kim Dela é baixista. Assim, '$B(k)$' é verdadeira. Suponha que Lars não seja baixista (digamos que, em vez disso, ele seja uma baterista), assim '$B(l)$' é falsa. De acordo com isso, '$B(k) \rightarrow B(l)$' será falsa, logo '$\forall x(B(x) \rightarrow B(l))$' também será falsa.

Resumindo, '$\forall x B(x) \rightarrow B(l)$' e '$\forall x(B(x) \rightarrow B(l))$' são sentenças muito diferentes. Podemos explicar a diferença em termos do *escopo* do quantificador. O escopo da quantificação é muito semelhante ao escopo da negação, que consideramos quando discutimos LVF e será útil explicá-lo dessa forma.

Na sentença '$\neg B(k) \rightarrow B(l)$', o escopo de '$\neg$' é apenas o antecedente do condicional. Estamos dizendo algo como: se '$B(k)$' é falsa, então '$B(l)$' é verdadeira. Similarmente, na sentença '$\forall x B(x) \rightarrow B(l)$', o escopo de '$\forall x$' é apenas o antecedente do condicional. Estamos dizendo algo como: se '$B(x)$' é verdadeira de *qualquer coisa*, então '$B(l)$' é também verdadeira.

Na sentença '$\neg(B(k) \rightarrow B(l))$', o escopo de '$\neg$' é a sentença inteira. Estamos dizendo algo como: '$(B(k) \rightarrow B(l))$' é falsa. Similarmente, na sentença '$\forall x(B(x) \rightarrow B(l))$', o escopo de '$\forall x$' é a sentença inteira. Estamos dizendo algo como: '$(B(x) \rightarrow B(l))$' é verdadeira de *qualquer coisa*.

A moral da história é simples. Quando você está usando condicionais, seja cuidadoso e certifique-se de que você determinou corretamente o escopo.

Predicados ambíguos

Suponha que desejamos simbolizar esta sentença:

15. Adina é uma cirurgiã habilidosa

Seja o domínio de pessoas, suponha que $K(x)$ signifique 'x é uma cirurgiã habilidosa' e que a signifique Adina. A sentença 15 é simplesmente $K(a)$.

Em vez disso, suponha que queremos simbolizar este argumento:

> O hospital contratará apenas um cirurgião habilidoso. Todos os cirurgiões são gananciosos. Billy é um cirurgião, mas não é habilidoso. Portanto, Billy é ganancioso, mas o hospital não o contratará.

Precisamos distinguir ser um *cirurgião habilidoso* de ser meramente um *cirurgião*. Assim, definimos esta chave de simbolização:

domínio: pessoas
$G(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ é ganacioso.
$H(x)$: O hospital contratará $\underline{\hspace{3em}}_x$.
$R(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ é um cirurgião.
$K(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ é habilidoso.
b: Billy

Agora o argumento pode ser simbolizado dessa maneira:

$$\forall x\big[\neg(R(x) \wedge K(x)) \rightarrow \neg H(x)\big]$$
$$\forall x(R(x) \rightarrow G(x))$$
$$R(b) \wedge \neg K(b)$$
$$\therefore\ G(b) \wedge \neg H(b)$$

Depois, suponha que desejamos simbolizar este argumento:

> Carol é uma cirurgiã habilidosa e jogadora de tênis. Portanto, Carol é uma jogadora habilidosa de tênis.

Se começarmos com a chave de simbolização que usamos para o argumento anterior, poderíamos adicionar um predicado (suponha que $T(x)$ signifique 'x é uma jogadora de tênis) e um nome (suponha que c signifique Carol). Então o argumento tona-se:

$$\begin{array}{ll} & (R(c) \wedge K(c)) \wedge T(c) \\ \therefore & T(c) \wedge K(c) \end{array}$$

Esta simbolização é um desastre! Ela toma o que em Português é um argumento terrível e simboliza-o como um argumento válido em LPO. O problema é que há uma diferença entre ser *habilidosa como cirurgiã* e ser *habilidosa como uma jogadora de tênis*. Simbolizar este argumento corretamente requer dois predicados separados, uma para cada tipo de habilidade. Se permitimos que $K_1(x)$ signifique 'x é habilidosa como cirurgiã' e $K_2(x)$ signifique 'x é habilidosa como uma jogadora de tênis', então podemos simbolizar o argumento dessa maneira:

$$\begin{array}{ll} & (R(c) \wedge K_1(c)) \wedge T(c) \\ \therefore & T(c) \wedge K_2(c) \end{array}$$

Como no argumento em Português , isto é inválido.

A moral destes exemplos é que você precisa ser cuidadoso ao simbolizar predicados em uma forma ambígua. Problemas similares podem surgir com predicados tais como *bom*, *ruim*, *grande* e *pequeno*. Assim como cirurgiões habilidosos e jogadores de tênis habilidosos, cães grandes, ratos grandes e grandes problemas são grandes de diferentes maneiras.

É suficiente ter um predicado que signifique 'x é um cirurgião habilidoso', em vez de dois predicados 'x é habilidoso' e 'x é cirurgião'? Às vezes. Como a sentença 15 mostra, às vezes não precisamos distinguir entre cirurgiões habilidosos e outros cirurgiões.

Devemos sempre distinguir entre as diferentes maneiras de ser habilidoso, bom, ruim ou grande? Não. Como o argumento sobre Billy mostra, às vezes precisamos apenas falar sobre um tipo de habilidade. Se você estiver simbolizando um argumento que é apenas sobre cães, não há problemas em se definir um predicado que signifique 'x é grande'. Se o domínio inclui cães e ratos, entretanto, é provavelmente introduzir o predicado que signifique que 'x é grande para um cão'.

Exercícios Práticos

A. Aqui estão figuras silogísticas identificadas por Aristóteles e os sucessores dele, juntamente com os nomes medievais dos silogismos:

1. **Barbara**. Todo G é F. Todo H é G. Logo: Todo H é F
2. **Celarent**. Nenhum G é F. Todo H é G. Logo: Nenhum H é F
3. **Ferio**. Nenhum G é F. Algum H é G. Logo: Algum H não é F
4. **Darii**. Todo G é F. Algum H é G. Logo: Algum H é F.
5. **Camestres**. Todo F é G. Nenhum H é G. Logo: Nenhum H é F.
6. **Cesare**. Nenhum F é G. Todo H é G. Logo: Nenhum H é F.
7. **Baroko**. Todo F é G. Algum H não é G. Logo: Algum H não é F.
8. **Festino**. Nenhum F é G. Algum H é G. Logo: Algum H não é F.
9. **Datisi**. Todo G é F. Algum G é H. Logo: Algum H é F.
10. **Disamis**. Algum G é F. Todo G é H. Logo: Algum H é F.
11. **Ferison**. Nenhum G é F. Algum G é H. Logo: Algum H não é F.
12. **Bokardo**. Algum G não é F. Todo G é H. Logo: Algum H não é F.
13. **Camenes**. Todo F é G. Nenhum G é H Logo: Nenhum H é F.
14. **Dimaris**. Algum F é G. Todo G é H. Logo: Algum H é F.
15. **Fresison**. Nenhum F é G. Algum G é H. Logo: Algum H não é F.

Simbolize cada argumento em LPO.

B. Usando a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas
$K(x)$: $\_\_\_\_\__x$ conhece a combinação do cofre
$S(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um espião
$V(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um vegetariano
h: Hofthor
i: Ingmar

simbolize as seguintes sentenças em LPO:

1. Nem Hofthor nem Ingmar são vegetarianos.
2. Nenhum espião conhece a combinação do cofre
3. Ninguém conhece a combinação do cofre, a menos que Ingmar conheça.

4. Hofthor é um espião, mas nenhum vegetariano é espião.

C. Usando a seguinte chave de simbolização:

domínio: todos os animais
$A(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um jacaré
$M(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um macaco
$R(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um réptil
$Z(x)$: $\_\_\_\_\__x$ vive no zoológico
a: Amos
b: Bouncer
c: Cleo

simbolize as seguintes sentenças em LPO:

1. Amos, Bouncer e Cleo vivem todos no zoológico
2. Bouncer é um réptil, mas não é um jacaré
3. Alguns répteis vivem no zoológico
4. Todo jacaré é um réptil
5. Qualquer animal que vive no zoológico é um macaco ou um jacaré
6. Há répteis que não são jacarés
7. Se qualquer animal é um réptil, então Amos é
8. Se qualquer animal é um jacaré, então ele é um réptil

D. Para cada argumento, escreva uma chave de simbolização e simbolize o argumento em LPO.

1. Willard é um lógico.Todos os lógicos usam chapéus engraçados. Logo, Willard usa chapéu engraçado
2. Nada na minha mesa de trabalho escapa da minha atenção. Há um computador na minha mesa de trabalho. Como tal, há um computador que não escapa da minha atenção.
3. Todos os meus sonhos são em preto e branco. Programas de tv antigos são em preto e branco. Portanto, alguns dos meus sonhos são programas de tv antigos.
4. Nem Holmes nem Watson estiveram na Austrália. Uma possoa poderia ver um canguru somente se ela estivesse na Austrália ou em um zoológico. Embora Watson não tenha visto um canguru, Holmes viu. Portanto, Holmes esteve em um zoológico.

5. Ninguém espera a Inqisição Espanhola. Ninguém conhece os problemas que já vi. Portanto, cada um que espera a Inquisição Espanhola conhece os problemas que já vi.
6. Todos os bebês são ilógicos. Ninguém que seja ilógico pode gerenciar um crocodilo. Berthold é um bebê. Portanto, Berthold é incapaz de gerenciar um crocodilo.

CAPÍTULO 23

Generalidade múltipla

Até agora, consideramos somente sentenças que requerem predicados unários e um quantificador. De fato, o poder total de LPO chega quando começamos usar predicados eneários e quantificadores múltiplos. Por este insight, temos de agradecer a Gottlob Frege (1879), mas também a C. S. Peirce.

23.1 Predicados eneários

Todos os predicados que consideramos até então lidam com propriedades que objetos podem ter. Estas propriedades tem um espaço nelas, e, para fazer uma sentença, simplesmente precisamos preenchê-lo com um termo. Eles são predicados ENEÁRIOS.

Contudo, outros predicados lidam com uma *relação* entre duas coisas. Aqui estão alguns exemplos de predicados relacionais em português:

_____ ama _____
_____ está à esquerda de _____
_____ está em débito com _____

Estes são predicados BINÁRIOS. Ele precisam ser completados com dois termos para formar uma sentença. Inversamente, se começarmos com uma sentença em português contendo vários termos singulares, podemos remover dois termos sinfulares para obter predicados binários diferentes. Considere a sentença ‘Vinnie pegou emprestado de Nunzio o carro da família’ Ao deletar dois termos singulares, podemos obter qualquer um dos três predicados binários diferentes

> Vinnie pegou _____ emprestado de _____
>
> _____ pegou o carro da família emprestado de _____
>
> _____ pegou _____ emprestado de Nunzio

e, ao remover todos os termos singulares, temos um predicado TERNÁRIO:

> _____ pegou _____ emprestado de _____

De fato, a princípio, não há um limite máximo para o número de lugares que nossos predicados podem ter.

Agora, há uma pequena fraqueza com o foi dito acima. Nós usamos o mesmo símbolo, ‘_____’, para indicar o espaço formado ao deletar um termo de uma sentença. Contudo (como Frege enfatizou), estes são espaços *diferentes*. Para obter uma sentença, podemos completá-los com o mesmo termo, mas podemos igualmente completá-los com termos diferentes, e em várias ordens diferentes. As frases a seguir são perfeitamente boas, e todas elas significam coisas bem diferentes:

> Karl ama Karl
> Karl ama Imre
> Imre ama Karl
> Imre ama Imre

O ponto é que nós precisamos manter controle dos espaços no predicado, para que possamos ter controle sobre como iremos preenchê-los.

Para mantermos controle sobreos espaços, iremos nomeá-los. As convenções de nomeação que adotaremos são melhor explicadas por exemplos. Suponha que queiramos simbolizar as seguintes sentenças:

1. Karl ama Imre.
2. Imre ama a so próprio.
3. Karl ama Imre, mas não vice-versa.
4. Karl é amado por Imre.

Começaremos com a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas
i: Imre
k: Karl
$L(x,y)$: $\_\_\_\_\__x$ ama $\_\_\_\_\__y$

A sentença 1 será agora simbolizada por '$L(k,i)$'.

A sentença 2 pode ser parafraseada como 'Imre ama Imre'. Ela pode agora ser simbolizada por '$L(i,i)$'.

A sentença 3 é uma conjunção. Podemos parafraseá-la como 'Karl ama Imre, e Imre não ama Karl'. Ela pode agora ser simbolizada por '$L(k,i) \wedge \neg L(i,k)$'.

A sentença 4 pode ser parafraseada por 'Imre ama Karl'. Ela pode então ser simbolizada por '$L(i,k)$'. Certamente, isso insulta a diferença de tom entre a voz ativa e a passiva; tais nuances são perdidos na LPO.

Este último exemplo, porém, destaca algo importante. Suponha que nós adicionamos à nossa chave de simbolização o seguinte:

$M(x,y)$: $\_\_\_\_\__y$ ama $\_\_\_\_\__x$

Aqui, nós usamos a mesma palavra portuguesa ('ama') que usamos em nossa chave de simbolização para '$L(x,y)$'. No entanto, nós trocamos a ordem dos *espaços* (veja de perto os pequenos subscritos!). Então, agora, tanto '$M(k,i)$' quanto '$L(i,k)$' simbolizam 'Imre ama Karl'. Tanto '$M(i,k)$' quanto '$L(k,i)$' simbolizam 'Karl ama Imre'. Uma vez que o amor pode ser não correspondido, estas são afirmações bem diferentes.

A moral da história é simples. Quando estivermos lidando compredicados com mais de um lugar, nós precisamos prestar atenção cuidadosamente à ordem dos lugares.

23.2 A ordem dos quantificadores

Considere a sentença 'todo mundo ama alguém'. Ela é potencialmente ambígua. Ela pode significar qualquer um dos seguintes:

5. Para toda pessoa x, há uma pessoa que x ama
6. Há uma pessoa particular que toda pessoa ama

A sentença 5 pode ser simbolizada por '$\forall x \exists y\, L(x,y)$', e seria verdadeira no caso de um triângulo amoroso. Por exepmlo, suponha que nosso domínio de discurso esteja restrito a Imre, Juan e Karl. Suponha também que Karl ama Imre, mas não Juan, que Imre ama Juan, mas não Karl, e que Juan ama Karl, mas não Imre. Então, a sentença 5 é verdadeira.

A sentença 6 é simbolizada por '$\exists y \forall x\, L(x,y)$'. A sentença 6 *não* é verdadeira na situação descrita acima. Novamente, supona que nosso domínio de discurso esteja restrito a Imre, Juan e Karl. Isso requer que todos, Juan, Imre e Karl, converjam en (pelo menos) um objeto de amor.

O ponto do exemplo é ilustrar que a ordem dos quantificadores importa bastante. De fato, alterar sua ordem é chamado de *falácia da mudança do quantificador*. Aqui está um exemplo, que surge de várias formas ao longo da literatura filosófica:

Para toda pessoa há uma verdade que ela não pode conhecer. ($\forall\exists$)
$\therefore$ Há uma verdade que ninguém pode conhecer. ($\exists\forall$)

Esta forma de argumento é obviamente inválida. É tão ruim quanto[1]:

Todo cão tem seu dia. ($\forall\exists$)
$\therefore$ Há um dia para todo cão ($\exists\forall$)

A ordem dos quantificadores também é importante em definições na matemática. Por exemplo, há uma grande diferença entre continuidade pontual e uniforme de funções:

- Uma função f é *pontualmente contínua* se

$$\forall \epsilon \forall x \forall y \exists \delta (\left|x - y\right| < \delta \to \left|f(x) - f(y)\right| < \epsilon)$$

- Uma função f é *uniformemente contínua* se

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x \forall y (\left|x - y\right| < \delta \to \left|f(x) - f(y)\right| < \epsilon)$$

A moral da história é: tome muito cuidado com a ordem da quantificação.

---

[1] Obrigado a Rob Trueman pelo exemplo.

23.3 Caminho de pedras para a formalização

Uma vez que temos a possibilidade de múltiplos quantificadores e predicados com vários lugares, as representações na LPO podem rapidamente começar a ficar um pouco complicadas. Quando você está tentando simbolizar uma sentença complexa, nós recomendamos o estabelecimento de vários caminhos de pedra. Como de costume, esta ideia é melhor ilustrada por exemplos. Considere esta chave de representação:

domínio: pessoas e cães
$D(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um cão
$F(x,y)$: $\_\_\_\_\__x$ é um amigo de $\_\_\_\_\__y$
$O(x,y)$: $\_\_\_\_\__x$ é dono de $\_\_\_\_\__y$
g: Geraldo

Agora, vamos tentar simbolizar estas sentenças:

7. Geraldo é dono de um cão.
8. Alguém é dono de um cão.
9. Todos os amigso de Geraldo são donos de cães.
10. Todo dono de cão é amigo de um dono de cão.
11. Todo amigo de dono de cão é dono do cão de um amigo.

A sentença 7 pode ser parafraseada como ‘Há um cão do qual Geraldo é dono’. Isso pode ser simbolizado por ‘$\exists x(D(x) \wedge O(g,x))$’.

A sentença 8 pode ser parafraseada como ‘Há algum y tal que y é um dono de cão’. Lidando com parte disso, poderíamos escrever ‘$\exists y$(y é um dono de cão)’. Agora, o fragmento que nós deixamos como ‘y é um dono de cão’ é bem parecido com a sentença 7, exceto pelo fato de que ele não é especificamente sobre Geraldo. Então, podemos simbolizar a sentença 8 por:

$$\exists y \exists x(D(x) \wedge O(y,x))$$

Nós devemos pausar para clarificar algo aqui. Ao elaborar como simbolizar a última sentença, nós escrevemos ‘$\exists y$(y é um dono de cão)’. Para ser bem claro: isso *não* é uma sentença da LPO *nem* do português: ela usa um pouco da LPO (‘$\exists$’, ‘y’) e um pouco do inglês (‘dono de cão’). Isso realmente é *apenas um caminho de pedra* em direção à completa simbolização da sentença em inglês com uma sentença da LPO.

Você deve considerá-la como algo um tanto grosseiro, como os rabiscos que você pode distraidamente desenhar na margem deste livro, enquanto se concentra ferozmente em algum problema.

A sentença 9 pode ser parafraseada como 'Todo mundo qe é amigo de Geraldo é dono de um cão'. Usando nossa tática dos caminhos de pedra, podemos escrever

$$\forall x\big[F(x,g) \rightarrow x \text{ é um dono de cão}\big]$$

Agora, o fragmento que deixamos para lidar é estruturalmente como a sentença 7. Contudo, seria um erro se nós simplesmente escrevêssemos

$$\forall x\big[F(x,g) \rightarrow \exists x(D(x) \land O(x,x))\big]$$

porque nós teríamos aqui um *conflito de variáveis*. O escopo do quantificador universal, '$\forall x$', é todo o condicional, então o 'x' em '$D(x)$' deveria ser governado por ele, mas '$D(x)$' também cai sob o escopo do quantificador existencial '$\exists x$', de maniera que '$D(x)$' deveria ser governado por ele. Agora a confusão reina: sobre qual 'x' estamos falando? De repente a sentença se torna ambígua (se ela é mesmo significativa), e lógicos odeiam ambiguidades. A moral da história é que uma única variável não pode servir a dois quantificadores-mestres simultaneamente.

Para continuar nossa simbolização, então, nós precisamos escolher alguma variável diferente para nosso quantificador existencial. O que nós queremos é algo como

$$\forall x\big[F(x,g) \rightarrow \exists z(D(z) \land O(x,z))\big]$$

Isso simboliza adequadamente a sentença 9.

A sentença 10 pode ser parafraseada como 'Para qualquer x que é um dono de cão, há um dono de cão de quem x é amigo'. Usando nossa tática dos caminhos de pedra, isso se torna

$$\forall x\big[x \text{ é um dono de cão} \rightarrow \exists y(y \text{ é um dono de cão} \land F(x,y))\big]$$

Completando a simbolização, nós acabamos com

$$\forall x\big[\exists z(D(z) \land O(x,z)) \rightarrow \exists y\big(\exists z(D(z) \land O(y,z)) \land F(x,y)\big)\big]$$

Note que nós usamos a mesma letra, 'z', tanto no antecedente quanto no consequente do condicional, mas elas são governadas por dois quantificadores diferentes. Isso é ok: não há conflito aqui, porque está claro sob qual quantificador aquela variável cai. Podemos representar graficamente o escopo dos quantificadores assim:

$$\forall x\overbrace{\Big[\overbrace{\exists z(D(z)\land O(x,z))}^{\text{escopo do 1º ‘}\exists z\text{’}}\to \overbrace{\exists y(\quad\overbrace{\exists z(D(z)\land O(y,z))}^{\text{escopo do 2textsuperscripto ‘}\exists z\text{’}}\quad\land F(x,y))}^{\text{escopo de ‘}\exists y\text{’}}\Big]}^{\text{escopo de ‘}\forall x\text{’}}$$

Isso mostra que nenhuma variável está sendo forçada a servir a dois mestres simultaneamente.

A sentença 11 é a mais complicada ainda. Nós a parafraseamos como ‘Para algum x que é amigo de um dono de cão, x é dono de um cão que também é possuído por um amigo de x’. Usando nossa tática dos caminhos de pedra, isso se torna:

$$\begin{aligned}&\forall x\big[x \text{ é amigo de um dono de cão} \to\\&\qquad x \text{ é dono de um cão que é propriedade de um amigo de } x\big]\end{aligned}$$

Desmembrando um pouco mais:

$$\begin{aligned}&\forall x\big[\exists y(F(x,y)\land y \text{ é um dono de cão})\to\\&\qquad\qquad \exists y(D(y)\land O(x,y)\land y \text{ é possuído por um amigo de } x)\big]\end{aligned}$$

E um pouco mais:

$$\begin{aligned}&\forall x\big[\exists y(F(x,y)\land\exists z(D(z)\land O(y,z)))\to\\&\qquad\qquad\qquad \exists y(D(y)\land O(x,y)\land\exists z(F(z,x)\land O(z,y)))\big]\end{aligned}$$

E nós terminamos!

23.4 Quantificadores suprimidos

A lógica geralmente pode ajudar a esclarecer os significados de afirmações portuguesas, especialmente onde os quantificadores são deixados implícitos ou sua ordem é ambígua ou pouco clara. A clareza de expressão e pensamento proporcionada pela LPO pode te dar uma vantagem significativa na argumentação, como pode ser visto na seguinte abordagem da filósofa política britânica Mary Astell (1666–1731) de seu contemporâneo, o teólogo William Nicholls. No Discurso IV: O Dever das Esposas para seus Maridos, de seu *The Duty of Inferiors towards their Superiors, in Five Practical Discourses* (Londres 1701), Nicholls argumentou que as mulheres são naturalmente inferiores aos homens. No prefácio da 3ª edição de seu tratado, *Algumas reflexões sobre o casamento, ocasião do caso do duque e da duquesa de Mazarine; que também é considerado* Astell respondeu da seguinte maneira:

> 'Tis true, thro' Want of Learning, and of that Superior Genius which Men as Men lay claim to, she [Astell] was ignorant of the *Natural Inferiority* of our Sex, which our Masters lay down as a Self-Evident and Fundamental Truth. She saw nothing in the Reason of Things, to make this either a Principle or a Conclusion, but much to the contrary; it being Sedition at least, if not Treason to assert it in this Reign.
>
> For if by the Natural Superiority of their Sex, they mean that *every* Man is by Nature superior to *every* Woman, which is the obvious meaning, and that which must be stuck to if they would speak Sense, it wou'd be a Sin in *any* Woman to have Dominion over *any* Man, and the greatest Queen ought not to command but to obey her Footman, because no Municipal Laws can supersede or change the Law of Nature; so that if the Dominion of the Men be such, the *Salique Law,*[2] as unjust as *English Men* have ever thought it, ought to take place over all the Earth, and the most glorious Reigns in the *English, Danish, Castilian*, and other Annals, were wicked Violations of the Law of Nature!
>
> If they mean that *some* Men are superior to *some* Women this is no great Discovery; had they turn'd the Tables they might have seen that *some* Women are Superior to *some* Men. Or had they been pleased to remember their Oaths of Allegiance and Supremacy, they might have known that *One* Woman is superior to *All* the Men in these Nations,

---

[2] The Salique law was the common law of France which prohibited the crown be passed on to female heirs.

> or else they have sworn to very little purpose.[3] And it must not be suppos'd, that their Reason and Religion wou'd suffer them to take Oaths, contrary to the Laws of Nature and Reason of things.[4]

Podemos simbolizar as diferentes interpretações que Astell oferece das afirmações de Nicholls de que homens são superiores a mulheres: Ele quis ou dizer que todo homem é superior a toda mulher, i.e.

$$\forall x(M(x) \rightarrow \forall y(W(y) \rightarrow S(x,y)))$$

ou que algum homem é superior a alguma mulher,

$$\exists x(M(x) \wedge \exists y(W(y) \wedge S(x,y))).$$

O último é verdadeiro, mas

$$\exists y(W(y) \wedge \exists x(M(x) \wedge S(y,x))).$$

também é (alguma mulher é superior a algum homem), então isso "não seria uma grande descoberta". De fato, uma vez que a rainha é superior a todos os seus sujeitos, é até mesmo verdadeiro que uma mulher é superior a todo homem. i.e.,

$$\exists y(W(y) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(y,x))).$$

Mas isso é incompatível com o "significado óbvio" da afirmação de Nicholls, i.e., a primeira leitura. Então, o que Nicholls afirma equivale a traição contra a rainha!

Exercícios Práticos

A. Usando esta chave de simbolização:

domínio: todos os animais
$A(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é um jacaré
$M(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é um macaco
$R(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é um réptil

---

[3] In 1706, England was ruled by Queen Anne.

[4] Mary Astell, *Reflections upon Marriage*, 1706 Preface, iii–iv, and Mary Astell, *Political Writings*, ed. Patricia Springborg, Cambridge University Press, 1996, 9–10.

$Z(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_{x}$ vive no zoológico
$L(x,y)$: $\underline{\hspace{3em}}_{x}$ ama $\underline{\hspace{3em}}_{y}$
a: Amos
b: Bouncer
c: Cleo

simbolize cada uma das seguintes sentenças na LPO:

1. Se Cleo ama Bouncer, então Bouncer é um macaco.
2. Se tanto Bouncer quanto Cleo são jacarés, então Amos ama ambos.
3. Cleo ama um réptil.
4. Bouncer ama todos os macacos que vivem no zoológico.
5. Todos os macacos amados por Amos os amam de volta.
6. Todo macaco que Cleo ama também é amado por Amos.
7. Há um macaco que ama Bouncer, mas, infelizmente, Bouncer não retribui esse amor.

B. Usando a seguinte chave de simbolização:

domínio: todos os animais
$D(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_{x}$ é um cão
$S(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_{x}$ gosta de filmes de samurai
$L(x,y)$: $\underline{\hspace{3em}}_{x}$ é maior que $\underline{\hspace{3em}}_{y}$
r: Rave
h: Shane
d: Daisy

simbolize as seguintes sentenças na LPO:

1. Rave é um cão que gosta de filmes de samurai.
2. Rave, Shane e Daisy são cães.
3. Shane é maior que Rave, e Daisy é maior que Shane.
4. Todo cão gosta de filmes de samurai.
5. Apenas cães gostam de filmes de samurai.
6. Há um cão que é maiorq ue Shane.
7. Se há um cão maior que Daisy, então há um cão maior que Shane.
8. Nenhum animal que gosta de filmes de samurai é maior que Shane.
9. Nenhum cão é maior que Daisy.

10. Qualquer animal que não gosta de filmes de samurai é maior que Rave.
11. Há um animal que está entre Rave e Shane em tamanho.
12. Não há um cão que está entre Rave e Shane em tamanho.
13. Nenhum cão é maior que si mesmo.
14. Todo cão é maior que algum cão.
15. Há um animal que é menor que todo cão.
16. Se há um animal que é maior que qualquer cão, então esse animal não gosta de filmes de samurai.

C. Usando a chave de simbolização dada, simbolize cada sentença do português na LPO:

domínio: doces
$C(x)$: $\underline{\hspace{2em}}_x$ tem chocolate.
$M(x)$: $\underline{\hspace{2em}}_x$ tem marzipã.
$S(x)$: $\underline{\hspace{2em}}_x$ tem açúcar.
$T(x)$: Boris experimentou $\underline{\hspace{2em}}_x$.
$B(x,y)$: $\underline{\hspace{2em}}_x$ é melhor que $\underline{\hspace{2em}}_y$.

1. Boris nunca experimentou qualquer doce.
2. Marzipã é sempre feito com açúcar.
3. Algum doce não tem açúcar.
4. O melhor doce é chocolate.
5. Nenhum doce é melhor que si mesmo.
6. Boris nunca experimentou chocolates sem açúcar.
7. Boris experimentou marzipã e chocolate, mas nunca ambos juntos.
8. Qualquer doce com chocolate é melhor que qualquer doce sem chocolate.
9. Qualquer doce com chocolate e marzipã é melhor que qualquer doce que não tem ambos.

D. Usando a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas e louças na mesa
$R(x)$: $\underline{\hspace{2em}}_x$ acabou.
$T(x)$: $\underline{\hspace{2em}}_x$ está na mesa
$F(x)$: $\underline{\hspace{2em}}_x$ é comida.
$P(x)$: $\underline{\hspace{2em}}_x$ é uma pessoa.

$L(x,y)$: $\underline{\qquad}_x$ gosta de $\underline{\qquad}_y$.
e: Eli
f: Francesca
g: o guacamole

simbolize as seguintes sentenças do português na LPO:

1. Toda a comida está na mesa.
2. Se o guacamole não acabou, então ele está na mesa.
3. Todos gostam de guacamole.
4. Se alguém gosta de guacamole, então Eli gosta de guacamole.
5. Francesca gosta apenas dos pratos que não acabaram.
6. Francesca não gosta de qualquer pessoa, e ninguém gosta de Francesca.
7. Eli gosta de qualquer um que gosta de guacamole.
8. Eli gosta de qualquer um que gosta de pessoas que ele gosta.
9. Se já há alguém na mesa, então toda a comida deve ter acabado.

E. Usando a chave de simbolização:

domínio: pessoas
$D(x)$: $\underline{\qquad}_x$ dança ballet.
$F(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é feminimo.
$M(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é masculino.
$C(x,y)$: $\underline{\qquad}_x$ é uma criança de $\underline{\qquad}_y$.
$S(x,y)$: $\underline{\qquad}_x$ é irmão/irmã de $\underline{\qquad}_y$.
e: Elmer
j: Jane
p: Patrick

simbolize as seguintes sentenças em LPO:

1. Todas as crianças de Patrick dançam ballet
2. Jane é filha de Patrick.
3. Patrick tem uma filha.
4. Jane é filha única.
5. Todos os filhos de Patrick dançam ballet.
6. Patrick não tem filhos.
7. Jane é sobrinha de Elmer.
8. Patrick é irmão de Elmer.
9. Os irmãos de Patrick não têm crianças.

10. Jane é uma tia.
11. Todos que dançam ballet têm um irmão que também dança ballet.
12. Toda mulher que dança ballet é a criança de alguém que dança ballet.

CAPÍTULO 24

Identidade

Considere esta sentença:

1. Pavel deve dinheiro a todos

Seja o domínio de pessoas; isso nos permitirá simbolizar 'todo mundo' com um quantificador universal. Oferecendo a chave de simbolização:

$O(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ deve dinheiro a $\_\_\_\_\__y$
p: Pavel

nós podemos simbolizar a sentença 1 como '$\forall x\, O(p, x)$'. Mas isso tem uma consequência (talvez) esquisita. Isso requer que Pavel deva dinheiro a todo membro do domínio (qualquer que seja o domínio). O domínio certamente inclui Pavel. Então isso implica em Pavel dever dinheiro a si mesmo.

Talvez quiséssemos dizer:

2. Pavel deve dinheiro a *todos os outros*
3. Pavel deve dinheiro a todos, *exceto* a Pavel
4. Pavel deve dinheiro a todos, *exceto* a si próprio

mas nós não sabemos como lidar com as letras em itálico ainda. A solução é adicionar outro símbolo à LPO.

24.1 Adicionando identidade

O símbolo '=' é um predicado de dois lugares. Uma vez ele deve ter um significado especial, nós o escrevemos de maneira um pouco diferente:

nós o colocamos entre dois termos, em vez de na frente. E isso *tem* um significado bastante particular. Nós *sempre* adotamos a seguinte chave de simbolização:

$x = y$: $\_\_\_\_\__x$ é idêntico a $\_\_\_\_\__y$

Isso não significa *meramente* que os objetos em questão são indistinguíveis, ou que todas as mesmas coisas são verdadeiras sobre eles. Em vez disso, isso significa que os objetos em questão são *exatamente o mesmo* objeto.

Agora, suponha que queiramos simbolizar esta sentença:

5. Pavel é Mister Checkov

Adicionemos nossa chave de simbolização:

c: Mister Checkov

Agora, a sentença 5 pode ser simbolizada como '$p = c$'. Isso significa que ambos os nomes 'p' e 'c' nomeiam a mesma coisa.

Agora, nós podemos lidar com as sentenças 2–4. Todas essas sentenças podem ser parafraseadas como 'Todos que não são Pavel são credores de Pavel'. Parafraseando um pouco mais, nós temos: 'Para todo x, se x não é Pavel, então x é credor de Pavel'. Agora que nós estamos armados com nosso novo símbolo de identidade, nós podemos simbolizar isso como '$\forall x(\neg x = p \rightarrow O(p,x))$'.

Esta última sentença contém a fórmula '$\neg x = p$'. Isso pode parecer um pouco estranho, porque o símbolo que vem imediatamente depois do '$\neg$ é uma variável, em vez de outro predicado, mas isso não é um problema. Nós estamos simplesmente negando a fórmula '$x = p$' inteira.

Além das sentenças que usam a palavra 'outros', 'em vez de' e 'exceto', a identidade será útil ao simbolizar algumas sentenças que contêm as palavras 'além de' e 'apenas'. Considere estes exemplos:

6. Ninguém além de Pavel deve dinheiro a Hikaru.
7. Apenas Pavel deve dinheiro a Hikaru.

Deixe 'h' nomear Hikaru. A sentença 6 pode ser parafraseada como 'Ninguém que não é Pavel deve dinheiro a Hikaru'. Isso pode ser simbolizado por '$\neg\exists x(\neg x = p \wedge O(x,h))$'. Igualmente, a sentença 6 pode ser parafraseada como ‘Para todo x, se x deve dinheiro a Hikaru, então x é Pavel’. Ela pode ser simbolizada como ‘$\forall x(O(x, h) \rightarrow x = p)$’.

A sentença 7 pode ser tratada similarmente, mas há uma sutileza aqui. As sentenças 6 ou 7 implicam que o próprio Pavel deve dinheiro a Hikaru?

24.2 Há pelo menos...

Nós também podemos usar a identidade para dizer quantas coisas existem de um tipo particular. Por exemplo, considere estas sentenças:

8. Há pelo menos uma maçã
9. Há pelo menos duas maçãs
10. Há pelo menos três maçãs

Nós utilizaremos a chave de simbolização:

$A(x)$: $\underline{\hspace{2cm}}_x$ é uma maçã

A sentença 8 não requer identidade. Ela pode ser simbolizada adequadamente por ‘$\exists x\, A(x)$’: Há uma maçã; talvez várias, mas pelo menos uma.

Pode ser tentador também simbolizar a sentença 9 sem identidade. Ainda, considere a sentença ‘$\exists x \exists y(A(x) \wedge A(y))$’. Grosseiramente, isso diz que há alguma maçã x e alguma maçã y no domínio. Ua vez que nada as impede de serem a mesma maçã, isso seria verdadeiro mesmo se houvesse apenas uma maçã. Para termos certeza de que estamos lidando com maçãs *diferentes*, precisamos de um predicado de identidade. A sentença 9 precisa dizer que as duas maçãs que existem não são idênticas, então ela pode ser simbolizada por ‘$\exists x \exists y((A(x) \wedge A(y)) \wedge \neg x = y)$’.

A sentença 10 requer que falemos sobre três maçãs diferentes. Agora nós precisamos de três quantificadores existenciais, e precisamos ter certeza de que cada um vai selecionar algo diferente:

$$\exists x \exists y \exists z[((A(x) \wedge A(y)) \wedge A(z)) \wedge ((\neg x = y \wedge \neg y = z) \wedge \neg x = z)].$$

Note que *não* é suficiente usar ‘$\neg x = y \wedge \neg y = z$’ para simbolizar ‘$x$, y e z são todos diferentes’. Porque isso seria verdadeiro se x e y fossem diferentes, mas $x = z$. Em geral, para dizer que $x_1, \ldots, x_n$ são todos diferentes, nós precisamos da conjunção de $\neg x_i = x_j$ para todo par diferente i e j.

24.3 Há no máximo...

Agora, considere estas sentenças:

11. Há no máximo uma maçã
12. Há no máximo duas maçãs

A sentença 11 pode ser parafraseada como ‘Não é o caso que há no mínimo *duas* maçãs’. Isso é apenas a negação da sentença 9:

$$\neg\exists x\exists y[(A(x) \land A(y)) \land \neg x = y]$$

Mas a sentença 11 pode também ser abordada de outra maneira. Ela significa que se você escolher um objeto e ele for uma maçã, e então você escolhe outro objeto e ele também é uma maçã, você deve ter escolhido o mesmo objeto nas duas vezes. Com isso em mente, isso pode ser simbolizado por

$$\forall x\forall y\big[(A(x) \land A(y)) \to x = y\big]$$

As duas sentenças serão logicamente equivalentes.

De maneira similar, a sentença 12 pode ser abordada de duas maneiras diferentes. Ela pode ser parafraseada como ‘Não é o caso que há *três* ou mais maçãs distintas’, então nós podemos oferecer:

$$\neg\exists x\exists y\exists z(A(x) \land A(y) \land A(z) \land \neg x = y \land \neg y = z \land \neg x = z)$$

Alternativamente, nós podemos lê-la como dizendo que se você escolher uma maçã, e uma maçã, e uma maçã, então você vai ter escolhido (pelo menos) um desses objetos mais de uma vez. Então:

$$\forall x\forall y\forall z\big[(A(x) \land A(y) \land A(z)) \to (x = y \lor x = z \lor y = z)\big]$$

24.4 Há exatamente...

Agora, nós podemos considerar enunciados precisos, como:

13. Há exatamente uma maçã.
14. Há exatamente duas maçãs.
15. Há exatamente três maçãs.

A sentença 13 pode ser parafraseada como ‘Há *pelo menos* uma maçã e há *no máximo* uma maçã’. Isso é apenas a conjunção das sentenças 8 e 11. Então, nós podemos oferecer:

$$\exists x A(x) \land \forall x \forall y \big[(A(x) \land A(y)) \rightarrow x = y\big]$$

Mas talvez seja mais direto parafrasear a sentença 13 como ‘Há uma coisa x que é uma maçã, e tudo que é uma maçã é x’. Pensada dessa maneira, nós oferecemos:

$$\exists x \big[A(x) \land \forall y (A(y) \rightarrow x = y)\big]$$

Similarmente, a sentença 14 pode ser parafraseada como ‘Há *pelo menos* duas maçãs, e há *no máximo* duas maçãs’. Então, nós poderíamos oferecer

$$\begin{aligned}&\exists x \exists y ((A(x) \land A(y)) \land \neg x = y) \land \\ &\qquad \forall x \forall y \forall z \big[((A(x) \land A(y)) \land A(z)) \rightarrow ((x = y \lor x = z) \lor y = z)\big]\end{aligned}$$

De maneira mais eficiente, porém, nós podemos parafraseá-la como ‘Há pelo menos duas maçãs diferentes, e toda maçã é uma dessas duas maçãs’. Então, nós oferecemos:

$$\exists x \exists y \big[((A(x) \land A(y)) \land \neg x = y) \land \forall z (A(z) \rightarrow (x = z \lor y = z)\big]$$

Finalmente, considere estas sentenças:

16. Há exatamente duas coisas
17. Há exatamente dois objetos

Pode ser tentador adicionar um predicado à nossa chave de simbolização, para simbolizar o predicado português ‘_____ é uma coisa’ ou ‘_____ é um objeto’, mas isso é desnecessário. Palavras como ‘coisa’ e ‘objeto’ não separam o joio do trigo: elas se aplicam trivialmente a qualquer coisa, ou que quer dizer que elas se aplicam trivialmente a toda coisa. Então, nós podemos simbolizar as duas sentenças com uma das seguintes opções:

$$\begin{aligned}&\exists x \exists y \neg x = y \land \neg \exists x \exists y \exists z ((\neg x = y \land \neg y = z) \land \neg x = z)\\ &\exists x \exists y \big[\neg x = y \land \forall z (x = z \lor y = z)\big]\end{aligned}$$

Exercícios Práticos

A. Explique por que:

- ‘$\exists x \forall y(A(y) \leftrightarrow x = y)$’ é uma boa simbolização de ‘há exataente uma maçã’.
- ‘$\exists x \exists y\big[\neg x = y \land \forall z(A(z) \leftrightarrow (x = z \lor y = z))\big]$’ é uma boa simbolização de ‘há exatamente duas maçãs’.

CAPÍTULO 25

Descrições definidas

Considere sentenças como:

1. Nick é o traidor.
2. O traidor foi a Cambridge.
3. O traidor é o deputado

Estas são descrições definidas: elas são feitas para escolher um *único* objeto. Elas devem ser contrastadas com as descrições *indefinidas*, como ‘Nick é *um* traidor’. Elas devem igualmente ser contrastadas com *genéricos*, como ‘*A* baleia é um mamífero’ (é inapropprieado perguntar *qual* baleia). A questão que encaramos é: como nós deveríamos lidar com descrições definidas na LPO?

25.1 Tratando descrições definidas como termos

Uma opção seria introduzir novos nomes sempre que nós nos depararmos com uma descrição definida. Isso provavelmente não é uma boa ideia. Nós sabemos que *o* traidor—quem quer que ele seja—é de fato *um* traidor. Nós queremos preservar esta informação em nossa simbolização. Uma segunda opção seria usar um *novo* operador de descrição definida, como ‘ι’. A ideia seria simbolizar ‘o F’ como ‘$\iota x\, F(x)$’; ou simbolizar ‘o G’ como ‘$\iota x\, G(x)$’, etc. Expressões da forma $\iota x, \mathscr{A}(x)$, então, se comportariam como nomes. Se nós seguirmos este caminho, então, ao usarmos a seguinte chave de simbolização

domínio: pessoas
$T(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é um traidor
$D(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é um deputado
$C(x)$: $\underline{\qquad}_x$ foi à Cambridge
n: Nick

nós podemos simbolizar a sentença 1 com '$n = ℩x\, T(x)$', a sentença 2 com '$C(℩x\, T(x))$', e a sentença 3 com '$℩x\, T(x) = ℩x\, D(x)$'.

Contudo, seria legal se nós não tivéssemos que adicionar um novo símbolo para a LPO. E, de fato, podemos ser capazes de sobreviver sem um.

25.2 A análise de Russell

Bertrand Russell ofereceu uma análise das descrições definidas. Muito brevemente, ele observou que, quando nós dizemos 'o F' em um contexto de uma descrição definida, nosso objetivo é escolher *a única* coisa que é F (no contexto apropriado). Então, Russell analisou a noção de descrição definida como se segue: [1]

O F é G **sse** há pelo menos um F, *e*
há no máximo F, *e*
todo F é G

Note uma característica muito importante dessa análise: *'o' não aparece no lado direito da equivalência.* Russell tem como objetivo fornecer um entendimento das descrições definidas em termos que não as pressupõem.

Agora, alguém poderia se preocupar com o fato de podermos dizer 'a mesa é marrom' sem implicar que há apenas uma mesa no universo. Mas isso (ainda) não é um contraexemplo fantástico à análise de Russell. É provável que o domínio de discurso seja restrito pelo contexto (e.g. a objetos na minha linha de visão).

---

[1] Bertrand Russell, 'On Denoting', 1905, {Mind 14}, pp. 479–93; também, Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, 1919, London: Allen e Unwin, ch. 16.

Se aceitarmos a análise do Russell das descrições definidas, podemos simbolizar sentenças da forma ‘o F é G’ usando nossa estratégia de quantificação numérica na LPO. Depois de tudo, podemos lidar com os três conjuntos do lado direito da análise de Russell como se segue:

$$\exists x F(x) \land \forall x \forall y((F(x) \land F(y)) \to x = y) \land \forall x(F(x) \to G(x))$$

De fato, nós poderíamos expressar o mesmo ponto de maneira mais clara, ao reconhecer que os primeiros dois conjuntos equivalem à afirmação de que há *exatamente* um F, e que o último conjunto nos diz que o objeto é F. Então, equivalentemente, nós poderíamos oferecer:

$$\exists x\big[(F(x) \land \forall y(F(y) \to x = y)) \land G(x)\big]$$

Usando estes tipos de técnicas, nós podemos, agora, simbolizar as sentenças 1–3 sem usar qualquer operador sofisticado e novo, como o ‘$\imath$’. A sentença 1 é exatamente como os exemplos que consideramos. Então, nós a simbolizaríamos como

$$\exists x\big[T(x) \land \forall y(T(y) \to x = y) \land x = n\big].$$

A sentença 2 também não apresenta problemas:

$$\exists x\big[T(x) \land \forall y(T(y) \to x = y) \land C(x)\big].$$

A sentença 3 é um pouco mais complicada, porque ela vincula duas descrições definidas. Mas, considerando a análise de Russell, ela pode ser parafraseada por ‘há exatamente um traidor, x, e há exatamente um deputado, y, e $x = y$’. Então, nós podemos simbolizá-la como

$$\exists x \exists y\Big(\big[T(x) \land \forall z(T(z) \to x = z)\big] \land \\ \big[D(y) \land \forall z(D(z) \to y = z)\big] \land x = y\Big)$$

Note que nós garantimos que a fórmula ‘$x = y$’ se encontra dentro do escopo de ambos os quantificadores!

25.3 Descrições definidas vazias

Uma das características legais da análise de Russell é que ela nos permite lidar com descrições definidas *vazias* de maneira ordenada.

A França não tem um rei atualmente. Agora, se nós fôssemos introduzir um nome, 'k', para nomear o atual rei da França, então tudo daria errado: lembre-se de §21 que um nome deve sempre selecionar algum objeto no domínio, e qualquer que seja o domínio que escolhamos, ele não conterá qualquer atual rei da França.

A análise de Russell ordenadamente evita este problema. Russell nos diz para tratar descrições definidas usando predicados e quantificadores, em vez de nomes. Uma vez que predicados podem ser vazios (ver §22), isso significa que agora nenhuma dificuldade surge quando a descrição definida é vazia.

De fato, a análise de Russell destaca prestativamente duas maneiras de incorrer em erro em uma afirmação envolvendo uma descrição definida. Para adaptar o exemplo de Stephen Neale (1990), [2], suponha que Alex afirme:

4. Eu estou saindo com o atual rei da França.

Usando a seguinte chave de simbolização:

a: Alex
$K(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um atual rei da França
$D(x,y)$: $\_\_\_\_\__x$ está saindo com $\_\_\_\_\__y$

A sentença 4 seria simbolizada por '$\exists x(\forall y(K(y) \leftrightarrow x = y) \land D(a,x))$'. Agora, isso pode ser falso de (pelo menos) duas maneiras, correspondendo a estes dois cenários diferentes:

5. Não há qualquer um que seja o atual rei da França e tal que Alex esteja saindo com ele.
6. Há um único rei da França, mas Alex não está saindo com ele.

A sentença 5 poderia ser parafraseada como 'Não é o caso que: o atual rei da França e Alex estão saindo'. Ela seria, então, simbolizada por '$\neg\exists x\big[(K(x) \land \forall y(K(y) \rightarrow x = y)) \land D(a,x)\big]$'. Poderíamos chamar isso de negação *externa*, uma vez que a negação governa a sentença completa. Note que isso será verdadeiro se não houver qualquer atual rei da França.

A sentença 6 pode ser simbolizada por '$\exists x((K(x) \land \forall y(K(y) \rightarrow x = y)) \land \neg D(a,x))$'. Nós poderíamos chamar isso de negação *interna*, uma

---

[2] Neale, *Descriptions*, 1990, Cambridge: MIT Press.

vez que a negação ocorre dentro do escopo da descerição definida. Note que sua verdade requer que haja um atual rei da França, embora um que não esteja saindo com Alex.

25.4 A adequação da análise de Russell

O quão boa é a análise de Russell das descrições definidas? Esta pergunta gerou uma literatura filosófica substancial, mas nós nos restringiremos a duas observações.

Uma preocupação se foca no tratamento de Russell de descrições definidas vazias. Se não há Fs, então, na análise de Russell, tanto 'o F é G' quanto 'o F é não-G' são falsas. P.F. Strawson sugeriu que tais sentenças não devem ser consideradas exatamente como falsas.[3] Em vez disso, elas envolvem falha de pressuposição, e deve ser tratada como não sendo nem *verdadeira* nem *falsa*.

Se concordarmos com Strawson aqui, precisaremos revisar nossa lógica. Pois, em nossa lógica, há apenas dois valores verdade (o Verdadeiro e o Falso), e a toda sentença é atribuído exatamente um desses valores verdade.

Mas há espaço para discordar de Strawson. Strawson está apelando para algumas intuições linguísticas, mas não é claro que elas são muito robustas. Por exemplo: não é apenas *falso*, e não 'vacuoso', que Tim está saindo com o atual rei da França?

Keith Donnellan levantou um segundo tipo de preocupação, que (de maneira bem grosseira) pode ser trazido à tona ao se pensar no caso de uma identidade equivocada.[4] Dois homens estão no canto: um homem muito alto bebendo o que parece ser um gin martini; e um homem bem pequeno bebendo o que parece ser uma caneca de água. Vendo-os, Malika diz:

7. O homem que bebe gin é muito alto!

A análise de Russell nos fará interpretar a sentença de Malika como:

7′. Há exatamente um bebedor de gin [no canto], e quem quer que seja um bebedor de gin [no canto] é muito alto.

---

[3] P.F. Strawson, 'On Referring', 1950, *Mind 59*, pp. 320–34.

[4] Keith Donnellan, 'Reference and Definite Descriptions', 1966, *Philosophical Review 77*, pp. 281–304.

Agora suponha que o homem muito alto está na verdade bebendo *água* em uma garrafa de martini enquanto o homem muito baixo está bebendo uma caneca de puro gin. Pela análise de Russell, Malika disse algo falso, mas nós não queremos dizer que Malika disse algo *verdadeiro*?

Novamente, alguém poderia perguntar o quão claro nossas intuições são neste caso. Podemos todos concordar que Malika pretendia escolher um homem particular, e dizer algo verdadeiro sobre ele (que ele era alto). Na análise de Russell, ela na verdade escolheu um homem diferente (o baixo), e consequentemente disse algo falso sobre ele. Mas, talvez os advogados da análise de Russell apenas precisam explicar *por que* as intenções de Malika foram frustradas, e então por que ela disse algo falso. Isso é fácil o suficiente para se fazer: Malika disse algo fácil porque ela teve falsas crenças sobre a bebida do homem; se as crenças de Malika sobre as bebidas tivessem sido verdadeiras, então ela teria dito algo verdadeiro.[5]

Dizer muito mais aqui nos levaria a profundas águas filosóficas. Isso não seria uma coisa ruim, mas por agora isso nos distraria do nosso propósito imediato de aprender lógica formal. Então, por agora, vamos ficar com a análise de Russell das descrições definidas, quando se tratar de lidar com as coisas em LPO. Isso é certamente o melhor que podemos oferecer, sem revisar nossa lógica significantemente, e é bastante defensável como uma análise.

Exercícios Práticos

A. Usando a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoa
$K(x)$: $\underline{\qquad}_x$ sabe a senha do cofre.
$S(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é um espião.
$V(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é um vegetariano.
$T(x,y)$: $\underline{\qquad}_x$ acredita em $\underline{\qquad}_y$.
h: Hofthor
i: Ingmar

---

[5] As partes interessadas deveriam ler Saul Kripke, 'Speaker Reference and Semantic Reference', 1977, in French et al (eds.), *Contemporary Perspectives in the Philosophy of Language*, Minneapolis: University of Minnesota Press, pp. 6-27.

Simbolize as seguintes sentenças em LPO:

1. Hofthor acredita em um vegetariano.
2. Todos que acreditam em Ingmar acreditam em um vegetariano.
3. Todos que acreditam em Ingmar acreditam em alguém que acredita em um vegetariano.
4. Apenas Ingmar sabe a senha do cofre.
5. Ingmar acredita em Hofthor, e em ninguém mais.
6. A pessoa que sabe a combinação do cofre é vegetariana.
7. A pessoa que sabe a combinação do cofre não é um espião.

B. Usando a seguinte chave de simbolização:

domínio: cartas em um baralho padrão
$B(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é preto.
$C(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é de paus.
$D(x)$: $\_\_\_\_\__x$ is um dois.
$J(x)$: $\_\_\_\_\__x$ is um valete.
$M(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um homem com um machado.
$O(x)$: $\_\_\_\_\__x$ tem um olho.
$W(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é selvagem.

Simbolize cada sentença em LPO:

1. Todas as cartas de paus são pretas.
2. Não há cartas selvagens.
3. Há pelo menos duas cartas de paus.
4. Há mais de um valete com um olho.
5. Há no máximo dois valetes com um olho.
6. Não há valetes pretos.
7. Há quatro cartas dois.
8. O dois de paus é uma carta preta.
9. Os valetes com um olho e o homem com o machado são selvagens.
10. Se o dois de paus é selvagem, então há exatamente uma carta selvagem.
11. O homem com o machado não é um valete.
12. O dois de paus não é o homem com o machado.

C. Usando a seguinte chave de simbolização:

domínio: animais no mundo
$B(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ está no campo do fazendeiro Brown.
$H(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ é um cavalo.
$P(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ é um Pégaso.
$W(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ tem asas.

simbolize as seguintes sentenças em LPO:

1. Há pelo menos três cavalos no mundo.
2. Há no mínimo três animais no mundo.
3. Há mais que um cavalo no campo do fazendeiro Brown.
4. Há três cavalos no campo do fazendeiro Brown.
5. Há uma única criatura alada no campo do fazendeiro Brown quaisquer outras criaturas no campo devem ser sem asas.
6. Pégaso é um cavalo alado.
7. O animal no campo do fazendeiro Brown não é um cavalo.
8. O cavalo no campo do fazendeiro Brown não tem asas.

D. Neste capítulo, nós simbolizamos ‘Nick é o traidor’ com ‘$\exists x(T(x) \land \forall y(T(y) \rightarrow x = y) \land x = n)$’. Duas simbolizações igualmente boas seriam:

- $T(n) \land \forall y(T(y) \rightarrow n = y)$
- $\forall y(T(y) \leftrightarrow y = n)$

Explique por que estas seriam simbolizações igualmente boas.

CAPÍTULO 26

Sentenças da LPO

Nós sabemos como representar sentenças em portguês na LPO. Finalmente chegou o tempo de definir a noção de uma *sentença* na LPO.

26.1 Expressões

Há seis tipos de símbolos na LPO:

Predicados $A, B, C, \ldots, Z$, ou com subscritos, conforme necessário: $A_1, B_1, Z_1, A_2, A_{25}, J_{375}, \ldots$

Nomes $a, b, c, \ldots, r$, ou com subscritos, conforme necessário $a_1, b_{224}, h_7, m_{32}, \ldots$

Variáveis s, t, u, v, w, x, y, z, ou com subscritos, conforme necessário $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$

Conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Parênteses (,)

Quantificadores $\forall, \exists$

Nós definimos uma EXPRESSÃO DA LPO como sendo uma cadeia de símbolos da LPO. Tome qualquer um dos símbolos da LPO e os escreva, em qualquer ordem, e você terá uma expressão.

26.2 Termos e fórmulas

Em §6, fomos direto do enunciado do vocabulário da LVF para a definição de uma sentença da LVF. Na LPO, precisaremos ir via um estágio intermediário: via a noção de uma FÓRMULA. A ideia intuitiva é que uma fórmula é qualquer sentença, ou qualquer coisa que possa ser transformado em uma sentença pela adição de quantificadores na frente. Mas isso levará alguma descompactação.

Nós começamos definindo a noção de termo.

Um TERMO é qualquer nome ou qualquer variável.

Então, aqui estão alguns termos:

$$a, b, x, x_1 x_2, y, y_{254}, z$$

Depois, precisamos definir fórmulas atômicas.

1. Qualquer letra sentencial é uma fórmula atômica.
2. Se $\mathscr{R}$ é um predicado n-ário and $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos, então $\mathscr{R}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é uma fórmula atômica.
3. Se t_1 e t_2 são termos, então $t_1 = t_2$ é uma fórmula atômica.
4. Nada mais é uma fórmula atômica.

Note que nós consideramos letras sentenciais também como fórmulas da LPO, então toda sentença da LVF é também uma fórmula da LPO.

O uso de letras script aqui segue as convenções estabelecidas em §7. Então, '$\mathscr{R}$' não é ele próprio um predicado da LPO. Em vez disso, ele é um símbolo da nossa metalinguagem (português aumentado) que usaremos para falar sobre qualque predicado da LPO. Similarmente, 't_1' não é um termo da LPO, mas um símbolo da metalinguagem que podemos usar para falar sobre qualquer termo da LPO. Então, onde 'F' é um predicado de um lugar, 'G' é um predicado de três lugares e 'S' é um predicado de seis lugares, aqui estão algumas fórmulas atômicas:

D	$F(a)$
$x = a$	$G(x, a, y)$
$a = b$	$G(a, a, a)$
$F(x)$	$S(x_1, x_2, a, b, y, x_1)$

Uma vez que sabemos o que são as fórmulas atômicas, podemos oferecer cláusulas de recursão para definir fórmulas arbitrárias. As primeiras cláusulas são exatamente as mesmas da LVF.

1. Toda fórmula atômica é uma fórmula.
2. Se $\mathscr{A}$ é uma fórmula, então $\neg\mathscr{A}$ é uma fórmula.
3. Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são fórmulas, então $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ é uma fórmula.
4. Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são fórmulas, então $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ é uma fórmula.
5. Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são fórmulas, então $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ é uma fórmula.
6. Se $\mathscr{A}$ $\mathscr{B}$ são fórmulas, então $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ é uma fórmula.
7. Se $\mathscr{A}$ é uma fórmula e $\mathscr{x}$ é uma variável,então $\forall\mathscr{x}\ \mathscr{A}$ é uma fórmula.
8. Se $\mathscr{A}$ é uma fórmula e $\mathscr{x}$ é uma variável,então $\exists\mathscr{x}\ \mathscr{A}$ é uma fórmula.
9. Nada mais é uma fórmula.

Então, assumindo novamente que ‘F’ é um predicado de um lugar, ‘G’ é um predicado de três lugares e ‘S’ é um predicado de seis lugares, aqui estão algumas fórmulas que você pode construir assim:

$$\begin{array}{r@{}l}
 & F(x)\\
 & G(a,y,z)\\
 & S(y,z,y,a,y,x)\\
(G(a,y,z) \rightarrow{} & S(y,z,y,a,y,x))\\
\forall z(G(a,y,z) \rightarrow{} & S(y,z,y,a,y,x))\\
F(x) \wedge \forall z(G(a,y,z) \rightarrow{} & S(y,z,y,a,y,x))\\
\exists y(F(x) \wedge \forall z(G(a,y,z) \rightarrow{} & S(y,z,y,a,y,x)))\\
\forall x\exists y(F(x) \wedge \forall z(G(a,y,z) \rightarrow{} & S(y,z,y,a,y,x)))
\end{array}$$

Podemos agora dar uma definição formal de escopo, que incorpora a definição de escopo de um quantificador. Aqui, nós seguimos o caso da LVF, apesar de notarmos que o operador lógico pode ser um conectivo ou um quantificador:

O OPERADOR LOGICO PRINCIPAL em uma fórmula é o operador que foi introduzido por último, quando a fórmula é construída usando as regras de recursão.

O ESCOPO de um operador lógico em uma fórmula é a subfórmula para a qual aquele operador é o operador lógico principal.

Então, nós podemos ilustrar graficamente o escopo dos quantificadores no exemplo anterior assim:

$$\overbrace{\forall x\,\overbrace{\exists y(F(x) \leftrightarrow \overbrace{\forall z(G(a,y,z) \rightarrow S(y,z,y,a,y,x)))}^{\text{escopo de `}\forall z\text{'}}}^{\text{escopo de `}\exists y\text{'}}}^{\text{escopo de `}\forall x\text{'}}$$

26.3 Sentenças

Lembre-se de que, em lógica, estamos bastante preocupados com sentenças assertóricas: sentenças que podem ser verdadeiras ou falsas. Muitas fórmulas não são sentenças. Considere a seguinte chave de simbolização:

domínio: pessoas
$L(x,y)$: $\_\_\_\_\__x$ ama $\_\_\_\_\__y$
b: Boris

Considere a fórmula atômica '$L(z,z)$'. Todas as fórmulas atômicas são fórmulas, então '$L(z,z)$' é uma fórmula, mas ela pode ser verdadeira ou falsa? Você pode pensar que ela será verdadeira apenas no caso de a pessoa nomeada por 'z' amar a si mesma, da mesma maneira que '$L(b,b)$' é verdadeira apenas se Boris (a pessoa nomeada por 'b') amar a si mesmo. *Contudo, 'z' é uma variável, e não nomeia alguém ou alguma coisa.*

É claro, se colocarmos um quantificador existencial na frente, obtendo '$\exists z L(z,z)$', então isso seria verdadeiro sse alguém ama a si próprio. Da mesma maneira, se escrevermos '$\forall z L(z,z)$', isso será verdadeiro sse todo mundo ama a si próprio. O ponto é que precisamos de um quantificador para nos dizer como lidar com a variável.

Vamos fazer esta ideia precisa.

Uma VARIÁVEL LIGADA é uma ocorrência de uma variável x que está dentro do escopo de $\forall x$ ou $\exists x$.

Uma VARIÁVEL LIVRE é qualquer ocorrência de uma variável que não seja ligada.

Por exemplo, considere a fórmula

$$\forall x(E(x) \vee D(y)) \rightarrow \exists z(E(x) \rightarrow L(z,x))$$

O escopo do quantificador universal '$\forall x$' é '$\forall x(E(x) \vee D(y))$', então o primeiro '$x$' está ligado pelo quantificador. Contudo, a segunda e terceira ocorrências de 'x' são livres. Da mesma maneira, o 'y' é livre. O escopo do quantificador existencial '$\exists z$' é '$(E(x) \rightarrow L(z,x))$', então, '$z$' é ligado.

Finalmente podemos dizer o seguinte.

Uma SENTENÇA da LPO é qualquer fórmula da LPO que não tem variáveis livres.

26.4 Convenções de parênteses

Adotaremos as mesmas convenções notacionais que governam parênteses que usamos na LVF (ver §6) e §10.3.)

Primeiro, poderemos omitir os parênteses mais externos de uma fórmula.

Segundo, poderemos usar colchetes, '[' e ']', no lugar de parênteses para aumentar a legibilidade das fórmulas.

Exercícios Práticos

A. Identifique quais variáveis estão ligadas e quais estão livres.

1. $\exists x\, L(x,y) \land \forall y\, L(y,x)$
2. $\forall x\, A(x) \land B(x)$
3. $\forall x(A(x) \land B(x)) \land \forall y(C(x) \land D(y))$
4. $\forall x \exists y[R(x,y) \rightarrow (J(z) \land K(x))] \lor R(y,x)$
5. $\forall x_1(M(x_2) \leftrightarrow L(x_2,x_1)) \land \exists x_2\, L(x_3,x_2)$

PARTE VI

Interpretações

CAPÍTULO 27

Extensionalidade

Lembre-se que a LVF é uma linguagem verofuncional. Seus conectivos são todos verofuncionais, e *tudo* o que podemos fazer com a LVF são sentenças chave para valores verdade particulares. Podemos fazer isso *diretamente*. Por exemplo, podemos estipular que a sentença da LVF 'P' deve ser verdadeira. Alternativamente, podemos fazer isso *indiretamente*, oferecendo uma chave de simbolização, e.g.:

P: O Big Ben fica em Londres

Agora lembre-se de §9 que isso deve ser tomado como significando:

- A sentença da LVFF 'P' deve ter o mesmo valor verdade que a sentença portuguesa 'O Big Ben fica em Londres' (qualquer que seja o valor verdade).

O ponto que enfatizamos é que a LVF não pode lidar com diferenças no significado que vão além de meras diferenças no valor verdade.

27.1 Simbolização versus tradução

A LPO tem algumas limitações similares, mas ela vai além de meros valores de verdade, uma vez que ela nos permite separar sentenças em termos, predicados e expressões quantificadas. Isso nos permite considerar o que é *verdadeiro sobre* algum objeto particular, ou sobre todos os objetos. Mas nós não podemos fazer mais que isso.

Quando nós fornecemos uma chave de simbolização para alguns predicados da LPO, como:

$C(x)$: $\_\_\_\_\__x$ ensina lógica III em Calgary

Nós não carregamos o *significado* do predicado português em nosso predicado da LPO. Nós simplesmente estipulamos algo como o seguinte:

- '$C(x)$' e '$\_\_\_\_\__x$ ensina lógica III em Calgary' devem ser *verdadeiros* exatamente sobre as mesmas coisas.

Então, em particular:

- '$C(x)$' deve ser verdadeira de todas e apenas aquelas coisas que ensinam lógica III em Calgary (o que quer que essas coisas sejam).

Esta é uma estipulação indireta. Alternativamente, nós podemos estipular diretamente sobre quais objetos um predicado será verdadeiro. Por exemplo, podemos estipular que '$C(x)$' deve ser verdadeiro sobre Richard Zach, e apenas Richard Zach. Por acaso, esta estipulação direta teria o mesmo efeito que a estipulação indireta. Note, porém, que os predicados portugueses '_____ é Richard Zach' and '_____ ensina Logic III em Calgary' tem significados bem diferentes!

O ponto é que a LPO não nos dá qualquer recurso para lidar com os nuances do significado. Quando nós interpretamos a LPO, tudo o que estamos considerando é o que sobre o que os predicados são verdadeiros, independentemente de se especificamos estas coisas direta ou indiretamente. As coisas sobre as quais um predicado é verdadeiro são conhecidas como a EXTENSÃO desse predicado. Dizemos que a LPO é uma LINGUAGEM EXTENSIONAL porque ela não representa diferenças de significado de predicados que têm a mesma extensão.

Por este motivo, dizemos apenas que as sentenças da LPO *simbolizam* sentenças portuguesas. É duvidoso que estamos *traduzindo* português em LPO, já que traduções devem preservar significados, e não apenas extensões.

27.2 Uma palavra sobre extensões

Podemos estipular diretamente sobre o que predicados devem ser verdadeiros, então vale a pena notar que nossas estipulações podem ser tão arbitrárias quanto quisermos. Por exemplo, podemos estipular que '$H(x)$' deve ser verdadeiro sobre, e apenas sobre, os seguintes objetos:

Justin Trudeau
o número π
toda tecla F no topo de todo piano já feito

Agora, os objetos que listamos não tem particularmente nada em comum. Mas isso não importa. A lógica não se importa com o que parece a nós, meros humanos, como 'natural' ou 'similar'. Armado com esta interpretação de '$H(x)$', suponha que nós agora adicionamos à nossa chave de simbolização:

j: Justin Trudeau
a: Angela Merkel
p: o número π

Então, '$H(j)$' e '$H(p)$' serão ambas verdadeiras, nesta interpretação, mas '$H(a)$' será falso, uma vez que Angela Merkel não estava dentre os objetos estipulados.

27.3 Predicados eneários

Tudo isso é bem fácil de se entender quando se trata de predicados unários, mas fica mais confuso quando consideramos predicados binários. Considere uma chave de simbolização como:

$L(x,y)$: $\_\_\_\_\__x$ ama $\_\_\_\_\__y$

Dado o que dissemos acima, esta chave de simbolização deve ser lida como dizendo:

- '$L(x,y)$' and '$\_\_\_\_\__x$ ama $\_\_\_\_\__y$' deve ser verdadeiro sobre exatamente as mesmas coisas

Então, em particular:

- '$L(x,y)$' deve ser verdadeiro de x e y (nesta ordem) sse x ama y.

É importante que nós insistamos sobre a ordem aqui, uma vez que o amor —conhecidamente— nem sempre é recíproco. (Note que 'x' e 'y' à direita aqui são símbolos do português aumentado, e eles estão sendo *usados*. Por outro lado, 'x' e 'y' em '$L(x,y)$' são símbolos da LPO, e estão sendo *mencionados*).

Esta é uma estipulação indireta. E quanto a uma estipulação direta. Isso é ligeiramente mais difícil. Se nós *simplesmente* listarmos os objetos que caem sob '$L(x,y)$', não saberemos se eles são os amadores ou os amados (ou ambos). Precisamos encontrar uma forma de incluir a ordem em nossa estipulação explícita.

Para fazer isso, podemos especificar que predicados binários são verdadeiros sobre *pares* de objetos, onde a ordem do par é importante. Então, podemos estipular que '$B(x,y)$' deve ser verdadeiro sobre, e apenas sobre, os seguintes pares de objetos:

⟨Lenin, Marx⟩
⟨de Beauvoir, Sartre⟩
⟨Sartre, de Beauvoir⟩

Aqui, os parênteses angulares nos mantêm informados em relação a ordem. Suponha que agora nós adicionamos as seguintes estipulações:

l: Lenin
m: Marx
b: de Beauvoir
r: Sartre

Então, '$B(l,m)$' será verdadeiro, uma vez que ⟨Lenin, Marx⟩ estava em nossa lista explícita, mas '$B(m,l)$' será falso, uma vez que ⟨Marx, Lenin⟩ não estavam em nossa lista. Contudo, tanto '$B(b,r)$' quanto '$B(r,b)$' serão verdadeiros, uma vez que tanto ⟨de Beauvoir, Sartre⟩ quanto ⟨Sartre, de Beauvoir⟩ estão em nossa lista explícita.

Para fazer estas ideias mais precisas, precisaríamos desenvolver alguma *teoria dos conjuntos*. Isso nos daria algumas ferramentas precisas para lidar com extensões e com pares ordenados (e triplas ordenadas, etc.). No entanto, teoria dos conjuntos não é abordada neste livro, então deixaremos estas ideias em um nível impreciso. De qualquer maneira, a ideia geral deve estar clara.

27.4 Semântica para identidade

A identidade é um predicado especial da LPO. Nós a escrevemos de maneira um pouco diferente dos outros predicados binários: '$x = y$', em vez de '$I(x, y)$' (por exemplo). Mais importante, porém, sua interpretação é fixa, de uma vez por todas.

Se dois nomes referem ao mesmo objeto, então trocar um nome por outro não mudará o valor verdade de qualquer sentença. Então, em particular, se 'a' e 'b' nomeiam o mesmo objeto, então todas as seguintes sentenças serão verdadeiras:

$$\begin{aligned} A(a) &\leftrightarrow A(b) \\ B(a) &\leftrightarrow B(b) \\ R(a,a) &\leftrightarrow R(b,b) \\ R(a,a) &\leftrightarrow R(a,b) \\ R(c,a) &\leftrightarrow R(c,b) \\ \forall x\, R(x,a) &\leftrightarrow \forall x\, R(x,b) \end{aligned}$$

Alguns filósofos acreditavam no inverso desta afirmação. Ou seja, eles acreditavam que quando exatamente as mesmas diferenças (não contendo '=') são verdadeiras sobre dois objetos, então eles são realmente o mesmo objeto. Isso é uma afirmação filosófica bastante controversa (às vezes chamada de *identidade dos indiscerníveis*) e nossa lógica não aderir a ela; nós permitimos que exatamente as mesmas coisas devam ser verdadeiras sobre dois objetos *distintos*.

Para trazer isso à tona, considere a seguinte interpretação:

domínio: P.D. Magnus, Tim Button
a: P.D. Magnus
b: Tim Button

- Para todo predicado primitivo que consideremos, este predicado não é verdadeiro sobre *qualquer coisa*.

Suponha que 'A' é um predicado unário; então '$A(a)$' e '$A(b)$' são falsos, então '$A(a) \leftrightarrow A(b)$' é verdadeiro. Similarmente, se 'R' é um predicado binário, então '$R(a,a)$' e '$R(a,b)$' são falsos, de maneira que '$R(a,a) \leftrightarrow R(a,b)$' é verdadeiro. E por aí vai: toda sentença atômica não envolvendo '=' é falsa, então todo bicondicoinal vinculando tais sentenças é verdadeiro. Apesar disso tudo, Tim Button e P.D. Magnus são duas pessoas distintas, não as mesmas!

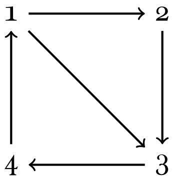
27.5 Interpretações

Nós definimos uma VALORAÇÃO em LVF como sendo qualquer atribuição de verdade e falsidade a letras sentenciais. Em LPO, definiremos uma INTERPRETAÇÃO como consistindo em quatro coisas:

- a especificação de um domínio
- para toda letra sentencial que considerarmos, um valor verdade
- para todo nome que considerarmos, uma atribuição de exatamente um objeto dentro do domínio
- para todo predicado que considerarmos—diferente de ‘=’—uma especificação de sobre quais coisas (em qual ordem) o predicado é verdadeiro

Consequentemente, as chaves de simbolização que consideramos na Parte V nos dão uma maneira bem conveniente de apresentar uma interpretação. Continuaremos a usá-las ao longo deste capítulo. Contudo, é às vezes conveniente apresentar uma interpretação *esquematicamente.*

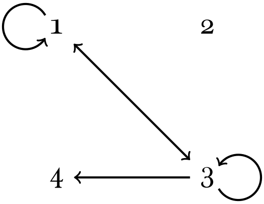
Suponha que queiramos considerar apenas um único predicado binário, ‘$R(x,y)$’, e estipular que ‘$R(x,y)$’ deve valer para x e y apenas no caso em que há uma seta saindo de x para y em nosso diagrama. Como um exemplo, podemos oferecer:



Isso seria adequado para caracterizar uma interpretação cujo dimínio é o dos primeiros quatro números inteiros positivos, e que interpreta ‘$R(x,y)$’ como sendo verdadeiro de, e apenas de:

$$\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle$$

Da mesma maneira, poderíamos oferecer:



para uma interpretação com o mesmo domínio, que interpreta '$R(x, y)$' como sendo verdadeiro de, e apenas de:

$$\langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle$$

Se quiséssemos, poderíamos fazer nossos diagramas mais complexos. Por exemplo, poderíamos adicionar nomes como rótulos para objetos particulares. Da mesma maneira, para simbolizar a extensão de um predicado unário, poderíamos simplesmente desenhar um anel em volta de alguns objetos particulares e estipular, digamos, que os então circulados objetos (e apenas eles) caem todo sob o predicado '$H(x)$'.

CAPÍTULO 28

Verdade na LPO

Sabemos o que as interpretações são. Uma vez que, entre outras coisas, elas nos dizem quais predcados são verdadeiros sobre quais objetos, elas nos fornecerão uma descrição da verdade de fórmulas atômicas. Contudo, devemos também apresentar uma descrição detalhada do que significa uma sentença arbitrária da LPO ser verdadeira ou falsa em uma interpretação.

Sabemos de §26 que há três tipo de sentença na LPO:

- sentenças atômicas
- sentenças cujo operador principal é um conectivo sentencial
- sentenças cujo operador principal é um quantificador

Precisamos explicar a verdade para todos os três tipos de sentença.

Forneceremos uma explicação completamente geral nesta seção. Contudo, para tentar manter a compreensão compreensível, nós iremos, em vários pontos, usar a seguinte interpretação:

domínio: todas as pessoas nascidas antes de 2000CE
a: Aristóteles
b: Beyoncé
$P(x)$: $\underline{\hspace{1.2cm}}_x$ é um filósofo
$R(x,y)$: $\underline{\hspace{1.2cm}}_x$ nasceu antes de $\underline{\hspace{1.2cm}}_y$

Esse será o nosso exemplo a seguir.

28.1 Sentenças atômicas

A verdade de sentenças atômicas deve ser bem direta. Para letras sentenciais, a interpretação especifica se ela é verdadeira ou falsa. A sentença ‘$P(a)$’ deve ser verdadeira apenas no caso de ‘$P(x)$’ ser verdadeira sobre ‘a’. Dada nossa interpretação, isso é verdadeiro sse Aristóteles é um filósofo. Aristóteles é um filósofo. Então a sentença é verdadeira. Da mesma forma, ‘$P(b)$’ é falsa em nossa interpretação.

Da mesma maneira, nesta interpretação, ‘$R(a,b)$’ é verdadeiro sse o objeto nomeado por ‘a’ nasceu antes do objeto nomeado por ‘b’. Bem, Aristóteles nasceu antes da Beyoncé. Então, ‘$R(a,b)$’ é verdadeiro. Igualmente, ‘$R(a,a)$’ é falso: Aristóteles não nasceu antes de Aristóteles.

Lidando com sentenças atômicas, então, é bem intuitivo. Quando $\mathscr{R}$ for um predicado n-ário e $\mathscr{a}_1$, $\mathscr{a}_2$, …, $\mathscr{a}_n$ forem nomes,

> $\mathscr{R}(\mathscr{a}_1, \mathscr{a}_2, \ldots, \mathscr{a}_n)$ é verdadeiro em uma interpretação **iff**
> $\mathscr{R}$ é verdadeiro sobre os objetos nomeados por $\mathscr{a}_1$, $\mathscr{a}_2$, …, $\mathscr{a}_n$
> nessa interpretação (considerada nessa ordem)

Lembre-se, porém, que há um tipo especial de sentença atômica: dois nomes conectados por um sinal de identidade constituem uma sentença atômica. Com este tipo de sentença atômica também é fácil de lidar. Onde $\mathscr{a}$ e $\mathscr{b}$ são quaisquer nomes,

> $\mathscr{a} = \mathscr{b}$ é verdadeiro em uma interpretação **iff**
> $\mathscr{a}$ e $\mathscr{b}$ nomeiam o mesmo objeto nessa interpretação

Então, em nossa interpretação, ‘$a = a$’ é falso, uma vez que Aristóteles é distinto de Beyoncé.

28.2 Conectivos sentenciais

Nós vimos em §26 que sentenças da LPO podem ser construídas a partir de sentenças mais simples através dos conectivos verofuncionais que já são conhecidos da LVF. Aqui eles estão:

$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ é verdadeiro em uma interpretação **iff**
tanto $\mathscr{A}$ quanto $\mathscr{B}$ são verdadeiros nessa interpretação

$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ é verdadeiro em uma interpretação **iff**
se $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{B}$ são verdadeiros nessa interpretação

$\neg\mathscr{A}$ é verdadeiro em uma interpretação **iff**
$\mathscr{A}$ é falso nessa interpretação

$\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ é verdade em uma interpretação **iff**
$\mathscr{A}$ é falso ou $\mathscr{B}$ é verdadeiro nessa interpretação

$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ é verdadeiro em uma interpretação **iff**
$\mathscr{A}$ tem o mesmo valor verdade que $\mathscr{B}$ nessa interpretação

Isso apresenta as mesmas informações que as características tabelas verdade para os conectivos; só é apresentado de uma maneira levemente diferente. Alguns exemplos provavelmente ajudarão a ilustrar a ideia. Em nossa interpretação:

- ‘$a = a \wedge P(a)$’ é verdadeiro
- ‘$R(a,b) \wedge P(b)$’ é falso, porque, apesar de ‘$R(a,b)$’ ser verdadeiro, ‘$P(b)$’ é falso
- ‘$a = b \vee P(a)$’ é verdadeiro
- ‘$\neg a = b$’ é verdadeiro
- ‘$P(a) \wedge \neg(a = b \wedge R(a,b))$’ é verdadeiro, porque ‘$P(a)$’ é verdadeiro e ‘$a = b$’ é falso

Tenha certeza de que você entendeu estes exemplos.

28.3 Quando o operador lógico principal é um quantificador

No entanto, a inovação emocionante na LPO é o uso de *quantificadores*, mas expressar as condições de verdade para sentenças quantificadas é um pouco mais complicado do que se poderia esperar a princípio.

Aqui está um primeiro pensamento ingênuo. Nós queremos dizer que ‘$\forall x\, F(x)$’ é verdadeiro sse ‘$F(x)$’ é verdadeiro sobre tudo no domínio. Isso não deve ser problemático: nossa interpretação especificará diretamente sobre o que ‘$F(x)$’ é verdadeiro.

Infelizmente, este pensamento ingênuo não é geral o suficiente. Por exemplo, nós queremos ser capazes de dizer que '$\forall x \exists y\, L(x, y)$' é verdadeiro apenas no caso de '$\exists y\, L(x, y)$' ser verdadeiro sobre tudo no domínio. Isso é problemático, uma vez que nossa interpretação não especifica diretamente sobre o que '$\exists y\, L(x, y)$' deve ser verdadeiro. Em vez disso, o fato de isso ser verdadeiro sobre algo ou não deve se seguir apenas da interpretação de '$L(x, y)$', do domínio e dos significados dos quantificadores.

Então, aqui está um segundo pensamento ingênuo. Nós poderíamos tentar dizer que '$\forall x \exists y\, L(x, y)$' deve ser verdadeiro em uma interpretação sse '$\exists y\, L(\mathscr{a}, y)$' for verdadeiro de *todo* nome $\mathscr{a}$ que tivermos incluído em nossa interpretação. Similarmente, poderíamos tentar dizer que $\exists y\, L(\mathscr{a}, y)$ é verdadeiro apenas no caso de $L(\mathscr{a}, \mathscr{b})$ ser verdadeiro para *alguns* nomes $\mathscr{b}$ que nós incluímos em nossa interpretação.

Infelizmente, isso também não está certo. Para ver isso, observe que em nossa interpretação, nós apenas demos interpretações para *dois* nomes, 'a' e 'b', mas o domínio—todas as pessoas nascidas antes do ano 2000CE—contém muito mais que duas pessoas. Nós não temos a intenção de tentar nomear *todos* eles!

Então, aqui está um terceiro pensamento. (E este pensamento não é ingênuo, mas correto). Apesar de não ser o caso que nós nomeamos *todo mundo*, a cada pessoa *poderia* ser dado um nome. Então nós deveríamos focar nesta possibilidade de estender uma interpretação ao adicionar um nome. Nós ofereceremos alguns exemplos de como isso poderia funcionar, focando em nossa interpretação, e então apresentaremos a definição formal.

Em nossa interpretação, '$\exists x\, R(b, x)$' deve ser verdadeiro. Afinal, no domínio, há certamente alguém que nasceu depois de Beyoncé. Lady Gaga é uma dessas pessoas. De fato, se fôssemos estender nossa interpretação—temporariamente—ao adicionar o nome 'c' para se referir à Lady Gaga, então '$R(b, c)$' seria verdadeiro nessa interpretação estendida. Isso, certamente, deve ser suficiente para tornar '$\exists x\, R(b, x)$' verdadeiro na nossa interpretação original.

Em nossa interpretação, '$\exists x(P(x) \wedge R(x, a))$' também deve ser verdadeiro. Afinal, no domínio, certametne há alguém que foi um filósofo e que nasceu antes de Aristóteles. Sócrates é uma dessas pessoas. De fato, se fôssemos estender nossa interpretação ao deixarmos um novo nome, 'c', denotar Sócrates, então '$W(c) \wedge R(c, a)$' seria verdadeiro nessa interpretação estendida. Novamente, isso certamente deve ser suficiente para tornar '$\exists x(P(x) \wedge R(x,a))$' verdadeiro em nossa interpretação original.

Em nossa interpretação, '$\forall x \exists y\, R(x,y)$' deve se falso. Afinal, considere a última pessoa nascida no ano de 1999. Nós não sabemos quem ela foi, mas se fôssemos estender nossa interpretação ao deixarmos um novo nome, 'd', nomear esta pessoa, então não seríamos capazes de encontrar alguém no domínio para denotar com algum outro nome, talvez 'e', de tal maneira que '$R(d,e)$' fosse verdadeiro. De fato, não importa *quem* nós nomearmos com 'e', '$R(d,e)$' seria falso. Esta observação certamente é suficiente para tornar '$\exists y\, R(d,y)$' *falso* em nossa interpretação, que por sua vez é certamente suficiente para tornar '$\forall x \exists y\, R(x,y)$' *falso* em nossa interpretação estendida, o que por sua vez certamente é suficiente para tornar '$\forall x \exists y\, R(x,y)$' falso na nossa interpretação original.

Se você entendeu os três exemplos, ótimo. É isso o que importa. Estritamente falando, porém, nós ainda precisamos dar uma definição precisa das condições de verdade para sentenças quantificadas. O resultado, tristemente, é um pouco feio, e requer algumas novas definições. Prepare-se!

Suponha que $\mathscr{A}$ é uma fórmula contendo pelo menos uma ocorrência da variável $\mathscr{x}$, e que $\mathscr{x}$ é livre em $\mathscr{A}$. Nós escreveremos isso assim:

$$\mathscr{A}(\ldots \mathscr{x} \ldots \mathscr{x} \ldots)$$

Suponha também que $\mathscr{c}$ é um nome. Então, escreveremos:

$$\mathscr{A}(\ldots \mathscr{c} \ldots \mathscr{c} \ldots)$$

para a fórmula obtida ao substituir *todas* as ocorrências de $\mathscr{x}$ em $\mathscr{A}$ por $\mathscr{c}$. A fórmula resultante é chamada de uma INSTÂNCIA DE SUBSTITUIÇÃO de $\forall \mathscr{x} \mathscr{A}$ e $\exists \mathscr{x} \mathscr{A}$. Também, $\mathscr{c}$ é chamado de NOME DE INSTANCIAÇÃO. Então:

$$\exists x(R(e,x) \leftrightarrow F(x))$$

é uma instância de substituição de

$$\forall y \exists x(R(y,x) \leftrightarrow F(x))$$

com o nome de instanciação 'e' e variável instanciada 'y'.

Nossa interpretação incluirá uma especificação de quais nomes correspondem a quais objetos no domínio. Tome qualquer objeto no domínio, digamos, d, e um nome $\mathscr{c}$ que ainda não foi atribuído pela interpretação. Se nossa interpretação é **I**, então nós podemos considerar a interpretação $\mathbf{I}[d/\mathscr{c}]$, que é como **I**, exceto pelo fato de que ela *também* atribui o nome $\mathscr{c}$ ao objeto d. Então, nós podemos dizer que d SATISFAZ a fórmula $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{x}\ldots\mathscr{x}\ldots)$ na interpretação **I** se, e somente se, $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{c}\ldots\mathscr{c}\ldots)$ é verdadeiro em $\mathbf{I}[d/\mathscr{c}]$. (se d satisfaz $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{x}\ldots\mathscr{x}\ldots)$, nós também dizemos que $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{x}\ldots\mathscr{x}\ldots)$ é *verdadeiro sobre d*.)

A interpretação $\mathbf{I}[d/\mathscr{c}]$ é como a interpretação **I**, exceto pelo fato de que ela também atribui o nome $\mathscr{c}$ ao objeto d.

Um objeto d SATISFAZ $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{x}\ldots\mathscr{x}\ldots)$ na interpretação **I sse** $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{c}\ldots\mathscr{c}\ldots)$ é verdadeiro em $\mathbf{I}[d/\mathscr{c}]$.

Então, por exemplo, Sócrates satisfaz a fórmula $P(x)$, uma vez que $P(c)$ é verdadeiro na interpretação $\mathbf{I}[\text{Socrates}/c]$, i.e., na interpretação:

domínio: todas as pessoas nascidas antes de 2000CE
a: Aristóteles
b: Beyoncé
c: Sócrates
$P(x)$: $\underline{\qquad}_x$ é um filósofo
$R(x,y)$: $\underline{\qquad}_x$ nasceu antes de $\underline{\qquad}_y$

Armados com esta notação, a ideia aproximada é como se segue. A sentença $\forall\mathscr{x}\mathscr{A}(\ldots\mathscr{x}\ldots\mathscr{x}\ldots)$ será verdadeira em **I** sse, para qualquer objeto d no domínio, $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{c}\ldots\mathscr{c}\ldots)$ é verdadeiro em $\mathbf{I}[d/\mathscr{c}]$, i.e., não importa quais objetos (no domínio) nós nomeamos com $\mathscr{c}$. Em outras palavras, $\forall\mathscr{x}\mathscr{A}(\ldots\mathscr{x}\ldots\mathscr{x}\ldots)$ é verdadeiro sse todo objeto domínio satisfaz $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{x}\ldots\mathscr{x}\ldots)$. Similarmente, a sentença $\exists\mathscr{x}\mathscr{A}$ será verdadeira sse há *algum* objeto que satisfaz $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{x}\ldots\mathscr{x}\ldots)$, i.e., $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{c}\ldots\mathscr{c}\ldots)$ é verdadeiro em $\mathbf{I}[d/\mathscr{c}]$ para algum objeto d.

$\forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ é verdadeiro em uma interpretação **sse** todo objeto do domínio satisfaz $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$.

$\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ é verdadeiro em uma interpretação **sse** pelo menos um objeto do domínio satisfaz $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$.

Para ser claro: tudo que isso faz é formalizar (de maneira bem pedante) a ideia intuitiva expressa na página anterior. O resultado é um pouco feio, e a definição final pode parecer um pouco opaca. Esperançosamente, porém, o *espírito* da ideia está claro.

Finalmente, notemos que o conceito de um objeto satisfazendo uma fórmula com uma variável livre também pode ser estendido para fórmulas com mais de uma variável livre. Se tivermos uma fórmula $\mathscr{A}(x, y)$ com duas variáveis livres, x e y, então podemos dizer que um par de objetos $\langle a, b\rangle$ satisfaz $\mathscr{A}(x, y)$ sse $\mathscr{A}(c, d)$ é verdadeiro na interpretação estendida por dois nomes c e d, onde c nomeia a e d nomeia b. Então, por exemplo, $\langle$Sócrates, Platão$\rangle$ satisfaz $R(x, y)$, uma vez que $R(c, d)$ é verdadeiro na interpretação:

domínio: todas as pessoas nascidas antes de 2000CE
a: Aristóteles
b: Beyoncé
c: Sócrates
d: Platão
$P(x)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ é um filósofo
$R(x, y)$: $\underline{\hspace{3em}}_x$ nasceu antes de $\underline{\hspace{3em}}_y$

Para fórmulas atômicas, os objetos, pares de objetos, etc., que as satisfazem são exatamente a extensão do predicado dado na interpretação. Mas a noção de satisfação também se aplica a fórmulas não atômicas, e.g., a fórmula $P(x) \land R(x, b)$ é satisfeita por todos os filósofos nascidos antes de Beyoncé. Isso se aplica até mesmo a fórmulas envolvendo quantificadores, e.g., $P(x) \land \neg\exists y(P(y) \land R(y, x))$ é satisfeita por todas as pessoas que são filósofos e para as quais é verdade que nenhum filósofo nasceu antes delas—em outras palavras, ela é verdadeira sobre o primeiro filósofo.

Exercícios Práticos

A. Considere a seguinte interpretação:

- O domínio compreende apenas Corwin and Benedict
- ‘$A(x)$’ é verdadeiro tanto sobre Corwin quanto sobre Benedict
- ‘$B(x)$’ é verdadeiro apenas sobre Benedict
- ‘$N(x)$’ não é verdadeiro de qualquer um deles
- ‘c’ se refere a Corwin

Determine se cada uma das seguintes sentenças é verdadeira ou falsa nesta interpretação:

1. $B(c)$
2. $A(c) \leftrightarrow \neg N(c)$
3. $N(c) \rightarrow (A(c) \vee B(c))$
4. $\forall x\, A(x)$
5. $\forall x \neg B(x)$
6. $\exists x(A(x) \wedge B(x))$
7. $\exists x(A(x) \rightarrow N(x))$
8. $\forall x(N(x) \vee \neg N(x))$
9. $\exists x\, B(x) \rightarrow \forall x\, A(x)$

B. Considere a seguinte interpretação:

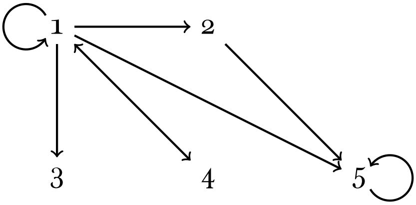
- O domínio compreende apenas Lemmy, Courtney e Eddy
- ‘$G(x)$’ é verdadeiro sobre Emmy, Courtney e Eddy
- ‘$H(x)$’ é verdadeiro apenas sobre Courtney
- ‘$M(x)$’ é verdadeiro apenas sobre Lemmy e Eddy
- ‘c’ se refere a Courtney
- ‘e’ se refere a Eddy

Determine se cada uma das seguintes sentenças é verdadeira ou falsa nesta interpretação:

1. $H(c)$
2. $H(e)$
3. $M(c) \vee M(e)$
4. $G(c) \vee \neg G(c)$
5. $M(c) \rightarrow G(c)$
6. $\exists x\, H(x)$

7. $\forall x\, H(x)$
8. $\exists x\, \neg M(x)$
9. $\exists x(H(x) \wedge G(x))$
10. $\exists x(M(x) \wedge G(x))$
11. $\forall x(H(x) \vee M(x))$
12. $\exists x\, H(x) \wedge \exists x\, M(x)$
13. $\forall x(H(x) \leftrightarrow \neg M(x))$
14. $\exists x\, G(x) \wedge \exists x \neg G(x)$
15. $\forall x \exists y(G(x) \wedge H(y))$

C. Seguindo as convenções de diagrama introduzidas no final de §27, considere a seguinte interpretação:



Determine se cada uma das seguintes sentenças é verdadeira ou falsa nesta interpretação:

1. $\exists x\, R(x,x)$
2. $\forall x\, R(x,x)$
3. $\exists x \forall y\, R(x,y)$
4. $\exists x \forall y\, R(y,x)$
5. $\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$
6. $\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(x,z)) \rightarrow R(y,z))$
7. $\exists x \forall y\, \neg R(x,y)$
8. $\forall x(\exists y\, R(x,y) \rightarrow \exists y\, R(y,x))$
9. $\exists x \exists y(\neg x = y \wedge R(x,y) \wedge R(y,x))$
10. $\exists x \forall y(R(x,y) \leftrightarrow x = y)$
11. $\exists x \forall y(R(y,x) \leftrightarrow x = y)$
12. $\exists x \exists y(\neg x = y \wedge R(x,y) \wedge \forall z(R(z,x) \leftrightarrow y = z))$

CAPÍTULO 29

Conceitos semânticos

Oferecer uma definição precisa de verdade na LPO foi mais do que um pouco complicado, mas agora que já terminamos, podemos definir várias noções lógicas centrais. Elas parecerão bem similar às definições que oferecemos para a LVF. Porém, lembre-se de que elas lidam com *interpretações*, em vez de valorações.

Utilizaremos o símbolo '$\vDash$' para a LPO assim como fizemos com a LVF. Então:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{C}$$

significa que não há qualquer interpretação em que todos de $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, …, $\mathscr{A}_n$ são verdadeiros e em que $\mathscr{C}$ é falso. Derivatively,

$$\vDash \mathscr{A}$$

significa que $\mathscr{A}$ é verdadeiro em toda interpretação

As outras noções lógicas também têm definições correspondentes na LPO:

- Uma sentença da LPO $\mathscr{A}$ é uma TAUTOLOGIA sse $\mathscr{A}$ é verdadeiro em toda interpretação; i.e., $\vDash \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ é uma CONTRADIÇÃO sse $\mathscr{A}$ é falsa em toda interpretação; i.e., $\vDash \neg\mathscr{A}$.

- $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ é VÁLIDA NA LPO sse não há uma interpretações em que todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa; i.e., $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{C}$. Do contrário, ela é INVÁLIDA NA LPO.

- Duas sentenças da LPO, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, são interpretações EQUIVALENTES sse elas são verdadeiras exatamente nas mesmas interpretações; i.e., se $\mathscr{A} \vDash \mathscr{B}$ e $\mathscr{B} \vDash \mathscr{A}$.

- As sentenças da LPO $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, …, $\mathscr{A}_n$ são CONJUNTAMENTE SATISFATÍVEIS sse há alguma interpretação em que todas elas são verdadeiras. Elas são CONJUNTAMENTE INSATISFATÍVEIS sse não há uma tal interpretação.

CAPÍTULO 30

Usando interpretações

30.1 Validades e contradições

Suponha que queiramos mostrar que '$\exists x\, A(x,x) \to B(d)$' *não* é uma tautologia. Isso requer mostrar que a sentença não é verdadeira em todas as interpretações; i.e., que ela é falsa em alguma interpretação. Se pudermos fornecer apenas uma interpretação em que a sentença é falsa, então nós teremos mostrado que a sentença não é uma tautologia.

Para que '$\exists x\, A(x,x) \to B(d)$' seja falso, o antecedente ('$\exists x\, A(x,x)$') deve ser verdadeiro, e o consequente ('$B(d)$') deve ser falso. Para construir uma tal interpretação, nós começamos especificando um domínio. Manter o domínio pequeno torna mais fácil a especificação de sobre o que os predicados serão verdadeiros, então iremos começar com um domínio que tem apenas um membro. Para uma maior concretude, digamos que é a cidade de Paris.

domain: Paris

O nome 'd' deve se referir a algo no domínio, então nós não temos opções além de

d: Paris

Lembre-se de que queremos que ‘$\exists x\, A(x,x)$’ seja verdadeiro, então nós queremos que todos os membros do domínio se pareiem consigo mesmo na extensão de ‘A’. Podemos apenas oferecer:

$A(x,y)$: $\underline{\qquad}_x$ é idêntico a $\underline{\qquad}_y$

Agora, ‘$A(d,d)$’ é verdadeiro, então certamente é verdadeiro que ‘$\exists x\, A(x,x)$’. Em seguida, queremos que ‘$B(d)$’ seja falso, de maneira que o referente de ‘d’ não esteja na extensão de ‘B’. Poderíamos simplesmente oferecer:

$B(x)$: $\underline{\qquad}_x$ está na Alemanha

Agora nós temos uma interpretação em que ‘$\exists x\, A(x,x)$’ é verdadeira, mas onde ‘$B(d)$’ é falsa. Então há uma interpretação em que ‘$\exists x\, A(x,x) \rightarrow B(d)$’ é falsa. Então ‘$\exists x\, A(x,x) \rightarrow B(d)$’ não é uma tautologia.

Podemos mostrar com a mesma facilidade que ‘$\exists x A(x,x) \rightarrow B(d)$’ não é uma contradição. Precisamos apenas especificar uma interpretação em que ‘$\exists x A(x,x) \rightarrow B(d)$’ é verdadeira; i.e., uma interpretação em que ou ‘$\exists x\, A(x,x)$’ é falsa ou ‘$B(d)$’ é verdadeira. Aqui está uma:

domínio: Paris
d: Paris
$A(x,y)$: $\underline{\qquad}_x$ é idêntico a $\underline{\qquad}_y$
$B(x)$: $\underline{\qquad}_x$ está na França

Isso mostra que há uma interpretação em que ‘$\exists x A(x,x) \rightarrow B(d)$’ é verdadeiro. Então, ‘$\exists x\, A(x,x) \rightarrow B(d)$’ não é uma contradição.

Para mostrar que $\mathscr{A}$ não é uma tautologia, é suficiente encontrar uma interpretação em que $\mathscr{A}$ é falso.
Para mostrar que $\mathscr{A}$ não é uma contradição, é suficiente encontrar uma interpretação em que $\mathscr{A}$ é verdadeiro.

30.2 Equivalência lógica

Suponha que queiramos mostrar que ‘$\forall x\, S(x)$’ e ‘$\exists x\, S(x)$’ não são logicamente equivalentes. Nós precisamos construir uma interpretação em que ambas as sentenças têm valores de verdade diferentes; queremos que uma delas seja verdadeira e a outra falsa. Começamos especificando o domínio. Novamente, fazemos o domínio pequeno para que possamos especificar as extensões facilmente. Neste caso, precisamos de pelo menos dois objetos. (Se escolhermos um domínio com apenas um membro, as duas sentenças acabariam com o mesmo valor verdade. Para ver por que, tente construir algumas interpretações parciais com domínios com apenas um membro). Pela concretude, vamos tomar:

domínio: Ornette Coleman, Miles Davis

Nós tornamos '$\exists x\, S(x)$' verdadeiro ao incluir algo na extensão de 'S', e podemos tornar '$\forall x\, S(x)$' falso ao deixar algo fora da extensão de 'S'. Pela concretude, nós ofereceremos:

$S(x)$: $\underline{\hspace{2em}}_x$ toca saxofone

Agora '$\exists x\, S(x)$' é verdadeiro, porque '$S(x)$' é verdadeiro sobre Ornette Coleman. De maneira levemente mais precisa, estendemos nossa interpretação ao permitirmos que 'c' nomeie Ornette Coleman. '$S(c)$' é verdadeiro nessa interpretação estendida, então '$\exists x\, S(x)$' era verdadeiro na interpretação original. Similarmente, '$\forall x\, S(x)$' é falso, porque '$S(x)$' é falos sobre Miles Davis. De maneira levemente mais precisa, estendemos nossa interpretação ao permitirmos que 'd' nomeie Miles Davis, e '$S(d)$' falso nessa interpretação estendida, então '$\forall x\, S(x)$' era falso na interpretação original. Nós fornecemos uma contra-interpretação à afirmação de que '$\forall x\, S(x)$' e '$\exists x\, S(x)$' são logicamente equivalentes.

Para mostrar que $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ não são logicamente equivalentes, é suficiente encontrar uma interpretação em que um é verdadeiro e o outro é falso.

30.3 Validade, implicação e satisfabilidade

Para testar nossa validade, implicação ou satisfabilidade, nós tipicamente precisamos produzir interpretações que determinam o valor verdade de várias sentenças simultaneamente.

Considere o seguinte argumento na LPO:

$$\exists x(G(x) \rightarrow G(a)) \therefore \exists x\, G(x) \rightarrow G(a)$$

Para mostrar que isso é inválido, nós temos que tornar a premissa verdadeira e a conclusão falsa. A conclusão é um condicional, então, para torná-la falsa, o antecedente deve ser verdadeiro e o consequente deve falso. Claramente, nosso domínio deve conter dois objetos. Vamos tentar:

domínio: Karl Marx, Ludwig von Mises
$G(x)$: $\_\_\_\_\__x$ odiava comunismo
a: Karl Marx

Dado que Marx escreveu o *Manifesto do Partido Comunista*, '$G(a)$' é claramente falso nessa interpretação. Mas von Mises famosamente odiava comunismo, então '$\exists x\, G(x)$' é verdadeiro nessa interpretação. Consequentemente, '$\exists x\, G(x) \rightarrow G(a)$' é falso, como requerido.

Esta interpretação torna a premissa verdadeira Sim! Note que '$G(a) \rightarrow G(a)$' é verdadeiro. (De fato, isso é uma tautologia). Mas, então, certamente '$\exists x(G(x) \rightarrow G(a))$' é verdadeiro, então a premissa é verdadeira, e a conclusão é falsa, nesta interpretação. O argumento é, portanto, inválido.

Ao passar, note que nós mostramos também que '$\exists x(G(x) \rightarrow G(a))$' *não* implica '$\exists x\, G(x) \rightarrow G(a)$'. Igualmente, nós mostramos que as sentenças '$\exists x(G(x) \rightarrow G(a))$' e '$\neg(\exists x\, G(x) \rightarrow G(a))$' são conjuntamente satisfatíveis.

Vamos considerar um segundo exemplo. Considere:

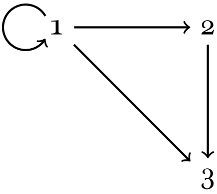
$$\forall x \exists y\, L(x,y) \mathrel{.\,\dot{.}\,.} \exists y \forall x\, L(x,y)$$

Novamente, nós queremos mostrar que isso é inválido. Para fazer isso, precisamos fazer as premissa verdadeiras e a conclusão falsa. Aqui está uma sugestão:

domínio: Cidadãos canadenses que atualmente estão em uma união estável com outro cidadão canadense
$L(x,y)$: $\_\_\_\_\__x$ está em uma união estável com $\_\_\_\_\__y$

A premissa é claramente verdadeira nesta interpretação. Qualquer um no domínio é um cidadão canadense em uma união estável com algum outro cidadão canadense. Este outro cidadão também estará, então, no domínio. Então, para todos no domínio, haverá alguém (diferente) no domínio com o qual eles estarão em uma união estável. Consequentemente, '$\forall x \exists y\, L(x,y)$' é verdadeiro. Contudo, a conclusão claramente é falsa, porque isso requereria que há alguma pessoa solteira que está em uma união estável com todo mundo no domínio, e não há uma tal pessoa, então o argumento é inválido. Nós observamos imediatamente que as sentenças ‘$\forall x \exists y\, L(x, y)$’ e ‘$\neg\exists y \forall x\, L(x, y)$’ são conjuntamente satisfatíveis e que ‘$\forall x \exists y\, L(x, y)$’ não implica ‘$\exists y \forall x\, L(x, y)$’.

Para nosso terceiro exemplo, misturaremos as coisas um pouco. Em §27, nós descrevemos como nós podemos apresentar algumas interpretações usando diagramas. Por exepmlo,



Usando as convenções empregadas em §27, o domínio dessa interpretação é o dos três primeiros números inteiros positivos, e ‘$R(x, y)$’ é falso sobre x e y apenas no caso em que há uma flecha de x para y em nosso diagrama. Aqui, há algumas sentenças que a interpretação torna verdadeiras:

- ‘$\forall x \exists y\, R(y, x)$’
- ‘$\exists x \forall y\, R(x, y)$’ testemunha 1
- ‘$\exists x \forall y (R(y, x) \leftrightarrow x = y)$’ testemunha 1
- ‘$\exists x \exists y \exists z ((\neg y = z \wedge R(x, y)) \wedge R(z, x))$’ testemunha 2
- ‘$\exists x \forall y\, \neg R(x, y)$’ testemunha 3
- ‘$\exists x (\exists y\, R(y, x) \wedge \neg\exists y\, R(x, y))$’ testemunha 3

Isso mostra imediatamente que todas as seis sentenças anteriores são conjuntamente satisfatíveis. Podemos usar esta observação para generar argumentos *inválidos*, e.g.:

$$\forall x \exists y\, R(y, x), \exists x \forall y\, R(x, y) \therefore \forall x \exists y\, R(x, y)$$

$$\exists x \forall y\, R(x, y), \exists x \forall y \neg R(x, y) \therefore \neg\exists x \exists y \exists z (\neg y = z \wedge (R(x, y) \wedge R(z, x)))$$

e vários outros além desses.

Para mostrar que $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ é inválido, é suficiente encontrar uma interpretação onde todos de $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, …, $\mathscr{A}_n$ are true and where $\mathscr{C}$ é falso.
Esta mesma interpretação mostrará que $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, …, $\mathscr{A}_n$ não implica $\mathscr{C}$.
Ela também mostrará que $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, …, $\mathscr{A}_n$, $\neg\mathscr{C}$ são conjuntamente satisfatíveis.

Quando você fornecer uma interpretação para refutar uma afirmação—para mostrar que uma sentença não é uma tautologia, digamos, ou que uma implicação falha—, isso é, às vezes, chamado de fornecer uma *contra-interpretação* (ou fornecer um *contra-modelo*).

Exercícios Práticos

A. Mostre que cada uma das seguintes sentenças não é nem uma tautologia nem uma contradição:

1. $D(a) \wedge D(b)$
2. $\exists x\, T(x,h)$
3. $P(m) \wedge \neg\forall x\, P(x)$
4. $\forall z\, J(z) \leftrightarrow \exists y\, J(y)$
5. $\forall x(W(x,m,n) \vee \exists y L(x,y))$
6. $\exists x(G(x) \rightarrow \forall y\, M(y))$
7. $\exists x(x = h \wedge x = i)$

B. Mostre que os seguintes pares de sentenças não são logicamente equivalentes.

1. $J(a)$, $K(a)$
2. $\exists x\, J(x)$, $J(m)$
3. $\forall x\, R(x,x)$, $\exists x\, R(x,x)$
4. $\exists x\, P(x) \rightarrow Q(c)$, $\exists x(P(x) \rightarrow Q(c))$
5. $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$, $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
6. $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$, $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$
7. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$
8. $\forall x\exists y\, R(x,y)$, $\exists x\forall y\, R(x,y)$
9. $\forall x\exists y\, R(x,y)$, $\forall x\exists y\, R(y,x)$

C. Mostre que as seguintes sentenças são conjuntamente satisfatíveis:

1. $M(a), \neg N(a), P(a), \neg Q(a)$
2. $L(e,e), L(e,g), \neg L(g,e), \neg L(g,g)$
3. $\neg(M(a) \wedge \exists x\, A(x)), M(a) \vee F(a), \forall x(F(x) \rightarrow A(x))$
4. $M(a) \vee M(b), M(a) \rightarrow \forall x \neg M(x)$
5. $\forall y\, G(y), \forall x(G(x) \rightarrow H(x)), \exists y \neg I(y)$
6. $\exists x(B(x) \vee A(x)), \forall x \neg C(x), \forall x\big[(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow C(x)\big]$
7. $\exists x\, X(x), \exists x\, Y(x), \forall x(X(x) \leftrightarrow \neg Y(x))$
8. $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg(Q(x) \wedge P(x))$
9. $\exists z(N(z) \wedge O(z,z)), \forall x \forall y(O(x,y) \rightarrow O(y,x))$
10. $\neg \exists x \forall y\, R(x,y), \forall x \exists y\, R(x,y)$
11. $\neg R(a,a)$, $\forall x(x = a \vee R(x,a))$
12. $\forall x \forall y \forall z[(x = y \vee y = z) \vee x = z]$, $\exists x \exists y\ \neg x = y$
13. $\exists x \exists y((Z(x) \wedge Z(y)) \wedge x = y)$, $\neg Z(d)$, $d = e$

D. Mostre que os seguintes argumentos são inválidos:

1. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))\ \therefore\ \exists x\, B(x)$
2. $\forall x(R(x) \rightarrow D(x)), \forall x(R(x) \rightarrow F(x))\ \therefore\ \exists x(D(x) \wedge F(x))$
3. $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))\ \therefore\ \exists x\, P(x)$
4. $N(a) \wedge N(b) \wedge N(c)\ \therefore\ \forall x\, N(x)$
5. $R(d)e, \exists x\, R(x,d)\ \therefore\ R(e,d)$
6. $\exists x(E(x) \wedge F(x)), \exists x\, F(x) \rightarrow \exists x\, G(x)\ \therefore\ \exists x(E(x) \wedge G(x))$
7. $\forall x\, O(x,c), \forall x\, O(c,x)\ \therefore\ \forall x\, O(x,x)$
8. $\exists x(J(x) \wedge K(x)), \exists x \neg K(x), \exists x \neg J(x)\ \therefore\ \exists x(\neg J(x) \wedge \neg K(x))$
9. $L(a)b \rightarrow \forall x\, L(x,b), \exists x\, L(x,b)\ \therefore\ L(b,b)$
10. $\forall x(D(x) \rightarrow \exists y\, T(y,x))\ \therefore\ \exists y \exists z\ \neg y = z$

CAPÍTULO 31

Raciocinando sobre todas as interpretações

31.1 Tautologias e contradições

Podemos mostrar que a sentença *não* é uma tautologia apenas fornecendo uma interpretação cuidadosamente especificada: uma interpretação em que a sentença é falsa. Para mostrar que algo é uma tautologia, por outro lado, não seria suficiente construir dez, cem, ou mesmo mil interpretações em que a sentença é verdadeira. Uma sentença apenas é uma tautologia se ela é verdadeira em *toda* interpretação, e há infinitas interpretações. Nós precisamos raciocinar sobre todas elas, e não podemos fazer isso lidando com elas uma por uma!

Às vezes, podemos raciocinar sobre todas as interpretações bem facilmente. Por exemplo, podemos oferecer um argumento relativamente simples de que '$R(a,a) \vee \neg R(a,a)$' é uma tautologia:

> Qualquer interpretação relevante dará a '$R(a,a)$' um valor verdade. Se '$R(a,a)$' é verdadeira em uma interpretação, então '$R(a,a) \vee \neg R(a,a)$' é verdadeira mesta interpretação. Se '$R(a,a)$' é falsa em uma interpretação, então $\neg R(a,a)$ é verdadeira, e então '$R(a,a) \vee \neg R(a,a)$' é verdadeira nesta interpretação. Estas são as duas únicas

> alternativas. '$R(a,a) \vee \neg R(a,a)$' é verdadeira em toda interpretação. Portanto, ela é uma tautologia.

Este argumento é válido, é claro, e sua conclusão é verdadeira. Contudo, não é um argumento da LPO. Em vez disso, é um argumento em português *sobre* a LPO: é um argumento da metalinguagem.

Note outra característica do argumento. Uma vez que a sentença em questão não continha quantificadores, nós não precisamos pensar sobre como interpretar 'a' e 'R'; o ponto foi justamente que, apesar de termos as interpretado, '$R(a,a)$' teria algum valor verdade ou outro. (Poderíamos, em última análise, ter dado o mesmo argumento em relação a sentenças da LVF).

Aqui está outro argumento. Considere a sentença '$\forall x(R(x,x) \vee \neg R(x,x))$'. Novamente, ela deve obviamente ser uma tautologia, mas dizer exatamente o porquê é um desafio. Não podemos dizer que '$R(x,x) \vee \neg R(x,x)$' é verdadeira em toda interpretação, uma vez que '$R(x,x) \vee \neg R(x,x)$' não é nem mesmo uma *sentença* da LPO (lembre-se que 'x' é uma variável, não um nome). Então, precisamos ser um pouco mais claros.

> Considere algumas interpretações arbitrárias. $\forall x(R(x,x) \vee \neg R(x,x))$ é verdadeira em nossa interpretação sse $R(x,x) \vee \neg R(x,x)$ é satisfeito por todo objeto deste domínio. Considere algum membro arbitrário do domínio, que, por conveniência, chamaremos de Fred. Ou Fred satisfaz $R(x,x)$, ou ele não satisfaz. Se Fred satisfaz '$R(x,x)$', então ele também satisfaz '$R(x,x) \vee \neg R(x,x)$'. Se Fred não satisfaz '$R(x,x)$', então ele *satisfaz* '$\neg R(x,x)$', então, também '$R(x,x) \vee \neg R(x,x)$'.[1] Então, de qualquer maneira, Fred satisfaz '$R(x,x) \vee \neg R(x,x)$'. Uma vez que não dissemos nada de especial sobre Fred—poderíamos ter escolhido qualquer objeto—, nós vemos que qualquer objeto do domínio satisfaz '$R(x,x) \vee \neg R(x,x)$'. Então '$\forall x(R(x,x) \vee \neg R(x,x))$' é verdadeira em nossa interpretação. Mas, nós escolhemos nossa interpretação arbitrariamente, então '$\forall x(R(x,x) \vee \neg R(x,x))$' é verdadeira em toda interpretação. Ela é, portanto, uma tautologia.

---

[1] Usamos aqui o fato de que as condições de verdade para conectivos também se aplicam à satisfação: a satisfaz $\mathscr{A}(x) \vee \mathscr{B}(x)$ iff a satisfaz $\mathscr{A}(x)$ ou $\mathscr{B}(x)$, etc.

Isso é bem demorado, mas, como as coisas estão, não há outra alternativa. Para mostrar que uma sentença é uma tautologia, precisamos raciocinar sobre *todas* as interpretações.

31.2 Outros casos

Pontos similares valem sobre outros casos também. Então, precisamos raciocinar sobre todas as interpretações se quisermos mostrar:

- que uma sentença é uma contradição; porque isso requer que ela seja falsa em *toda* interpretação.
- que duas sentenças são logicamente equivalentes; porque isso requer que elas tenham o mesmo valor verdade em *toda* interpretação.
- que algumas sentenças são conjuntamente insatisfatíveis; porque isso requer que não há uma interpretação na qual todas essas sentenças são verdadeiras juntas; i.e. que, em *toda* interpretação, pelo menos uma daquelas sentenças é falsa.
- que um argumento é válido; porque isso requer que a conclusão seja verdadeira em *toda* interpretação em que as premissas são verdadeiras. que algumas sentenças implicam outras sentenças.

O problema é que, com as ferramentas disponíveis para você até então, raciocinar sobre todas as interpretações é um desafio sério! Vamos tomar apenas mais um exempo. Aqui está um argumento que é obviamente válido:

$$\forall x(H(x) \land J(x)) \therefore \forall x\, H(x)$$

Afinal, se tudo é tanto H quanto J, então tudo é H. Mas, nós podemos apenas mostrar que o argumento é válido ao considerar o que deve ser verdadeiro em toda interpretação em que a premissa é verdadeira. Para mostrar isso, precisaríamos raciocinar como se segue:

> Considere uma interpretação arbitrária em que a premissa '$\forall x(H(x)\land J(x))$' é verdadeira. Segue-se que '$H(x)\land J(x)$' é satisfeita por todo objeto nessa interpretação. '$H(x)$' será, então, satisfeita pelos mesmos objetos.[2] Então, deve

---

[2] Aqui, novamente, fazemos uso do fato de que todo objeto que satisfizer $\mathscr{A}(x) \land \mathscr{B}(x)$ também deve satisfazer $\mathscr{A}(x)$ e $\mathscr{B}(x)$.

> ser o caso que '$\forall x\, H(x)$' é verdadeira nessa interpretação. Não assumimos qualquer coisa sobre a interpretação, excero que ela é uma em que '$\forall x(H(x) \wedge J(x))$' é verdadeira, então qualquer interpretação em que '$\forall x(H(x) \wedge J(x))$' é verdadeira é uma em que '$\forall x\, H(x)$' é verdadeira. O argumento é válido!

Mesmo para um argumento simples como esse, o raciocínio é de alguma maneira complicado. Para argumentos mais longos, o raciocínio pode ser extremamente torturoso.

A seguinte tabela sumariza se uma única interpretação ou contra-interpretação é suficiente, ou se nós devemos raciocinar sobre todas as interpretações.

	Sim	**Não**
tautologia?	todas as interpretações	uma contra-interpretação
contradição?	todas as interpretações	uma contra-interpretação
equivalentes?	todas as interpretações	uma contra-interpretação
satisfatível?	uma interpretação	todas as interpretações
válida?	todas as interpretações	uma contra-interpretação
implicação?	todas as interpretações	uma contra-interpretação

Isso poderia, de forma útil, ser comparado com a tabela no fim de §13. A diferença chave reside no fato de que a LVF lida com tabelas verdade, enquanto a LPO lida com interpretações. Esta diferença é profundamente importante, uma vez que cada tabela verdade tem apenas finitas linhas, de maneira que uma tabela verdade completa é relativamente um objeto tratável. Por contraste, há infinitas interpretações para qualquer sentença, de maneira que raciocinar sobre todas as interpretações pode ser uma tarefa profundamente complicada.

PARTE VII

Dedução natural para LPO

CAPÍTULO 32

Regras básicas para LPO

A linguagem da LPO faz uso de todos os conectivos da LVF. Então, provas na LPO vão seguir todas as regras básicas e derivadas da parte IV. Também usaremos as noções prova-teóricas (particularmente, o símbolo ‘$\vdash$’) introduzidas aqui. Contudo, também precisaremos de algumas novas regras básicas para governarem os quantificadores e os símbolos de identidade.

32.1 Eliminação do universal

Da afirmação de que tudo é F, você pode inferir que qualquer coisa particular é F. Você a nomeia; ela é F. Então, o seguinte deve raciocínio deve ser bom:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \forall x\, R(x,x,d) & \\ \hline 2 & R(a,a,d) & \forall\text{E } 1 \end{array}$$

Obtivemos a linha 2 ao eliminar o quantificador universal e substituir toda instância de ‘x’ com ‘a’. Da mesma maneira, o seguinte deve ser permitido:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \forall x\, R(x,x,d) & \\ \hline 2 & R(d,d,d) & \forall\text{E } 1 \end{array}$$

Obtivemos a linha 2 aqui eliminando o quantificador universal e subsituindo toda instância de '*x*' por '*d*'. Poderíamos ter feito o mesmo com qualquer outro nome que quiséssemos.

Isso motiva a regra da eliminação do universal (E∀):

$$\begin{array}{r|ll} m & \forall x\, \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) & \\ & \mathscr{A}(\ldots \mathscr{c} \ldots \mathscr{c} \ldots) & \forall\text{E } m \end{array}$$

A notação aqui foi introduzida em §28. O ponto é que você pode obter qualquer ***instância de substituição*** de uma fórmula universalmente quantificada: substitua qualquer instância da variável quantificada com qualquer nome que você quiser.

Devemos enfatizar que (como com toda regra de eliminação) você só pode aplicar a regra *E*∀ quando o quantificador universal é o operador principal. Então, o seguinte é ***proibido***:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \forall x\, B(x) \to B(k) & \\ \cline{2-2} 2 & B(b) \to B(k) & \text{tentativa inadequada de invocar } \forall\text{E } 1 \end{array}$$

Isso é ilegítimo, uma vez que '∀*x*' não é o operador lógico principal na linha 1. (Se você precisa de um lembrete sobre por que esse tipo de inferência deve ser proibida, releia §22.)

32.2 Introdução do existencial

Da afirmação de que alguma coisa em particular é F, você pode inferor que algo é F. Então, devemos permitir:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & R(a,a,d) & \\ \cline{2-2} 2 & \exists x\, R(a,a,x) & \exists\text{I } 1 \end{array}$$

Aqui, nós substituímos o nome '*d*' pela variável '*x*', e então quantificamos existencialmente sobre ela. Da mesma forma, permitiríamos:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & R(a,a,d) & \\ \cline{2-2} 2 & \exists x\, R(x,x,d) & \exists\text{I } 1 \end{array}$$

Aqui, nós substituímos ambas as instâncias do nome ‘a’ por uma variável, e então generalizamos existencialmente. Mas nós não precisamos substituir *ambas* as instâncias de um nome com uma variável: se Narcissus amava a si próprio, então há alguém que ama Narcissus. Então, nós também permitimos:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & R(a,a,d) & \\ \hline 2 & \exists x\, R(x,a,d) & \exists\text{I } 1 \end{array}$$

Aqui, substituímos *uma* instância do nome ‘a’ por uma variável, e então generalizamos existencialmente. Estas observações motivam nossa regra de introdução, apesar de que para explicá-la, precisaremos introduzir algumas notações novas.

Onde $\mathscr{A}$ é uma sentença contendo o nome $\mathscr{c}$, podemos enfatizar isso ao escrever ‘$\mathscr{A}(\ldots\mathscr{c}\ldots\mathscr{c}\ldots)$’. Escreveremos ‘$\mathscr{A}(\ldots\mathscr{x}\ldots\mathscr{c}\ldots)$’ para indicar qualquer fórmula obtida ao substituir *alguma ou todas* das instâncias do nome $\mathscr{c}$ pela variável $\mathscr{x}$. Armados com isso, nossa regra de introdução será:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A}(\ldots\mathscr{c}\ldots\mathscr{c}\ldots) & \\ & \exists\mathscr{x}\,\mathscr{A}(\ldots\mathscr{x}\ldots\mathscr{c}\ldots) & \exists\text{I } m \end{array}$$

$\mathscr{x}$ não pode ocorrer em $\mathscr{A}(\ldots\mathscr{c}\ldots\mathscr{c}\ldots)$

A restrição é incluída para garantir que qualquer aplicação da regra produz uma sentença da LPO. Então, o seguinte é permitido:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & R(a,a,d) & \\ \hline 2 & \exists x\, R(x,a,d) & \exists\text{I } 1 \\ 3 & \exists y \exists x\, R(x,y,d) & \exists\text{I } 2 \end{array}$$

Mas isso é proibido:

1	$R(a,a,d)$	
2	$\exists x\, R(x,a,d)$	$\exists$I 1
3	$\exists x\, \exists x\, R(x,x,d)$	tentativa inadequada de invocar $\exists$I 2

uma vez que a expressão na linha 3 contém variáveis conflitantes, e então não é uma sentença da LPO.

32.3 Domínios vazios

A prova seguinte combina nossas duas novas regras para quantificadores:

1	$\forall x\, F(x)$	
2	$F(a)$	$\forall$E 1
3	$\exists x\, F(x)$	$\exists$I 2

Poderia esta ser uma prova ruim? Se algo existe, então certamente podemos inferir que algo é F do fato de que tudo é F. Mas e se *nada* existir? Então certamente é vacuosamente verdadeiro que tudo é F; contudo, não se segue que algo é F, porque não há nada para *ser* F. Então, se afirmarmos que, por uma questão puramente lógica, '$\exists x\, F(x)$' se segue de '$\forall x\, F(x)$', então, estaremos afirmando que, por uma questão *puramente lógica*, há algo em vez de nada. Isso pode parecer um pouco estranho.

Na verdade, já estamos comprometidos com essa estranheza. Em §21, estipulamos que domínios na LPO devem ter pelo menos um elemento. Nós então definimos uma tautologia (da LPO) como uma sentença que é verdadeira em toda interpretação. Uma vez que '$\exists x\, x = x$' será verdadeira em toda interpretação, isso *também* tem o efeito de estipular que é uma questão lógica o fato de haver algo em vez de nada.

Uma vez que está longe de estar claro que a lógica deveria nos dizer que há algo em vez de nada, poderíamos muito bem estar trapaceando um pouco aqui.

Se nos recusarmos a trapacear, porém, então pagaremos um alto preço. Aqui estão três coisas que gostaremos de manter:

- $\forall x\, F(x) \vdash F(a)$: afinal, isso é ∀E.
- $F(a) \vdash \exists x\, F(x)$: Afinal, isso é ∃I.
- a habilidade de copiar e colar provas juntas: afinal, o raciocínio funciona colocando vários pequenos passos juntos em grandes cadeias.

Se obtivermos o que queremos em todos os três pontos, então teremos que admitir que $\forall x F x \vdash \exists x\, F(x)$. Então, se obtivermos o que queremos em todos os três pontos, o sistema de prova sozinho nos mostra que há algo em vez de nada. E se nos recusarmos a aceitar isso, então teremos que renunciar a uma das três coisas que nós queremos manter!

Antes de começarmos a pensar sobre o que renunciar, podemos perguntar o quanto isso é uma trapaça. Admitido, isso pode dificultar o debate teológico sobre por que há algo em vez de nada. Mas no resto do tempo, nos daremos bem. Então, talvez devêssemos considerar nosso sistema de provas (e a LPO, de maneira mais geral) como tendo um alcance muito limitado. Se quisermos permitir a possibilidade de *nada*, teremos que procurar um sistema de provas mais complicado. Mas enquanto nos contentarmos em ignorar essa possibilidade, nosso sistema de provas estará perfeitamente em ordem. (Como, da mesma forma, é a estipulação de que todo domínio deve conter pelo menos um objeto).

32.4 Introdução do universal

Suponha que você mostrou, sobre cada coisa particular, que ela é F (e que não há outras coisas para considerar). Então, você estaria justificado em afirmar que tudo é F. Isso motivaria a seguinte regra de prova. Se você estabeleceu todas as instâncias de substituição de '$\forall x\, F(x)$', então você pode inferir '$\forall x\, F(x)$'.

Infelizmente, esta regra seria totalmente inutilizável. Estabelecer que instância de substituição requereria provar '$F(a)$', '$F(b)$', ..., '$F(j_2)$', ..., '$F(r_{79002})$', ..., e assim por diante. De fato, uma vez que há infinitos nomes na LPO, esse processo nunca terminaria. Então, nunca poderíamos aplicar esta regra. Precisamos ser um pouco mais astutos ao criar nossa regra para introduzir o quantificador universal.

Uma solução será inspirada ao se considerar:

$$\forall x\, F(x) \therefore \forall y\, F(y)$$

Este argumento deve *obviamente* ser falso. Afinal, a variação alfabética deve ser uma questão de gosto, e sem qualquer consequência lógica. Mas como nosso sistema de prova poderia refletir isso? Suponha que começamos uma prova assim:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \forall x\, F(x) & \\ \hline 2 & F(a) & \forall\text{E } 1 \end{array}$$

Nós provamos ‘$F(a)$’. E, é claro, nada nos impede de usar a mesma justificação para provar ‘$F(b)$’, ‘$F(c)$’, ..., ‘$F(j_2)$’, ..., ‘$F(r_{79002})$, ..., e assim por diante, até ficarmos sem espaço, tempo ou paciência. Mas, refletindo sobre isso, nós vemos que há uma forma de provar $F\mathscr{c}$, para qualquer nome $\mathscr{c}$. E, se podemos fazer isso para *qualquer* qualquer coisa, então certamente podemos dizer que ‘F’ é verdadeiro sobre *tudo*. Portanto, isso nos justifica em inferir ‘$\forall y\, F(y)$’, assim:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \forall x\, F(x) & \\ \hline 2 & F(a) & \forall\text{E } 1 \\ 3 & \forall y\, F(y) & \forall\text{I } 2 \end{array}$$

O pensamento crucial aqui é que ‘a’ era apenas algum nome *arbitrário*. Não havia nada de especial sobre ele—poderíamos ter escolhido qualquer outro nome—e a prova ainda continuaria correta. E este pensamento crucial motiva a regra da introdução do universal (∀I).

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A}(\ldots \mathscr{c} \ldots \mathscr{c} \ldots) & \\ & \forall \mathscr{x}\, \mathscr{A}(\ldots \mathscr{x} \ldots \mathscr{x} \ldots) & \forall\text{I } m \end{array}$$

$\mathscr{c}$ não pode ocorrer em nenhuma assunção não eliminada$\mathscr{x}$ não pode ocorrer em $\mathscr{A}(\ldots \mathscr{c} \ldots \mathscr{c} \ldots)$

Um aspecto crucial dessa regra, porém, está associado à primeira restrição. Esta restrição garante que estamos sempre raciocinando em um nível suficientemente geral. Para ver a restrição em ação, considere este terrível argumento:

> Todos amam Kylie Minogue; portanto, todos amam a si mesmos.

Poderíamos simbolizar este padrão de inferência obviamente inválido como:

$$\forall x\, L(x,k) \therefore \forall x\, L(x,x)$$

Agora, suponha que nós tentamos oferecer uma prova que justifique esse argumento:

1	$\forall x\, L(x,k)$	
2	$L(k,k)$	$\forall$E 1
3	$\forall x\, L(x,x)$	tentativa inadequada de invocar $\forall$I 2

Isso não é permitido, porque 'k' já ocorreu em uma assunção não eliminada, a saber, a da linha 1. O ponto crucial é que, se fizermos qualquer assunção sobre o objeto com o qual estamos trabalhando, então não estamos raciocinando de maneira geral o suficiente para permitimos o uso de $\forall$I.

Apesar de o nome não poder ocorrer em qualquer assunção *não eliminada*, ele pode ocorrer em uma assunção *eliminada*. Ou seja, ele pode ocorrer em uma subprova que já fechamos. Por exemplo, isso está correto:

1	$G(d)$	
2	$G(d)$	R 1
3	$G(d) \to G(d)$	$\to$I 1–2
4	$\forall z(G(z) \to G(z))$	$\forall$I 3

Isso nos diz que '$\forall z(G(z) \to G(z))$' é um *teorema*. E isso é como deve ser.

Devemos enfatizar um último ponto. Conforme as convenções de §28.3, o uso de $\forall$I requer que nós substituamos *toda* instância do nome c em $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ com a variável x. Se apenas substituirmos *alguns* nomes e não outros, acabaremos 'provando' coisas bem estranhas. Por exemplo, considere o argumento:

> Todo mundo é tão velho quanto a si mesmo; então, todos são tão velhos quanto Judi Dench

Podemos simbolizar isso assim:

$$\forall x\, O(x,x) \therefore \forall x\, O(x,d)$$

Mas, agora, sponha que tentamos *justificar* este terrível argumento com o seguinte:

1	$\forall x\, O(x,x)$	
2	$O(d,d)$	$\forall$E 1
3	$\forall x\, O(x,d)$	tentativa inadequada de invocar $\forall$I 2

Felizmente, nossas regras não nos permitem fazer isso: a tentativa de prova é proibida, uma vez que ela não substitui *todas* as ocorrências de 'd' na linha 2 com um 'x'.

32.5 Eliminação do existencial

Suponha que sabemos que *algo* é F. O problema é que simplesmente saber isso não nos diz qual coisa é F. Então, pareceria que de '$\exists x\, F(x)$' nós não podemos concluir imediatamente que '$F(a)$', '$F(e_{23})$', ou qualquer outra instância de substituição da sentença. O que podemos fazer?

Suponha que nós sabemos que algo é F, e que tudo que é F também é G. No português (quase) natural, nós poderíamos racionar assim:

> Uma vez que algo é F, há uma coisa particular que é um F. Nós não sabemos qualquer coisa sobre ela, além do fato de que ela é um F, mas, por conveniência, vamos chamá-la de 'Becky'. Então Becky é F. Uma vez que tudo que é F é G, segue-se que Becky é G. Mas, uma vez que Becky é G, segue-se que algo é G. E nada dependeu de qual objeto, exatamente, Becky foi. Então, algo é G.

Poderíamos tentar capturar este padrão de raciocínio em uma prova como se segue:

$$\begin{array}{r|l l}
1 & \exists x\, F(x) & \\
2 & \forall x(F(x) \to G(x)) & \\ \hline
3 & \quad \left|\; \underline{F(b)} \right. & \\
4 & \quad \left|\; F(b) \to G(b) \right. & \forall\text{E } 2 \\
5 & \quad \left|\; G(b) \right. & \to\text{E } 4,\ 3 \\
6 & \quad \left|\; \exists x\, G(x) \right. & \exists\text{I } 5 \\
7 & \exists x\, G(x) & \exists\text{E } 1,\ 3\text{–}6
\end{array}$$

Desconstruindo isso: nós começamos ao escrever nossas assunções. Na linha 3, fizemos uma assunção adicional: ‘$F(b)$’. Esta foi apenas uma instância de substituição de ‘$\exists x\, F(x)$’. Sobre esta assunção, nós estabelecemos ‘$\exists x\, G(x)$’. Note que não fizemos qualquer assunção *especial* sobre o objeto nomeado por ‘b’; nós *apenas* assumimos que ele satisfaz ‘$F(x)$’. Então, nada depende de qual objeto ele é. E a linha 1 nos diz que *algo* satisfaz ‘$F(x)$’, então, nosso padrão de raciocínio foi perfeitamente geral. Podemos eliminar a assunção específica ‘$F(b)$’, e simplesmente inferir ‘$\exists x\, G(x)$’ sozinha.

Juntando tudo, obtemos a regra da eliminação do existencial (∃E):

$$\begin{array}{r|l l}
m & \exists x\, \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) & \\
i & \quad \left|\; \underline{\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)} \right. & \\
j & \quad \left|\; \mathscr{B} \right. & \\
 & \mathscr{B} & \exists\text{E } m,\ i\text{–}j
\end{array}$$

c não pode ocorrer em qualquer assunção não eliminada antes da linha i
c não pode ocorrer em $\exists x\, \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$
c não pode ocorrer em $\mathscr{B}$

Como na introdução do universal, as restrições são extremamente importantes. Para ver o porquê, considere o terrível argumento a seguir:

> Tim Button é um palestrante. Alguém não é um palestrante. Então, Tim Button é e não é um palestrante.

Poderíamos simbolizar este padrão de inferência obviamente inválido como se segue:

$$L(b), \exists x\, \neg L(x) \therefore L(b) \land \neg L(b)$$

Agora, suponha que tentamos oferecer uma prova que justifique o argumento:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & L(b) & \\
2 & \exists x\, \neg L(x) & \\ \cline{2-2}
3 & \quad \vert\ \neg L(b) & \\
4 & \quad \vert\ L(b) \land \neg L(b) & \land\text{I } 1, 3 \\
5 & L(b) \land \neg L(b) & \text{naughty attempt} \\
 & & \text{to invoke } \exists\text{E } 2, 3\text{–}4
\end{array}$$

A última linha da prova não é permitida. O nome que usamos em nossa instância de substituição para '$\exists x\, \neg L(x)$' na linha 3, a saber, 'b', ocorre na linha 4. Isso não seria melhor:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & L(b) & \\
2 & \exists x\, \neg L(x) & \\ \cline{2-2}
3 & \quad \vert\ \neg L(b) & \\
4 & \quad \vert\ L(b) \land \neg L(b) & \land\text{I } 1, 3 \\
5 & \quad \vert\ \exists x (L(x) \land \neg L(x)) & \exists\text{I } 4 \\
6 & \exists x (L(x) \land \neg L(x)) & \text{tentativa inadequada} \\
 & & \text{to invoke } \exists\text{E } 2, 3\text{–}5
\end{array}$$

A última linha ainda não é permitida. Pois, o nome que usamos em nossa instância de subsituição de '$\exists x\, \neg L(x)$', a saber, 'b', ocorre em uma assunção não eliminada, a saber, a linha 1.

A moral da história é esta. *Se você quiser extrair informações de um quantificador existencial, escolha um novo nome para sua instância de substituição.* Dessa forma, você pode garantir que você vai cumprir todas as restrições da regra para ∃E.

Exercícios Práticos

A. Explique por que essas duas 'provas' estão *incorretas*. Ainda, forneça interpretações que invalidariam o argumento falacioso que as provas consagram:

1	$\forall x\, R(x,x)$	
2	$R(a,a)$	∀E 1
3	$\forall y\, R(a,y)$	∀I 2
4	$\forall x\, \forall y\, R(x,y)$	∀I 3

1	$\forall x\, \exists y\, R(x,y)$	
2	$\exists y\, R(a,y)$	∀E 1
3	$R(a,a)$	
4	$\exists x\, R(x,x)$	∃I 3
5	$\exists x\, R(x,x)$	∃E 2, 3–4

B. Nas seguintes três provas faltam as citações (regra e número das linhas). Adicione-as, para torná-las provas genuínas.

1.

1	$\forall x \exists y (R(x,y) \vee R(y,x))$
2	$\forall x\, \neg R(m,x)$
3	$\exists y (R(m,y) \vee R(y,m))$
4	$R(m,a) \vee R(a,m)$
5	$\neg R(m,a)$
6	$R(a,m)$
7	$\exists x\, R(x,m)$
8	$\exists x\, R(x,m)$

	1	$\forall x(\exists y\, L(x,y) \to \forall z\, L(z,x))$
	2	$\underline{L(a,b)}$
	3	$\exists y\, L(a,y) \to \forall z L(z,a)$
	4	$\exists y\, L(a,y)$
	5	$\forall z\, L(z,a)$
2.	6	$L(c,a)$
	7	$\exists y\, L(c,y) \to \forall z\, L(z,c)$
	8	$\exists y\, L(c,y)$
	9	$\forall z\, L(z,c)$
	10	$L(c,c)$
	11	$\forall x\, L(x,x)$

	1	$\forall x(J(x) \to K(x))$
	2	$\exists x \forall y\, L(x,y)$
	3	$\underline{\forall x\, J(x)}$
	4	$\mid \underline{\forall y\, L(a,y)}$
	5	$\mid L(a,a)$
3.	6	$\mid J(a)$
	7	$\mid J(a) \to K(a)$
	8	$\mid K(a)$
	9	$\mid K(a) \land L(a,a)$
	10	$\mid \exists x(K(x) \land L(x,x))$
	11	$\exists x(K(x) \land L(x,x))$

C. Em §22, problema A, consideramos quinze figuras silogísticas da lógica aristotélica. Forneça provas para cada uma das formas de argumento. Note: Você achará *muito* mais fácil se você simbolizar (por exemplo) ‘Nenhum F é G’ como ‘$\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$’.

D. Aristóteles e seus sucessores identificaram outras formas silogísticas que dependem do ‘importe existencial’. Simbolize cada uma dessas formas de argumento na LPO e ofereça provas.

1. **Barbari**. Algo é H. Todo G é F. Todo H é G. Então: Algum H é F
2. **Celaront**. Algo é H. No G é F. Todo H é G. Então: Algum H não é F
3. **Cesaro**. Algo é H. No F é G. Todo H é G. Então: Algum H não é F.
4. **Camestros**. Algo é H. Todo F é G. No H é G. Então: Algum H não é F.
5. **Felapton**. Algo é G. No G é F. Todo G é H. Então: Algum H não é F.
6. **Darapti**. Algo é G. Todo G é F. Todo G é H. Então: Algum H é F.
7. **Calemos**. Algo é H. Todo F é G. No G é H. Então: Algum H não é F.
8. **Fesapo**. Algo é G. No F é G. Todo G é H. Então: Algum H não é F.
9. **Bamalip**. Algo é F. Todo F é G. Todo G é H. Então: Algum H é F.

E. Forneça uma prova de cada caso.

1. $\vdash \forall x\, F(x) \rightarrow \forall y(F(y) \wedge F(y))$
2. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \exists x\, A(x) \vdash \exists x\, B(x)$
3. $\forall x(M(x) \leftrightarrow N(x)), M(a) \wedge \exists x\, R(x,a) \vdash \exists x\, N(x)$
4. $\forall x\, \forall y\, G(x,y) \vdash \exists x\, G(x,x)$
5. $\vdash \forall x\, R(x,x) \rightarrow \exists x\, \exists y\, R(x,y)$
6. $\vdash \forall y\, \exists x(Q(y) \rightarrow Q(x))$
7. $N(a) \rightarrow \forall x(M(x) \leftrightarrow M(a)), M(a), \neg M(b) \vdash \neg N(a)$
8. $\forall x\, \forall y(G(x,y) \rightarrow G(y,x)) \vdash \forall x \forall y(G(x,y) \leftrightarrow G(y,x))$
9. $\forall x(\neg M(x) \vee L(j,x)), \forall x(B(x) \rightarrow L(j,x)), \forall x(M(x) \vee B(x)) \vdash \forall x L(j,x)$

F. Escreva uma chave de simbolização para o seguinte argumento, simbolize-o e prove-o:

> Há alguém que gosta de todos que gostam de todos que ela gosta. Portanto, há alguém que gosta de si mesmo.

G. Mostre que cada par de sentenças é comprovavelmente equivalente

1. $\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x))$, $\neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$
2. $\forall x(\neg A(x) \rightarrow B(d))$, $\forall x\, A(x) \vee B(d)$
3. $\exists x\, P(x) \rightarrow Q(c)$, $\forall x(P(x) \rightarrow Q(c))$

H. Para cada um dos seguintes pares de frases: Se forem comprovadamente equivalentes, dê provas para mostrar isso. Se não forem, construa uma interpretação para mostrar que eles não são logicamente equivalentes.

1. $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(c), \forall x(P(x) \rightarrow Q(c))$
2. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, B(x,y,z), \forall x\, B(x,x)x$
3. $\forall x\, \forall y\, D(x,y), \forall y\, \forall x\, D(x,y)$
4. $\exists x\, \forall y\, D(x,y), \forall y\, \exists x\, D(x,y)$
5. $\forall x(R(c,a) \leftrightarrow R(x,a)), R(c,a) \leftrightarrow \forall x\, R(x,a)$

I. Para cada um dos seguintes argumentos: Se for válido no FOL, forneça uma prova. Se for inválido, construa uma interpretação para mostrar que ele é inválido.

1. $\exists y\, \forall x\, R(x,y)\ \therefore\ \forall x\, \exists y\, R(x,y)$
2. $\forall x\, \exists y\, R(x,y)\ \therefore\ \exists y\, \forall x\, R(x,y)$
3. $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))\ \therefore\ \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
4. $\forall x(S(x) \rightarrow T(a)), S(d)\ \therefore\ T(a)$
5. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \forall x(B(x) \rightarrow C(x))\ \therefore\ \forall x(A(x) \rightarrow C(x))$
6. $\exists x(D(x) \vee E(x)), \forall x(D(x) \rightarrow F(x))\ \therefore\ \exists x(D(x) \wedge F(x))$
7. $\forall x\, \forall y(R(x,y) \vee R(y,x))\ \therefore\ R(j,j)$
8. $\exists x\, \exists y(R(x,y) \vee R(y,x))\ \therefore\ R(j,j)$
9. $\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x), \exists x\, \neg P(x)\ \therefore\ \exists x\, \neg Q(x)$
10. $\exists x\, M(x) \rightarrow \exists x\, N(x), \neg\exists x\, N(x)\ \therefore\ \forall x\, \neg M(x)$

CAPÍTULO 33

Provas com quantificadores

Em §16, discutimos estratégias para construir provas usando as regras básicas da dedução natural para a LVF. Os mesmos princípios se aplicam às regras para quantificadores. Se quisermos provar uma sentença $\forall x\, \mathscr{A}(x)$ ou $\exists x\, \mathscr{A}(x)$, podemos trabalhar no sentido contrário justificando a sentença que queremos com ∀I ou ∃I e tentando encontrar uma prova da premissa correspondente daquela regra. E, para avançar a partir de uma sentença quantificada, aplicamos ∀E ou ∃E, conforme o caso.

Especificamente, suponha que você quer provar $\forall x\, \mathscr{A}(x)$. Para fazer isso usando ∀I, precisaremos de uma prova de $\mathscr{A}(c)$ para algum nome c que não ocorre em qualquer assunção não eliminada. Aplicar a estratégia correspondente, i.e., construir uma prova de $\forall x\, \mathscr{A}(x)$ no sentido contrário, é escrever $\mathscr{A}(c)$ acima dele e então continuar tentando encontrar uma prova daquela sentença.

	$\vdots$	
n	$\mathscr{A}(c)$	
$n+1$	$\forall x\, \mathscr{A}(x)$	∀I n

$\mathscr{A}(c)$ é obtido de $\mathscr{A}(x)$ ao substituir toda ocorrência livre de x em $\mathscr{A}(x)$ por c. Para esse trabalho, c deve satisfazer a condição especial. Nós garantimos que ela satisfaz ao sempre escolhermos um nome que ainda não ocorre na prova construída até então. (Certamente, ele ocorrerá na prova que acabarmos construindo—apenas não em uma assunção que não eliminada naquela linha $n+1$.)

Para trabalhar de trás para frente a partir de uma sentença $\exists x\, \mathscr{A}(x)$, nós simplesmente escrevemos uma sentença sobre ela que sirva como uma justificação para uma aplicação da regra ∃I, i.e., uma sentença da forma $\mathscr{A}(c)$.

	$\vdots$	
n	$\mathscr{A}(c)$	
$n+1$	$\exists x\, \mathscr{A}(x)$	$\exists$I n

Isso parece com o que faríamos caso trabalhássemos no sentido contrário a partir de uma sentença quantificada universalmente. A diferença é que enquanto para ∀I nós temos que escolher um nome c que não ocorre na prova (até então, para ∃I nós podemos, e em geral devemos, escolher um nome c que já ocorreu na prova. Assim como no caso de ∨I, frequentemente não é claro qual c vai dar certo, e, então, para evitar ter que retroceder, você deve trabalhar de trás para frente a partir de sentenças quantificadas existencialmente apenas quando todas as outras estratégias tiverem sido aplicadas.

Por outro lado, trabalhar *a partir de* de sentenças $\exists x\, \mathscr{A}(x())$ geralmente funcionam sempre e você não precisará retroceder. Trabalhar a partir de uma sentença existencialemnte quantificada leva e, conta não apenas $\exists x\, \mathscr{A}(x)$, mas também qualquer sentença $\mathscr{B}$ que você gostaria de provar. Isso requer que você estabeleça uma subprova sobre $\mathscr{B}$, em que $\mathscr{B}$ é a última linha, e uma instância de substituição $\mathscr{A}(c)$ de $\exists x\, \mathscr{A}(x)$ é a assunção. Para garantir que a condição em c que governa ∃E é satisfeita, escolha um nome c que ainda não ocorreu na prova.

$$\begin{array}{r|l}
 & \vdots \\
m & \exists x\, \mathscr{A}(x) \\
 & \vdots \\
n & \quad \mathscr{A}(\mathcal{c}) \\
 & \quad \vdots \\
k & \quad \mathscr{B} \\
k+1 & \mathscr{B} \qquad\qquad \exists\text{E } m,\ n\text{–}k
\end{array}$$

Então, você continuará com a meta de provar $\mathscr{B}$, mas, agora, dentro de uma subprova em que você tem uma sentença adicional para trabalhar, a saber, $\mathscr{A}(\mathcal{c})$.

Por último, trabalhar a partir de $\forall x\, \mathscr{A}(x)$ significa que você pode sempre escrever $\mathscr{A}(\mathcal{c})$ e justificá-lo usando ∀E, para qualquer nome $\mathcal{c}$. Certamente, você não iria querer fazer isso à vontade. Apenas certos nomes $\mathcal{c}$ ajudarão em sua tarefa de provar qualquer que seja a sentença na qual você está trabalhando. Então, assim como trabalhar no sentido contrário a partir de $\exists x\, \mathscr{A}(x)$, você deveria avançar a partir de $\forall x\, \mathscr{A}(x)$ apenas depois de todas as outras estratégias terem sido aplicadas.

Vamos considerar aqui um exemplo do argumento $\forall x(A(x) \rightarrow B)$ $\therefore$ $\exists x\, A(x) \rightarrow B$. Para começar a construir uma prova, escrevemos a premissa no topo e a conclusão no fim.

$$\begin{array}{r|l}
1 & \forall x(A(x) \rightarrow B) \\
\hline
 & \vdots \\
n & \exists x\, A(x) \rightarrow B
\end{array}$$

As estratégias para conectivos da LVF continuam se aplicando, e você deve aplicá-las na mesma ordem: primeiro trabalhe no sentido contrário a partir de condicionais, sentenças engadas, conjunções e agora também quantificadores universais, e então para frente a partir de disjunções e quantificadores existenciais, e apenas então tente aplicar →E, ¬E, ∨I, ∀E, or ∃I. En nosso caso, isso significa trabalhar no sentido contrário a partir da conclusão:

1	$\forall x(A(x) \to B)$	
2	$\mid\ \exists x\, A(x)$	
	$\mid\ \vdots$	
$n-1$	$\mid\ B$	
n	$\exists x\, A(x) \to B$	$\to$I 2–$(n-1)$

Nosso próximo passo deve ser avançar a partir $\exists x\, A(x)$ on line 2. Para isso, temos que escolher um nome que ainda não esteja em nossa prova. Uma vez que nenhum nome aparece, podemos escolher qualquer nome, digamos, ‘d’.

1	$\forall x(A(x) \to B)$	
2	$\mid\ \exists x\, A(x)$	
3	$\mid\ \mid\ A(d)$	
	$\mid\ \mid\ \vdots$	
$n-2$	$\mid\ \mid\ B$	
$n-1$	$\mid\ B$	$\exists$E 2, 3–$(n-2)$
n	$\exists x\, A(x) \to B$	$\to$I 2–$(n-1)$

Agora esgotamos nossas estratégias primárias e é hora de avançar a partir da premissa $\forall x(A(x) \to B)$. Aplicar $\forall$E significa que podemos justificar qualquer instância de $A(c) \to B$, independentemente de qual c escolhermos. É claro, fazemos bem em escolher d, uma vez que isso nos dará $A(d) \to B$. Podemos, então, aplicar $\to$E to justify B, finalizando a prova.

1	$\forall x(A(x) \to B)$	
2	$\quad \exists x\, A(x)$	
3	$\quad\quad A(d)$	
4	$\quad\quad A(d) \to B$	$\forall$E 1
5	$\quad\quad B$	$\to$E 4, 3
6	$\quad B$	$\exists$E 2, 3–5
7	$\exists x\, A(x) \to B$	$\to$I 2–6

Vamos começar a construir uma prova do inverso. Começamos com

1	$\exists x\, A(x) \to B$
	$\vdots$
n	$\forall x(A(x) \to B)$

Note que a premissa é um condicional, não uma sentença quantificada existencialmente, então não devemos (ainda) avançar a partir dela. Trabalhar de trás para frente a partir da conclusão, $\forall x(A(x) \to B)$, nos leva a uma prova de $A(d) \to B$:

1	$\exists x\, A(x) \to B$	
	$\vdots$	
$n-1$	$A(d) \to B$	
n	$\forall x(A(x) \to B)$	$\forall$I $n-1$

E trabalhar de trás para frente a partir de $A(d) \to B$ significa que deveríamos estabelecer uma subprova com $A(d)$ como assunção e B como última linha:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \exists x\, A(x) \to B & \\ \hline
2 & \quad \vert\ \underline{A(d)} & \\
 & \quad \vert\ \vdots & \\
n-2 & \quad \vert\ B & \\
n-1 & A(d) \to B & \to\text{I } 2\text{–}(n-2) \\
n & \forall x(A(x) \to B) & \forall\text{I } n-1
\end{array}
$$

Agora, podemos avançar a partir da premissa da linha 1. Ela é um condicional, e seu consequente é a sentença B que estamos tentando justificar. Então, devemos procurar por uma prova do seu antecedente, $\exists x\, A(x)$. Certamente, isso está agora prontamente disponível, por ∃I da linha 2, e nós terminamos:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \exists x\, A(x) \to B & \\ \hline
2 & \quad \vert\ \underline{A(d)} & \\
3 & \quad \vert\ \exists x\, A(x) & \exists\text{I } 2 \\
4 & \quad \vert\ B & \to\text{E } 1, 3 \\
5 & A(d) \to B & \to\text{I } 2\text{–}4 \\
6 & \forall x(A(x) \to B) & \forall\text{I } 5
\end{array}
$$

Exercícios Práticos

A. Use as estratégias para encontrar provas para cada um dos seguintes argumentos e teoremas:

1. $A \to \forall x\, B(x) \therefore \forall x(A \to B(x))$
2. $\exists x(A \to B(x)) \therefore A \to \exists x\, B(x)$
3. $\forall x(A(x) \land B(x)) \leftrightarrow (\forall x\, A(x) \land \forall x\, B(x))$
4. $\exists x(A(x) \lor B(x)) \leftrightarrow (\exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x))$
5. $A \lor \forall x\, B(x)) \therefore \forall x(A \lor B(x))$
6. $\forall x(A(x) \to B) \therefore \exists x\, A(x) \to B$
7. $\exists x(A(x) \to B) \therefore \forall x\, A(x) \to B$
8. $\forall x(A(x) \to \exists y\, A(y))$

Use apenas as regras básicas da LVF somadas às regras básicas de quantificadoes.

B. Use as estratégias para encontrar provas para cada um dos argumentos e teoremas:

1. $\forall x\, R(x,x) \therefore \forall x\, \exists y\, R(x,y)$
2. $\forall x\, \forall y\, \forall z[(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)]$
   $\therefore \forall x\, \forall y[R(x,y) \rightarrow \forall z(R(y,z) \rightarrow R(x,z))]$
3. $\forall x\, \forall y\, \forall z[(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)]$,
   $\forall x\, \forall y(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
   $\therefore \forall x\, \forall y\, \forall z[(R(x,y) \wedge R(x,z)) \rightarrow R(y,z)]$
4. $\forall x\, \forall y(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
   $\therefore \forall x\, \forall y\, \forall z[(R(x,y) \wedge R(x,z)) \rightarrow \exists u(R(y,u) \wedge R(z,u))]$
5. $\neg\exists x\, \forall y(A(x,y) \leftrightarrow \neg A(y,y))$

C. Use as estratégias para encontrar provas para cada um dos argumentos e teoremas:

1. $\forall x\, A(x) \rightarrow B \therefore \exists x(A(x) \rightarrow B)$
2. $A \rightarrow \exists x\, B(x) \therefore \exists x(A \rightarrow B(x))$
3. $\forall x(A \vee B(x)) \therefore A \vee \forall x\, B(x))$
4. $\exists x(A(x) \rightarrow \forall y\, A(y))$
5. $\exists x(\exists y\, A(y) \rightarrow A(x))$

Essas requerem o uso de IP. Use apenas as regras básicas da LVF somadas às regras básicas de quantificadoes.

CAPÍTULO 34

Conversão de quantificadores

Nesta seção, adicionaremos algumas regras adicionais às regras básicas da seção anterior. Elas governam a interação entre quantificadores e a negação.

Em §21, notamos que $\neg\exists x \mathscr{A}$ é logicamente equivalente a $\forall x \neg\mathscr{A}$. Adicionaremos algumas regras ao nosso sistema de prova que governam isso. Em particular, adicionamos:

$$\begin{array}{r|ll} m & \forall x\, \neg \mathscr{A} & \\ & \neg\exists x\, \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

e

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\exists x\, \mathscr{A} & \\ & \forall x\, \neg \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

Igualmente, adicionamos:

$$\begin{array}{r|ll} m & \exists x\, \neg \mathscr{A} & \\ & \neg\forall x\, \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

e

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\forall x\, \mathscr{A} & \\ & \exists x\, \neg \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

Exercícios Práticos

A. Mostre em cada caso que as sentenças são demonstravelmente inconsistentes:

1. $S(a) \rightarrow T(m), T(m) \rightarrow S(a), T(m) \wedge \neg S(a)$
2. $\neg\exists x\, R(x,a), \forall x\, \forall y\, R(y,x)$
3. $\neg\exists x\, \exists y\, L(x,y), L(a,a)$
4. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall z(P(z) \rightarrow R(z)), \forall y\, P(y), \neg Q(a) \wedge \neg R(b)$

B. Mostre em cada caso que cada par de sentença é demonstravelmente equivalente:

1. $\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x)), \neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$
2. $\forall x(\neg A(x) \rightarrow B(d)), \forall x\, A(x) \vee B(d)$

C. Em §22, consideramos o que ocorre quando movemos os quantificadores 'entre' operadores lógicos. Mostr que cada par de sentenças é demonstravelmente equivalente:

1. $\forall x(F(x) \wedge G(a)), \forall x\, F(x) \wedge G(a)$
2. $\exists x(F(x) \vee G(a)), \exists x\, F(x) \vee G(a)$
3. $\forall x(G(a) \rightarrow F(x)), G(a) \rightarrow \forall x\, F(x)$
4. $\forall x(F(x) \rightarrow G(a)), \exists x\, F(x) \rightarrow G(a)$
5. $\exists x(G(a) \rightarrow F(x)), G(a) \rightarrow \exists x\, F(x)$
6. $\exists x(F(x) \rightarrow G(a)), \forall x\, F(x) \rightarrow G(a)$

Nota: a variável 'x' não ocorre em '$G(a)$'. Quando todos os quantificadores ocorrem no começo de uma sentença, essa sentença é dita estar em sua *forma normal prenex.* Essas equivalências são às vezes chamadas de *regras prenex*, uma vez que elas nos dão meios de colocar qualquer sentença em sua forma normal prenex.

CAPÍTULO 35

Regras para identidade

Em §27, mencionamos a tese filosoficamente controversa da *identidade dos indiscerníveis*. Esta é a afirmação de que os objetos que são indiscerníveis em todos os sentidos são, de fato, idênticos entre si. Também foi mencionado que não admitiremos esta tese. Daqui se segue que, não importa o quanto você aprenda sobre dois objetos, não podemos provar que eles são idênticos. A menos que, é claro, você aprenda que os dois objetos são de fato idênticos, mas a prova dificilmente será muito esclarecedora.

O ponto geral, porém, é que *nenhuma sentença* que já não contenha o predicado de identidade pode justificar a inferência a '$a = b$'. Então, nossa regra de introdução da identidade não pode nos permitir inferir uma afirmação de identidade contendo dois nomes *diferentes*.

Contudo, todo objeto é idêntico a si mesmo. Nenhuma premissa, então, é requerida para concluir que algo é idêntico a si mesmo. Então, essa será a regra da introdução da identidade:

$$\mid \; c = c \qquad {=}\text{I}$$

Note que esta regra não requer referência a quaisquer linhas anteriores da prova. Para qualquer nome c, você pode escrever $c = c$ em qualquer ponto, apenas com a regra =I como justificação.

Nossa regra de eliminação é mais legal. Se você estabeleceu '$a = b$', então qualquer coisa que for verdadeira sobre objeto nomeado por 'a' também tem que ser verdadeira sobre o objeto nomeado por 'b'. Para qualquer sentença com 'a' nela, você pode subsituir alguma ou todas as ocorrências de 'a' por 'b' e produzir uma sentença equivalente. Por exemplo, a partir de '$R(a,a)$' e '$a = b$', você está justificado a inferir '$R(a,b)$', '$R(b,a)$' ou '$R(b,b)$'. De maneira mais geral:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{a} = \mathscr{b} & \\ n & \mathscr{A}(\ldots \mathscr{a} \ldots \mathscr{a} \ldots) & \\ & \mathscr{A}(\ldots \mathscr{b} \ldots \mathscr{a} \ldots) & =\text{E } m, n \end{array}$$

A notação aqui é para ∃I. Então $\mathscr{A}(\ldots \mathscr{a} \ldots \mathscr{a} \ldots)$ é uma fórmula contendo o nome $\mathscr{a}$, e $\mathscr{A}(\ldots \mathscr{b} \ldots \mathscr{a} \ldots)$ é uma fórmula obtida ao substituir uma ou mais instâncias do nome $\mathscr{a}$ pelo nome $\mathscr{b}$. Linhas m e n podem ocorrer em qualquer ordem, e não precisam estar perto, mas sempre citaremos o enunciado de identidade primeiro. Simetricamente, nós permitimos:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{a} = \mathscr{b} & \\ n & \mathscr{A}(\ldots \mathscr{b} \ldots \mathscr{b} \ldots) & \\ & \mathscr{A}(\ldots \mathscr{a} \ldots \mathscr{b} \ldots) & =\text{E } m, n \end{array}$$

Esta regra é às vezes chamada de *lei de Leibniz*, depois de Gottfried Leibniz.

Para ver as regras em ação, provaremos alguns resultados rápidos. Primeiro, provaremos que a identidade é *simétrica*:

1	$\quad a = b$	
2	$\quad a = a$	=I
3	$\quad b = a$	=E 1, 2
4	$a = b \rightarrow b = a$	→I 1–3
5	$\forall y(a = y \rightarrow y = a)$	∀I 4
6	$\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$	∀I 5

Obtemos a linha 3 ao substituir uma instância de ‘a’ na linha 2 por uma instância de ‘b’; isso é justificado dado que ‘$a = b$’.

Segundo, provaremos que a identidade é *transitiva*:

1	$\quad a = b \land b = c$	
2	$\quad a = b$	∧E 1
3	$\quad b = c$	∧E 1
4	$\quad a = c$	=E 2, 3
5	$(a = b \land b = c) \rightarrow a = c$	→I 1–4
6	$\forall z((a = b \land b = z) \rightarrow a = z)$	∀I 5
7	$\forall y \forall z((a = y \land y = z) \rightarrow a = z)$	∀I 6
8	$\forall x \forall y \forall z((x = y \land y = z) \rightarrow x = z)$	∀I 7

Obtemos a linha 4 ao substituir ‘b’ na linha 3 por ‘a’; isso é justificado dado que ‘$a = b$’.

Exercícios Práticos

A. Forneça uma prova de cada afirmação.

1. $P(a) \lor Q(b), Q(b) \rightarrow b = c, \neg P(a) \vdash Q(c)$
2. $m = n \lor n = o, A(n) \vdash A(m) \lor A(o)$
3. $\forall x\ x = m, R(m, a) \vdash \exists x\, R(x, x)$
4. $\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow x = y) \vdash R(a, b) \rightarrow R(b, a)$
5. $\neg \exists x \neg x = m \vdash \forall x \forall y(P(x) \rightarrow P(y))$

6. $\exists x\, J(x), \exists x \neg J(x) \vdash \exists x\, \exists y \neg x = y$
7. $\forall x(x = n \leftrightarrow M(x)), \forall x(O(x) \vee \neg M(x)) \vdash O(n)$
8. $\exists x\, D(x), \forall x(x = p \leftrightarrow D(x)) \vdash D(p)$
9. $\exists x\big[(K(x) \wedge \forall y(K(y) \rightarrow x = y)) \wedge B(x)\big], Kd \vdash B(d)$
10. $\vdash P(a) \rightarrow \forall x(P(x) \vee \neg x = a)$

B. Mostre que as fórmulas a seguir são demonstravelmente equivalentes:

- $\exists x\big([F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow x = y)] \wedge x = n\big)$
- $F(n) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow n = y)$

E, consequentemente, que ambas têm uma reivindicação decente de simbolizar a sentença portuguesa ‘Nick é o *F*’

C. Em §24, afirmamos que as seguintes sentenças são simbolizações logicamente equivalentes da sentença portuguesa ‘há exatamente um *F*’:

- $\exists x\, F(x) \wedge \forall x\, \forall y\big[(F(x) \wedge F(y)) \rightarrow x = y\big]$
- $\exists x\big[F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow x = y)\big]$
- $\exists x\, \forall y(F(y) \leftrightarrow x = y)$

Mostre que elas são todas demonstravelmente equivalentes. (*Dica*: para mostrar que as três sentenças são demonstravelmente equivalentes, é suficiente mostrar que a primeira prova a segunda, a segunda prova a primeira e a terceira prova a primeira; pense sobre o motivo disso).

D. Simbolize o seguinte argumento

> Há exatamente um F. Há exatamente um G. Nada é ao mesmo tempo F e G. Então: há exatamente duas coisas que são ou F ou G.

E forneça uma prova disso.

CAPÍTULO 36

Regras derivadas

Como nos casos da LVF, nós primeiro introduzimos algumas regras para a LPO como básicas (em §32), e então adicionamos algumas outras regras para conversão de quantificadores (de agora em diante, CQ) em (in §34). De fato, as regras de CQ deveriam ser tratadas como regras *derivadas* de §32. (O ponto aqui é como em §19). Aqui está a justificação para a primeira regra de CQ:

1	$\forall x \neg A(x)$	
2	$\exists x\, A(x)$	
3	$A(c)$	
4	$\neg A(c)$	∀E 1
5	$\bot$	¬E 4, 3
6	$\bot$	∃E 2, 3–5
7	$\neg\exists x\, A(x)$	¬I 2–6

Here is a justification of the third CQ rule:

1	$\exists x \neg A(x)$	
2	$\quad \forall x\, A(x)$	
3	$\quad\quad \neg A(c)$	
4	$\quad\quad A(c)$	$\forall$E 2
5	$\quad\quad \bot$	$\neg$E 3, 4
6	$\quad \bot$	$\exists$E 1, 3–5
7	$\neg\forall x\, A(x)$	$\neg$I 2–6

Isso explica por que as regras de CQ podem ser tratadas como derivadas. Justificações similares podem ser ofereceidas para as outras duas regras CQ.

Exercícios Práticos

A. Ofereça provas que justifiquem a adição da segunda e quarta regras de QC como regras derivadas.

CAPÍTULO 37

Prova e semântica

Nós usamos duas diferentes catracas neste livro. Esta:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{C}$$

significa que há alguma prova que começa com as assunções $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ e termina com $\mathscr{C}$ (e nenhuma assunção não eliminada além de $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$). Essa é uma *noção prova-teórica [proof-theoretic].*

Por contraste, essa:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{C}$$

significa que nenhuma valoração (ou interpretação) torna todas as fórmulas de $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ verdadeiras e $\mathscr{C}$ falsa. Isso se trata de atribuições de verdade e falsidade a sentenças. É uma *noção semântica.*

Não podemos enfatizar o suficiente que estas são noções diferentes. Mas podemos enfatizar um pouco mais: *Essas são noções diferentes*

Uma vez que você tive internalizado este ponto, continue lendo.

Apesar de nossas noções semânticas de prova-teóricas [*proof-theoretic*] serem diferentes, há uma profunda conexão entre elas. Para explicar esta conexão, começaremos considerando a relação entre tautologias e teoremas.

Para mostrar que uma sentença é um teorema, você só precisa produzir uma prova. Certamente, pode ser difícil produzir uma prova de vinte linhas, mas não é tão difícil verificar cada linha da prova e confirmar se ela é legítima; e se cada linha da prova individualmente é legítima, então toda a prova é legítima. Mostrar que uma sentença é uma tautologia, contudo, requer raciocinar sobre todas as interpretações possíveis. Dada uma escolha entre mostrar que uma sentença é um teorema e mostrar que é uma tautologia, seria mais fácil mostrar que é um teorema.

Por outro lado, para mostrar que uma sentença *não* é um teorema é difícil. Precisamos raciocinar sobre todas as provas (possíveis). Isso é muito difícil. No entanto, para mostrar que uma sentença não é uma tautologia, você precisa apenas construir uma interpretação na qual a sentença é falsa. Certamente, pode ser difícil apresentar a interpretação; mas uma vez feito isso, é relativamente simples verificar qual o valor de verdade que ela atribui a uma sentença. Dada uma escolha entre mostrar que uma sentença não é um teorema e mostrar que não é uma tautologia, seria mais fácil mostrar que não é uma tautologia.

Felizmente, *uma sentença é um teorema se e somente se ela for uma tautologia.* Como resultado, se fornecermos uma prova de $\mathscr{A}$ sem assunções, e então mostrarmos que $\mathscr{A}$ é um teorema, i.e. $\vdash \mathscr{A}$, poderemos legitimamente inferir que $\mathscr{A}$ é uma tautologia, i.e., $\vDash \mathscr{A}$. Similarmente, se construirmos uma interpretação em que $\mathscr{A}$ é falsa e, consequentemente, mostrarmos que não é uma tautologia, i.e. $\nvDash \mathscr{A}$, segue-se que $\mathscr{A}$ não é um teorema, i.e. $\nvdash \mathscr{A}$.

De maneira mais geral, temos os seguintes resultados poderosos:

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B} \textbf{ iff } \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vDash \mathscr{B}$$

Isso mostra que, enquanto a provabilidade [*provability*] e o acarretamento [*entailment*] são noções *diferentes*, elas são extensionalmente equivalentes. Como tal:

- Um argumento é válido *válido* sse *a conclusão pode ser provada a partir das premissas.*
- Duas sentenças são *logicamente equivalentes* sse elas são *demonstravelmente equivalentes.*
- Sentenças são *satisfatíveis* sse elas não são *demonstravelmente inconsistentes.*

Por esse motivo, você pode escolher quando pensar em termos de provas e quando pensar em termos de valorações/interpretações, fazendo o que for mais fácil para uma determinada tarefa. A tabela na próxima página resume qual (geralmente) é mais fácil.

É intuitivo que a demonstrabilidade e o acarretamento semântico devem concordar. Mas—vamos repetir isso—não deixe ser enganado pela similaridade dos símbolos ‘$\vDash$’ e ‘$\vdash$’. Estes símbolos têm significados bem diferentes. O fato de que a demonstrabilidade e o acarretamento semântico concordarem não é um resultado fácil a se chegar.

De fato, provar que demonstrabilidade e acarretamento semântico concordam é, de maneira bem decisível, o ponto em que a lógica introdutória se torna lógica intermediária.

	Sim	**Não**
$\mathscr{A}$ é uma **tautologia**?	dê uma prova que mostra $\vdash \mathscr{A}$	dê uma interpretação em que $\mathscr{A}$ é falso
$\mathscr{A}$ é uma **contradição**?	dê uma prova que mostra $\vdash \neg\mathscr{A}$	dê uma interpretação em que $\mathscr{A}$ é verdadeiro
$\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são **equivalentes**?	dê duas provas, uma para $\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$ e uma para $\mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$	dê uma interpretação em que $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ têm valores de verdade diferentes
$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ são **conjuntamente satisfatíveis**?	dê uma interpretação em que todos de $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ são verdadeiros	prove uma contradição das assunções $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$
$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \mathrel{.\,\raise1ex\hbox{.}\,.} \mathscr{C}$ é **válido**?	dê uma prova com as assunções $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ e conclusão $\mathscr{C}$	dê uma interpretação em que cada um dos $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ é verdadeiro e $\mathscr{C}$ é falso

PARTE VIII

Lógica modal

CAPÍTULO 38

Introdução à lógica modal

A lógica modal (LM) é a lógica das *modalidades*, maneiras pelas quais um enunciado pode ser verdadeiro. *Necessidade* e *possibilidade* são duas de tais modalidades: um enunciado pode ser verdadeiro, mas ele também pode ser necessariamente verdadeiro (verdadeiro independentemente de como o mundo possa ser). Por exemplo, verdades lógicas não são verdadeiras por causa de alguma característica acidental do mundo, mas são verdadeiras aconteça o que acontecer. Um enunciado possível pode não ser atualmente verdadeiro, mas ele poderia ter sido verdadeiro. Usamos $\Box$ para expressar necessidade e $\Diamond$ para expressar possibilidade. Então, você pode ler $\Box\mathscr{A}$ como *É necessariamente o caso que* $\mathscr{A}$, e $\Diamond\mathscr{A}$ como *É possivelmente o caso que* $\mathscr{A}$.

Há vários tipos diferentes de necessidade. É *humanamente impossível*, para mim, correr a 160km/h. Dados os tipos de criaturas que somos, nenhum humano poderia fazer isso. Mas, ainda assim, não é *fisicamente impossível* que eu corra tão rápido assim. Nós ainda não temos a tecnologia para fazer isso, mas certamente é fisicamente possível trocar minhas pernas biológicas por pernas robóticas que poderiam correr a 160km/h. Por outro lado, é fisicamente impossível, para mim, correr mais rápido que a velocidade da luz. As leis da física proíbem qualquer objeto de acelerar a essa velocidade. Mas mesmo isso não é *logicamente* impossível. Não é uma contradição imaginar que as leis da física poderiam ter sido diferentes, e que elas poderiam ter permitido objetos a se moverem mais rápido que a luz.

Com qual tipo de modalidade a LM lida? *Todas elas!* A LM é uma ferramenta muito flexível. Começamos com um conjunto básico de regras que governam o $\Box$ e o $\Diamond$, e então adicionamos mais regras para se adequar ao tipo de modalidade em que estivermos interessados. De fato, a LM é tão flexível que nós nem ao menos precisamos pensar em $\Box$ e $\Diamond$ como expressando *necessidade* e *possibilidade*. Poderíamos, em vez disso, ler $\Box$ como expressando *demonstrabilidade [provability]*, de maneira que $\Box\mathscr{A}$ signifique *é demonstrável que* $\mathscr{A}$, e $\Diamond\mathscr{A}$ signifique *não é refutável que* $\mathscr{A}$. Similarmente, podemos interpretar $\Box$ como significando *S sabe que* $\mathscr{A}$ ou *S acredita que* $\mathscr{A}$. Ou poderíamos ler $\Box$ como expressando *obrigação moral*, de maneira que $\Box\mathscr{A}$ signifique *é moralmente obrigatório que* $\mathscr{A}$, e $\Diamond\mathscr{A}$ signifique *É moralmente permissível que* $\mathscr{A}$. Tudo o que precisaríamos fazer é preparar as regras corretas para estas diferentes leituras de $\Box$ e $\Diamond$.

Uma fórmula modal é uma que inclui operadores modais como $\Box$ e $\Diamond$. Dependendo da interpretação que for atribuída a $\Box$ e $\Diamond$, diferentes fórmulas modais serão demonstráveis ou válidas. Por exemplo, $\Box\mathscr{A} \rightarrow \Box A$ poderia dizer que "se $\mathscr{A}$ é necessário, então é verdadeiro," se $\Box$ fosse interpretado como necessidade. Pode expressar "se $\mathscr{A}$ é conhecido, então é verdadeiro," se $\Box$ expressar verdade conhecida. Sob ambas as interpretações, $\Box A \rightarrow \mathscr{A}$ é válido: Todas as proposições necessárias são verdadeiras aconteça o que acontecer, então são verdadeiras no mundo atual. E se uma proposição é sabida ser verdadeira, então ela tem que ser verdadeira (não se pode saber de algo que é falso.) Contudo, quando $\Box$ é interpretado como "acredita-se que" ou "deve [*it ought*] ser o caso que," $\Box\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A}$ não é válido: Podemos acreditar em proposições falsas. Nem toda proposição que deve ser verdadeira é de fato verdadeira, e.g., "Todo assassino deve ser levado à justiça". Isso *deve* ser verdadeiro, mas não é.

Consideraremos diferentes tipos de sistemas de LM. Eles diferem nas regras de prova permitidas, e na semântica que usamos para definir nossas noções lógicas. Os diferentes sistemas que consideraremos são chamados **K**, **T**, **S4**, e **S5**. **K** é o sistema básico; tudo que é válido ou demonstrável em **K** também é demonstrável nos outros. Mas há algumas coisas que **K** não prova, como a fórmula $\Box A \rightarrow A$. Então, **K** não é uma lógica modal apropriada para a necessidade e possibilidade (onde $\Box A \rightarrow A$ deveria ser demonstrável). Isso é demonstrável no sistema **T**, então **T** é mais apropriado quando lidamos com necessidade e possibilidade, mas menos apropriado quando lidamos com crença ou obrigação, uma vez que $\Box\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ *não* deveria ser (sempre) demonstrável. Talvez o melhor sistema de LM para necessidade e possibilidade, e em qualquer caso o mais amplamente aceito, seja o mais forte dos sistemas que consideraremos, o **S5**.

38.1 A linguagem da ML

Para fazermos lógica modal, temos que fazer duas coisas. Primeiro, queremos aprender como provar as coisas na LM. Segundo, queremos ver como construir interpretações para a LM. Mas antes que possamos fazer essas coisas, precisamos explicar como construir sentenças na LM.

A linguagem da LM é uma extensão da LVF. Poderíamos ter começado com a LPO, o que nos daria a lógica modal quantificada (LMQ). A LMQ é muito mais poderosa que a LM, mas também é muito, muito mais complicada. Então, vamos manter as coisas simples e começar com a LVF.

Assim como a LVF, a LM começa com um estoque infinito de *átomos*. Eles são escritos com letras maiúsculas, com ou sem subscrições numéricas: A, B, $\ldots A_1$, B_1, $\ldots$ Então, tomamos todas as regras sobre como fazer sentenças na LVF, e adicionamos duas mais para $\Box$ e $\Diamond$:

(1) Todo átomo da LM é uma sentença da LM.

(2) Se $\mathscr{A}$ é uma sentença da LM, então $\neg\mathscr{A}$ é uma sentença da LM.

(3) Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são sentenças da LM, então $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ é uma sentença da LM.

(4) Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são sentenças da LM, então $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ é uma sentença da LM.

(5) Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são sentenças da LM, então $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ é uma sentença da LM.

(6) Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são sentenças da LM, então $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ é uma sentença da LM.

(7) Se $\mathscr{A}$ é uma sentença da LM, então $\Box\mathscr{A}$ é uma sentença da LM.

(8) Se $\mathscr{A}$ é uma sentença da LM, então $\Diamond\mathscr{A}$ é uma sentença da LM.

(9) Nada mais é uma sentença da LM.

Aqui estão alguns exemplos de sentenças da LM:

$$A,\ P \lor Q,\ \Box A,\ C \lor \Box D,\ \Box\Box(A \to R),\ \Box\Diamond(S \land (Z \leftrightarrow (\Box W \lor \Diamond Q)))$$

CAPÍTULO 39

Dedução natural para LM

Agora que sabemos como fazer sentenças na LM, podemos ver como *provar* coisas na LM. Usaremos $\vdash$ para expressar demonstrabilidade [*provability*]. Então, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{C}$ significa que $\mathscr{C}$ pode ser provado a partir de $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$. Contudo, veremos um número de diferentes sistemas da LM, então será útil adicionar um subscrito para indicar o sistema em que estamos trabalhando. Então, por exemplo, se quisermos dizer que podemos provar $\mathscr{C}$ a partir de $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ *no sistema* **K**, escreveremos: $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$.

39.1 Sistema K

Começamos com um sistema particularmente simples chamado **K**, em honra ao filósofo e lógico Saul Kripke. **K** inclui todas as regras de dedução natural da LVF, incluindo as regras derivadas e as básicas. **K** então adiciona um tipo especial de subprova, mais duas regras básicas para $\Box$.

O tipo especial de subprova parece com uma subprova comum, exceto que ela tem um $\Box$ em sua linha de assunção em vez de uma fórmula. Podemos chamá-las de *subprovas estritas*—elas permitem raciocinar e provar coisas sobre possibilidades alternativas. O que podemos provar dentro de uma subprova estrita vale em qualquer possibilidade alternada, em particular, em possibilidades alternativas em que as assunções em vigor em nossa prova podem não valer. Em uma subprova estrita, todas as assunções são desconsideradas, e nós não temos permissão para apelar a quaisquer linhas fora da subprova estrita (exceto conforme permitido pelas regras modais dadas abaixo).

A regra $\Box$I nos permite derivar uma fórmula $\Box\mathscr{A}$ se pudermos derivar $\mathscr{A}$ dentro de uma subprova estrita. É o nosso método fundamental de introduzir $\Box$ em subprovas. A ideia básica é simples o suficiente: se $\mathscr{A}$ é um teorema, então $\Box\mathscr{A}$ deve ser um teorema também. (Lembre-se que chamar $\mathscr{A}$ de teorema é dizer que nós podemos provar $\mathscr{A}$ sem necessitar de qualquer assunção não eliminada.)

Suponha que você queira provar $\Box(A \rightarrow A)$. A primeira coisa que precisamos fazer é provar que $A \rightarrow A$ é um teorema. Você já sabe como fazer isso usando a LVF. Basta apresentar uma prova de $A \rightarrow A$ que não começa com qualquer premissa, assim:

1	A	
2	A	R 1
3	$A \rightarrow A$	$\rightarrow$I 1–2

Mas, para aplicar $\Box$I, precisamos provar a fórmula dentro de uma subprova estrita. Uma vez que nossa prova de $A \rightarrow A$ não faz o uso de qualquer assunção, isso é possível.

1	$\Box$	
2	A	
3	A	R 2
4	$A \rightarrow A$	$\rightarrow$I 2–3
5	$\Box(A \rightarrow A)$	$\Box$I 1–4

$$\begin{array}{r|l}
m & \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} \\
n & \begin{array}{|l} \mathscr{A} \end{array} \\
 & \Box\mathscr{A} \qquad \Box\text{I } m\text{–}n
\end{array}$$

Nenhuma linha acima m pode ser citada por qualquer regra dentro da subprova estrita que começou na linha m a menos que a regra explicitamente permita isso.

É essencial enfatizar que na subprova estrita você não pode usar qualquer regra que apela a qualquer coisa que você provou fora da subprova estrita. Há exceções, e.g., a regra □E abaixo. Estas regras vão explicitamente dizer que elas podem ser usadas dentro de subprovas estritas e citar linhas fora da subprova estrita. Esta restrição é essencial, do contrário teríamos resultados terríveis. Por exemplo, poderíamos oferecer a seguinte prova para justificar $A \therefore \Box A$:

$$\begin{array}{r|l l}
1 & A & \\ \hline
2 & \quad \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} & \\
3 & \quad \begin{array}{|l} A \end{array} & \text{uso incorreto de R 1} \\
4 & \Box A & \Box\text{I 2–3}
\end{array}$$

Esta não é uma prova legítima, porque na linha 3 nós apelamos para a linha 1, mesmo apesar de a linha 1 vir antes do começo da subprova estrita da linha 2.

Dissemos anteriormente que uma subprova estrita nos permite raciocinar sobre situações possíveis alternativas arbitrárias. O que pode ser provado em uma subprova é válido em todas as situações possíveis alternativas, e o mesmo vale para a necessidade. É esta a ideia por trás da regra □I. Por outro lado, se nós assumimos que algo é necessário, nós assumimos, com isso, que isso é verdadeiro em todas as situações possíveis alternativas.

$$\begin{array}{r|l|l}
m & \Box\mathscr{A} & \\
 & \quad \Box & \\
n & \quad \mathscr{A} & \Box\text{E } m
\end{array}$$

□E pode ser aplicada apenas se a linha *m* (contendo □*A*) está *fora* da subprova estrita em que a linha *n* está, e esta subprova estrita não faz ela própria parte da subprova estrita que não contém *m*.

□E te permite asserir $\mathscr{A}$ dentro de uma subprova estrita se você tiver $\Box\mathscr{A}$ fora da subprova estrita. A restrição significa que você só pode fazer isso na primeira subprova, você não pode aplicar a regra □E dentro de uma subprova estrita aninhada. O seguinte não é permitido:

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & \Box\mathscr{A} & \\
2 & \quad \Box & \\
3 & \quad\quad \Box & \\
4 & \quad\quad \mathscr{A} & \text{uso incorreto de } \Box\text{E } 1
\end{array}$$

O uso incorreto de □E na linha 4 viola a condição, porque apesar de a linha 1 estar fora da subprova estrita em que a linha 4 está, a subprova estrita contendo a linha 4 está dento da subprova estrita que começa na linha 2, que não contém a linha 1.

Comecemos com um exemplo.

1	$\Box A$	
2	$\Box B$	
3	$\vert\ \Box$	
4	$\vert\ A$	$\Box$E 1
5	$\vert\ B$	$\Box$E 2
6	$\vert\ A \land B$	$\land$I 4, 5
7	$\Box(A \land B)$	$\Box$I 3–7

Podemos também misturar subprovas regulares e subprovas estritas:

1	$\Box(A \to B)$	
2	$\vert\ \Box A$	
3	$\vert\ \vert\ \Box$	
4	$\vert\ \vert\ A$	$\Box$E m
5	$\vert\ \vert\ A \to B$	$\Box$E 1
6	$\vert\ \vert\ B$	$\to$E 4, 5
7	$\vert\ \Box B$	
8	$\Box A \to \Box B$	$\to$I 2–7

Isso é chamado de *Regra da Distribuição*, porque ela diz que $\Box$ 'distribui' sobre →.

As regras $\Box$I e $\Box$E parecem simples o suficiente, e de fato **K** é um sistema muito simples! Mas **K** é mais poderoso do que você pode ter pensado. Você pode provar algumas coisas nele.

39.2 Possibilidade

Na última subseção, vimos todas as regras básicas para **K**. Mas você pode ter percebido que todas essas regras são sobre necessidade, $\Box$, e nenhuma delas é sobre possibilidade, $\Diamond$. Isso ocorre porque podemos *definir* possibilidade em termos de necessidade:

$$\Diamond\mathscr{A} =_{df} \neg\Box\neg\mathscr{A}$$

Em outras palavras, dizer que $\mathscr{A}$ é *possivelmente verdadeiro* é dizer que $\mathscr{A}$ *não é necessariamente falso.*

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Box\neg\mathscr{A} & \\ & \Diamond\mathscr{A} & \text{Def}\Diamond\ m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Diamond\mathscr{A} & \\ & \neg\Box\neg\mathscr{A} & \text{Def}\Diamond\ m \end{array}$$

Importante, você não deveria pensar nessas regras como qualquer adição real a **K**: elas apenas lembram como o $\Diamond$ é definido em termos de $\Box$.

Se quiséssemos, poderíamos deixar nossas regras para **K** aqui. Mas seria útil adicionar algumas regras de *Conversão Modal*, que nos dão mais alguns meios de alternar entre $\Box$ e $\Diamond$:

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Box\mathscr{A} & \\ & \Diamond\neg\mathscr{A} & \text{MC } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Diamond\neg\mathscr{A} & \\ & \neg\Box\mathscr{A} & \text{MC } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\Diamond\mathscr{A} & \\ & \Box\neg\mathscr{A} & \text{MC } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \Box\neg\mathscr{A} & \\ & \neg\Diamond\mathscr{A} & \text{MC } m \end{array}$$

Estas regras de Conversão Modal também não são uma adição ao poder de **K**, porque elas podem ser derivadas das regras básicas, junto com a definição de $\Diamond$.

No sistema **K**, usando Def$\Diamond$ (ou as regras de conversão modal), alguém pode provar $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$. Ao projetar o sistema **K**, começamos com $\Box$ como nosso símbolo modal primitivo, e então definimos $\Diamond$ em termos dele. Mas se tivéssemos preferido, poderíamos ter começado com $\Diamond$ como nosso primitivo, e então definido $\Box$ como se segue: $\Box\mathscr{A} =_{df} \neg\Diamond\neg\mathscr{A}$. Não há, então, qualquer sentido em que a necessidade é de alguma maneira mais *fundamental* que a possibilidade. Necessidade e possibilidade são noções exatamente tão fundamentais quanto as outras.

39.3 Sistema T

Até então, focamos em **K**, que é uma ferramenta modal muito simples. **K** é tão fraco que ele nem mesmo nos deixa provar $\mathscr{A}$ a partir de $\Box\mathscr{A}$. Mas se estivermos pensando em $\Box$ como expressando *necessidade*, então quereremos poder fazer a seguinte inferência: se $\mathscr{A}$ é *necessariamente verdadeiro*, então certamente deve ser *verdadeiro*!

Isso nos leva a um novo sistema, **T**, que obtemos ao adicionar a seguinte regra a **K**:

m	$\Box\mathscr{A}$	
n	$\mathscr{A}$	RT m

A linha n, onde a regra RT é aplicada, *não* pode estar em uma subprova estrita que começa depois da linha m.

A restrição na regra **T** é de certa forma o oposto da restrição em $\Box$E: você pode *apenas* usar $\Box$E em uma subprova estrita aninhada, mas você não pode usar **T** em uma subprova estrita aninhada.

Podemos provar coisas em **T** que não poderíamos provar em **K**, e.g., $\Box A \rightarrow A$.

39.4 Sistema S4

T nos permite eliminar as caixas de necessidade: de $\Box\mathscr{A}$, pode-se inferir $\mathscr{A}$. Mas e se quiséssemos adicionar caixas extras? Isto é, e se quiséssemos ir de $\Box\mathscr{A}$ até $\Box\Box\mathscr{A}$? Bem, isso não seria um problema, se tivermos provado $\Box\mathscr{A}$ ao aplicar $\Box$I a uma subprova estrita de $\mathscr{A}$, que não usa $\Box$E. Nesse caso, $\mathscr{A}$ é uma tautologia, e ao aninhar uma subprova estrita dentro de outra subprova estrita e aplicar $\Box$I novamente, podemos provar $\Box\Box\mathscr{A}$. Por exemplo, poderíamos provar $\Box\Box(P \rightarrow P)$ assim:

1	$\Box$	
2	$\Box$	
3	P	
4	P	R 3
5	$P \rightarrow P$	$\rightarrow$I 3–4
6	$\Box(P \rightarrow P)$	$\Box$I 2–5
7	$\Box\Box(P \rightarrow P)$	$\Box$I 1–6

Mas e se nós não provássemos $\Box\mathscr{A}$ desse jeito restrito, mas usássemos $\Box$E dentro da subprova estrita de $\mathscr{A}$? Se colocarmos aquela subprova estrita dentro de outra subprova estrita, então os requerimentos da regra $\Box$E, de não citar uma linha contendo $\Box\mathscr{A}$ que está em outra subprova estrita que ainda não foi concluída, são violados. Ou, e se $\Box\mathscr{A}$ fosse apenas uma assunção com a qual começamos nossa prova? Poderíamos então inferir $\Box\Box\mathscr{A}$? Não em **T**, não podemos. E isso pode parecer para você uma limitação de **T**, pelo menos se estivermos lendo o $\Box$ como expressando *necessidade*. Parece intuitivo que se $\mathscr{A}$ for necessariamente verdadeiro, então não poderia *falhar* em ser necessariamente verdadeiro.

Isso nos leva a outro novo sistema, **S4**, que obtemos ao adicionar a seguinte regra a **T**:

$$\begin{array}{r|l l}
m & \Box\mathscr{A} & \\
 & \quad\vert\ \Box & \\
 & \quad\vert\overline{\phantom{\Box\mathscr{A}}} & \\
n & \quad\vert\ \Box\mathscr{A} & \text{R}\mathbf{4}\ m
\end{array}$$

Note que R**4** pode apenas ser aplicada se a linha m (contendo $\Box A$) estiver fora da subprova estrita em que a linha n está, e esta subprova estrita não é ela própria parte de uma subprova estrita não contendo n.

A regra R**4** se parece com $\Box$E, exceto pelo fato de que em vez de produzir $\mathscr{A}$ a partir de $\Box\mathscr{A}$, ela produz $\Box\mathscr{A}$ dentro de uma subprova estrita. A restrição é a mesma, porém: R**4** nos permite "importar" $\Box\mathscr{A}$ em uma subprova estrita, mas não em uma subprova estrita que esteja aninhada dentro de uma subprova estrita. Contudo, se isso é necessário, uma aplicação adicional de R**4** teria o mesmo resultado.

Agora, podemos provar ainda mais resultados. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l l}
1 & \quad\vert\ \Box A & \\
 & \quad\vert\overline{} & \\
2 & \quad\vert\quad\vert\ \Box & \\
 & \quad\vert\quad\vert\overline{} & \\
3 & \quad\vert\quad\vert\ \Box A & \text{R}\mathbf{4}\ 1 \\
4 & \quad\vert\ \Box\Box A & \Box\text{I } 2\text{–}3 \\
5 & \Box A \rightarrow \Box\Box A & \rightarrow\text{I } 1\text{–}6
\end{array}$$

De maneira similar, podemos provar $\Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A$. Isso nos mostra que assim como nos deixa *adicionar caixas* extras, **S4** nos deixa *deletar diamantes* extras: de $\Diamond\Diamond\mathscr{A}$, pode-se sempre inferir $\Diamond\mathscr{A}$.

39.5 Sistema S5

Em **S4**, podemos sempre adicionar uma caixa em frente de outra caixa. Mas **S4** não nos deixa automaticamente adicionar uma caixa em frente de um *diamante*. Ou seja, **S4** geralmente não permite a inferência de $\Diamond\mathscr{A}$ para $\Box\Diamond\mathscr{A}$. Mas, novamente, isso pode parecer uma deficiência, pelo menos se você está lendo $\Box$ e $\Diamond$ como expressando *necessidade* e *possibilidade*. Parece intuitivo que se $\mathscr{A}$ é possivelmente verdadeiro, então ela não poderia ter *falhado* em ser possivelmente verdadeiro.

Isso nos leva ao nosso sistema modal final, **S5**, que obtemos ao adicionar a seguinte regra a **S4**:

$$\begin{array}{r|l l} m & \neg\Box\mathscr{A} & \\ & \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \end{array} & \\ n & \begin{array}{|l} \neg\Box\mathscr{A} \end{array} & \text{R5 } m \end{array}$$

A regra **R5** pode ser aplicada apenas se a linha m (contnedo $\neg\Box\mathscr{A}$) estiver fora da subprova estrita em que a linha n está, e esta subprova estrita não é ela própria parte de uma subprova estrita não contendo a linha m.

Esta regra nos permite mostrar, por exemplo, que $\Diamond\Box A \vdash_{\mathbf{S5}} \Box A$:

1	$\Diamond\Box A$	
2	$\neg\Box\neg\Box A$	Def$\Diamond$ 1
3	$\vert\ \neg\Box A$	
4	$\vert\ \vert\ \Box$	
5	$\vert\ \vert\ \neg\Box A$	R**5** 3
6	$\vert\ \Box\neg\Box A$	$\Box$I 4–5
7	$\vert\ \bot$	$\neg$E 2, 6
8	$\Box A$	IP 3–7

Então, assim como adicionar caixas em frente de diamantes, também podemos deletar diamantes em frente de caixas.

Obtemos **S5** apenas adicionando a regra R**5** a **S4**. De fato, poderíamos ter adicionado a regra R**5** a **T** sozinho, e deixado de fora a regra R**4**). Tudo que podemos provar com a regra R**4** também pode ser provado usando R**T** junto com R**5**. Por exemplo, aqui está uma prova que mostra $\Box A \vdash_{\mathbf{S5}} \Box\Box A$ sem usar R**4**:

1	│ $\Box A$	
2	│ │ $\Box\neg\Box A$	
3	│ │ $\neg\Box A$	R**T** 2
4	│ │ $\bot$	¬E 1, 3
5	│ $\neg\Box\neg\Box A$	¬I 2–4
6	│ │ $\Box$	
7	│ │ │ $\neg\Box A$	
8	│ │ │ │ $\Box$	
9	│ │ │ │ $\neg\Box A$	R**5** 7
10	│ │ │ $\Box\neg\Box A$	□I 8–9
11	│ │ │ $\neg\Box\neg\Box A$	R**5** 5
12	│ │ │ $\bot$	¬E 10, 11
13	│ │ $\Box A$	IP 7–12
14	│ $\Box\Box A$	□I 6–13

S5 é *estritamente mais forte* que **S4**: há coisas que podem ser provadas em **S5**, mas não em **S4** (e.g., $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$).

O ponto importante sobre **S5** pode ser colocado assim: se você tem uma longa cadeia de caixas e diamantes, em qualquer combinação, você pode deletar todas exceto a última delas. Então, por exemplo, $\Diamond\Box\Diamond\Diamond\Box\Box\Diamond\Box A$ pode ser simplificado a apenas $\Box A$.

Exercícios Práticos

A. Forneça provas para o seguinte:

1. $\Box(A \wedge B) \vdash_{\mathbf{K}} \Box A \wedge \Box B$
2. $\Box A \wedge \Box B \vdash_{\mathbf{K}} \Box(A \wedge B)$
3. $\Box A \vee \Box B \vdash_{\mathbf{K}} \Box(A \vee B)$

4. $\Box(A \leftrightarrow B) \vdash_{\mathbf{K}} \Box A \leftrightarrow \Box B$

B. Forneça provas para o seguinte (sem usar Conversão Modal!):

1. $\neg\Box A \vdash_{\mathbf{K}} \Diamond\neg A$
2. $\Diamond\neg A \vdash_{\mathbf{K}} \neg\Box A$
3. $\neg\Diamond A \vdash_{\mathbf{K}} \Box\neg A$
4. $\Box\neg A \vdash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond A$

C. Forneça provas para o seguinte (e agora sinta-se livre para usar Conversão Modal!):

1. $\Box(A \rightarrow B), \Diamond A \vdash_{\mathbf{K}} \Diamond B$
2. $\Box A \vdash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond\neg A$
3. $\neg\Diamond\neg A \vdash_{\mathbf{K}} \Box A$

D. Forneça provas para o seguinte:

1. $P \vdash_{\mathbf{T}} \Diamond P$
2. $\vdash_{\mathbf{T}} (A \wedge B) \vee (\neg\Box A \vee \neg\Box B)$

E. Forneça provas para o seguinte:

1. $\Box(\Box A \rightarrow B), \Box(\Box B \rightarrow C), \Box A \vdash_{\mathbf{S4}} \Box\Box C$
2. $\Box A \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\Box A \vee B)$
3. $\Diamond\Diamond A \vdash_{\mathbf{S4}} \Diamond A$

F. Forneça provas em **S5** para o seguinte:

1. $\neg\Box\neg A, \Diamond B \vdash_{\mathbf{S5}} \Box(\Diamond A \wedge \Diamond B)$
2. $A \vdash_{\mathbf{S5}} \Box\Diamond A$
3. $\Diamond\Diamond A \vdash_{\mathbf{S5}} \Diamond A$

CAPÍTULO 40

Semântica para LM

Até então, focamos em estabelecer vários sistemas de dedução natural para a LM. Agora, veremos a *semântica* para a LM. Uma semântica para uma linguagem é um método para atribuir valores verdade a sentenças dessa linguagem. Então, uma semântica para a LM é um método para atribuir valores verdade a sentenças da LM.

40.1 Interpretações da LM

A grande ideia por trás da semântica da LM é essa. Na LM, sentenças não são apenas verdadeiras ou falsas e ponto final. Uma sentença é verdadeira ou falsa *em um dado mundo possível*, e uma mesma sentença pode ser verdadeira em alguns mundos e falsa em outros. Dizemos, então, que $\Box\mathscr{A}$ é verdadeiro sse $\mathscr{A}$ é verdadeiro em *todo* mundo, e $\Diamond\mathscr{A}$ é verdadeiro sse $\mathscr{A}$ é verdadeiro em *algum* mundo.

Essa é a grande ideia, mas precisamos refiná-la e torná-la mais precisa. Para fazer isso, precisamos introduzir a ideia de *interpretação* da LM. A primeira coisa que você precisa incluir em uma interpretação é uma coleção de *mundos possíveis*. Agora, a essa altura você poderia perguntar: O que exatamente é um mundo possível? A ideia intuitiva é que um mundo possível é outra maneira que esse mundo poderia ter sido. Mas o que exatamente isso significa? Essa é uma excelente questão filosófica, e nós a veremos com muitos detalhes mais tarde. Mas não precisamos nos preocupar muito sobre isso agora. No que diz respeito a lógica formal, mundos possíveis podem ser qualquer coisa que você quiser. Tudo o que importa é que você forneça cada interpretação com uma coleção não vazia de coisas classificadas como MUNDOS POSSÍVEIS.

Uma vez que você escolheu sua coleção de mundos possíveis, você precisa encontrar alguma forma de deteminar quais sentenças da LM são verdadeiras em quais mundos possíveis. Para fazer isso, precisamos introduzir a noção de *função de valoração*. Aqueles que estudaram algo de matemática já estarão familiares com a ideia geral de uma função. Mas para aqueles que não estudaram, uma função é uma netidade matemática que mapeia argumentos a valores. Isso pode soar um pouco abstrato, mas alguns exemplos familiares ajudarão. Considere a função $x + 1$. Essa é uma função que toma um número como argumento e então retorna o próximo número como valor. Então, se você introduzir o número 1 como argumento, a função $x+1$ retornará o número 2 como valor; se você introduzir 2 como argumento, ela retornará 3; se você introduzir 3, ela retornará 4 . . . Ou, aqui está outro exemplo: a função $x + y$. Dessa vez, você deve introduzir dois argumentos nessa função se você quiser que ela retorne um valor: se você introduzir 2 e 3 como argumentos, ela retornará 5; se você introduzir 1003 e 2005, ela retornará 3008; e assim por diante.

Uma função de valoração para a LM toma uma sentença e um mundo como seus argumentos, e então retorna um valor verdade como valor. Então, se ν é uma função de valoração e w é um mundo possível, $\nu_w(\mathscr{A})$ é o valor verdade que ν mapeia a $\mathscr{A}$ e w: se $\nu_w(\mathscr{A}) = F$, então $\mathscr{A}$ é falso no mundo w na valoração ν; se $\nu_w(\mathscr{A}) = T$, então $\mathscr{A}$ é verdadeiro w na valoração ν.

Essas funções de valoração podem mapear qualquer sentença *atômica* a qualquer valor verdade em qualquer mundo. Mas há algumas regras sobre quais valores verdade sentenças mais complexas obtêm em um mundo. Aqui estão as regras para os conectivos da LVF:

(1) $\nu_w(\neg\mathscr{A}) = T$ sse: $\nu_w(\mathscr{A}) = F$

(2) $\nu_w(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) = T$ sse: $\nu_w(\mathscr{A}) = T$ e $\nu_w(\mathscr{B}) = T$

(3) $\nu_w(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) = T$ sse: $\nu_w(\mathscr{A}) = T$ ou $\nu_w(\mathscr{B}) = T$, ou ambos

(4) $\nu_w(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) = T$ sse: $\nu_w(\mathscr{A}) = F$ ou $\nu_w(\mathscr{B}) = T$, ou ambos

(5) $v_w(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) = T$ sse: $v_w(\mathscr{A}) = T$ and $v_w(\mathscr{B}) = T$, ou $v_w(\mathscr{A}) = F$ e $v_w(\mathscr{B}) = F$

Até então, essas regras devem ser todas bem familiares. Essencialmente, elas funcionam exatamente como as tabelas verdade para LVF. A única diferença é que essas regras de tabelas verdade devem ser aplicadas repetidamente, em um mundo de cada vez.

Mas quais são as regras para os novos operadores modais, $\Box$ e $\Diamond$? A ideia mais óbvia seria a de dar regras como essas:

$$v_w(\Box\mathscr{A}) = T \text{ sse } \forall w'(v_{w'}(\mathscr{A}) = T)$$

$$v_w(\Diamond\mathscr{A}) = T \text{ sse } \exists w'(v_{w'}(\mathscr{A}) = T)$$

Esta é apenas a maneira formal chique de escrever a ideia de que $\Box\mathscr{A}$ é verdadeiro em w só no caso de $\mathscr{A}$ ser verdadeiro em *todo* mundo, e $\Diamond\mathscr{A}$ é verdadeiro em w só no caso de $\mathscr{A}$ ser verdadeiro em *algum* mundo.

Contudo, apesar de essas regras serem legais e simples, elas não são tão úteis quando gostaríamos. Como mencionamos, a LM deve ser uma ferramenta bem flexível. Ela deve ser uma estrutura geral para lidar com vários de diferentes tipos de necessidade. Como resultado, queremos que nossas regras semânticas para $\Box$ e $\Diamond$ sejam um pouco menos rígidas. Podemos fazer isso ao introduzir outra nova ideia: *relações de acessibilidade.*

Uma relação de acessibilidade, R, é uma relação entre mundos possíveis. Grosseiramente, dizer que Rw_1w_2 (em português: o mundo w_1 *acessa* o mundo w_2) é dizer que w_2 é possível *relativo a* w_1. Em outras palavras, ao introduzir relações de acessibilidade, nós tornamos possível a ideia de que um dado mundo pode ser possível relativo a alguns mundos, mas não a outros. Ela se torna uma ideia *muito* frutífera ao se estudar sistemas modais. Podemos agora dar as seguintes regras semânticas para $\Box$ e $\Diamond$:

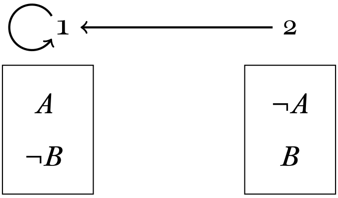
(6) $v_{w_1}(\Box\mathscr{A}) = T$ e $\forall w_2(Rw_1w_2 \rightarrow v_{w_2}(\mathscr{A}) = T)$

(7) $v_{w_1}(\Diamond\mathscr{A}) = T$ e $\exists w_2(Rw_1w_2 \wedge v_{w_2}(\mathscr{A}) = T)$

Ou, em português simples: $\Box\mathscr{A}$ é verdadeiro no mundo w_1 sse $\mathscr{A}$ é verdadeiro em todo mundo que é possível relativo a w_1; e $\Diamond\mathscr{A}$ é verdadeiro no mundo w_1 sse $\mathscr{A}$ é verdadeiro em algum mundo que é possível relativo a w_1.

Então, aí está. Uma interpretação para a LM consiste em três coisas: uma coleção de mundos possíveis, W; uma relação de acessibilidade, R; e uma função valoração, ν. A coleção de 'mundos possíveis' pode realmente ser uma coleção de qualquer coisa que você quiser. Realmente não importa, contanto que W não seja vazio. (Para muitos propósitos, é útil apenas tomar uma coleção de números para ser sua coleção de mundos possíveis). E, para agora, pelo menos, R pode ser qualquer relação entre mundos em W que você quiser. Poderia ser uma relação que todo mundo em W teria com todo mundo em W, ou uma que nenhum mundo teria com nenhum mundo, ou qualquer coisa entre os dois. E, por fim, ν pode mapear qualquer sentença atômica da LM a qualquer valor verdade em qualquer mundo. Tudo o que importa é que ele siga as regras (1)–(7) quando se trata de frases mais complexas.

Vamos ver um exemplo. É frequentemente útil apresentar interpretações da LM como diagramas, como este:



Aqui está como ler a interpretação desse diagrama. Ele contém apenas dois mundos, 1 e 2; As setas entre os mundos indicam a relação de acessibilidade. Então 1 e 2 ambos acessam 1, mas nem 1 nem 2 acessam 2. As caixas em cada mundo nos deixam saber quais sentenças atômicas são verdadeiras em cada mundo: A é verdadeira em 1, mas falsa em 2; B é falsa em 1, mas verdadeira em 2. Você pode apenas escrever uma sentença atômica ou a negação de uma sentença atômica dentro de uma dessas caixas. Podemos descobrir qual valor verdade as sentenças mais complexas obtêm em cada mundo a partir disso. Por exemplo, nessa interpretação, todas as seguintes sentenças são verdadeiras em w_1:

$$A \wedge \neg B,\ B \rightarrow A,\ \Diamond A,\ \Box\neg B$$

Se você não gosta de pensar diagramaticamente, então você pode também apresentar uma interpretação assim:

W: 1,2

R: $\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle$

$$v_1(A) = T, v_2(B) = F, v_2(A) = F, v_2(B) = T$$

Você terá a chance de elaborar algumas interpretações próprias em breve, quando começarmos a olhar para *contra-interpretações*.

40.2 Uma semântica para o sistema K

Podemos agora estender todos os nossos conceitos semânticos da LVF para cobrir a LM:

- $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ é MODALMENTE VÁLIDA sse não há um mundo, em qualquer intepretação, em que $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ são todas verdadeiros e $\mathscr{C}$ é falso.
- $\mathscr{A}$ é uma VERDADE MODAL sse $\mathscr{A}$ é verdadeiro em todo mundo, em toda interpretação.
- $\mathscr{A}$ é uma CONTRADIÇÃO MODAL sse $\mathscr{A}$ é falso em todo mundo, em toda interpretação.
- $\mathscr{A}$ é MODALMENTE SATISFATÍVEL sse $\mathscr{A}$ é verdadeiro em algum mundo, em alguma interpretação.

(A partir de agora, abandonaremos as qualificações ‘modais’, pois elas podem ser tomadas como lidas)

Podemos também estender nosso uso de $\vDash$. Contudo, precisamos adicionar subscritos novamente, assim como fizemos com $\vdash$. Então, quando quisermos dizer que $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \therefore \mathscr{C}$ é válido, escreveremos: $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$.

Vamos entender melhor essa semântica, apresentando algumas contra-interpretações. Considere o seguinte enunciado (falso):

$$\neg A \vDash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond A$$

Para apresentar uma contra-interpretação a este enunciado, precisamos estabelecer uma interpretação que torna $\neg A$ verdadeiro em algum mundo w, e $\neg\Diamond A$ falso em w. Aqui está uma de tais interpretações, apresentadas diagramaticamente:

É fácil ver que isso funciona como uma contra-interpretação para nosso enunciado. Primeiro, $\neg A$ é verdadeiro no mundo 1. E segundo, $\neg\Diamond A$ é falso em 1: A é verdadeiro em 2, e 2 é acessível a partir de 1. Então, há alguns mundos nessa interpretação em que $\neg A$ é verdadeiro e $\neg\Diamond A$ é falso, então não é o caso que $\neg A \vDash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond A$.

Por que escolhemos o subscrito **K**? Bem, acontece que há uma relação importante entre o sistema **K** e a definição de validade que acabamos de dar; Em particular, temos os dois seguintes resultados:

- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$
- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{K}} \mathscr{C}$

O primeiro resultado é conhecido como *correção*, uma vez que ele nos diz que as regras de **K** são regras boas e corretas: se você pode justificar um argumento ao fornecer uma prova para ele usando o sistema **K**, então esse argumento é realmente válido. O segundo resultado é conhecido como *completude*, uma vez que ele nos diz que as regras de **K** são gerais o suficiente para capturar todos os argumentos válidos: se um argumento é válido, então será possível oferecer uma prova em **K** que o justifique.

Agora, uma coisa é enunciar esses resultados, outra é prová-los. Contudo, não tentaremos prová-los aqui. Mas a ideia por trás da prova de correção talvez deixará mais claro como as subprovas estritas funcionam.

Em uma subprova estrita, não temos permissão para fazer uso de qualquer informação de fora da subprova estrita, exceto o que importamos da subprova estrita usando $\Box$E. Se assumimos ou provamos $\Box\mathscr{A}$, por $\Box$E, podemos usar $\mathscr{A}$ dentro de uma subprova estrita. E em **K**, essa é a única forma de importar uma fórmula para dentro de uma subprova estrita. Então, tudo que pode ser provado dentro de uma subprova estrita deve se seguir de fórmulas $\mathscr{A}$, onde fora da subprova estrita nós temos $\Box\mathscr{A}$. Imaginemos que estamos raciocinando sobre o que é verdadeiro em um mundo possível em alguma interpretação. Se soubermos que $\Box\mathscr{A}$ é verdadeiro nesse mundo possível, nós sabemos que $\mathscr{A}$ é verdadeiro em todos os mundos acessíveis. Então, tudo que for provado dentro de uma subprova estrita é verdadeiro em todos os mundos possíveis acessíveis. Esse é o motivo de $\Box$I ser uma regra correta.

40.3 Uma semântica para o sistema T

Há alguns momentos, dissemos que o sistema **K** é correto e completo. Onde isso leva os outros sistemas modais que vimos, a saber, **T**, **S4** e **S5**? Bem, eles são todos *incorretos [unsound]*, relativo a definição de validade que demos acima. Por exemplo, todos esses sistemas nos permitem inferir A de $\Box A$, mesmo se $\Box A \nvDash_{\mathbf{K}} A$

Isso quer dizer que esses sistemas são uma perda de tempo? De forma alguma! Esses sistemas são apenas incorretos [*unsound*] *relativamente à definição de validade dada acima.* (Ou, para usar outros símbolos, eles são incorretos relativo a $\vDash_{\mathbf{K}}$.) Então, quando estamos lidando com esses sistemas modais mais fortes, precisamos apenas modificar nossa definição de validade para se encaixar. É aí onde as relações de acessibilidade são bem úteis.

Quando introduzimos a ideia de uma relação de acessibilidade, dissemos que ela poderia ser qualquer relação entre mundos que você quiser: você poderia tê-la relacionando todo mundo a todo mundo, nenhum mundo a nenhum mundo, ou qualquer coisa entre isso. É assim que estávamos pensando em relações de acessibilidade em nossa definição de $\vDash_{\mathbf{K}}$. Mas, se quiséssemos, poderíamos começar a colocar algumas restrições à relação de acessibilidade. Em particular, poderíamos insistir que ela tem que ser *reflexiva*:

▹ $\forall wRww$

Em português: todo mundo acessa a si mesmo. Ou, em termos de possibilidade relativa: todo mundo é possível relativo a si mesmo. Se impudéssemos esta restrição, poderíamos introduzir uma nova relação de consequência, $\vDash_{\mathbf{T}}$, como se segue:

$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$ sse não há um mundo possível *que tem uma relação de acessibilidade reflexiva*, em qualquer interpretação, em que $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ são todos verdadeiros e $\mathscr{C}$ é falso

Nós anexamos o subscrito **T** a $\vDash$ porque o sistema **T** é correto e completo relativo a essa nova definição de validade:

- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$
- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{T}} \mathscr{C}$

Como antes, não tentarmos provar esses resultados de correção e completude. Contudo, é relativamente fácil ver o quão é necessário que a relação de acessibilidade seja reflexiva para que a regra **RT** seja justificada:

$$\begin{array}{r|ll} m & \Box\mathscr{A} & \\ & \mathscr{A} & \quad \textbf{RT}\ m \end{array}$$

Para ver isso, apenas imagine tentando encontrar uma contra-interpretação para esta afirmação:

$$\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{T}} \mathscr{A}$$

Precisaríamos construir um mundo, w, em que $\Box\mathscr{A}$ fosse verdadeiro, mas $\mathscr{A}$ fosse falso. Agora, se $\Box\mathscr{A}$ é verdadeiro em w, então $\mathscr{A}$ deve ser verdadeiro em todo mundo que w acessa. Mas, uma vez que a relação de acessibilidade é reflexiva, w acessa w. Então, $\mathscr{A}$ deve ser verdadeiro em w. Mas, agora, $\mathscr{A}$ deve ser verdadeiro *e* falso em w. Contradição!

40.4 Uma semântica para S4

De que outra maneira poderíamos ajustar nossa definição de validade? Bem, poderíamos também estipular que a relação de acessibilidade deve ser *transitiva*:

- $\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3((Rw_1w_2 \wedge Rw_2w_3) \rightarrow Rw_1w_3)$

Em português: se w_1 acessa w_2, e w_2 acessa w_3, então w_1 acessa w_3. Ou, em termos de possibilidade relativa: se w_3 é possível relativo a w_2, e w_2 é possível relativo a w_1, então w_3 é possível relativo a w_1. Se adicionarmos esta restrição à nossa relação de acessibilidade, poderemos introduzir uma nova relação de consequência, $\vDash_{\mathbf{S4}}$, como se segue:

$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$ sse não há um mundo *que tem uma relação de acessibilidade reflexiva e transitiva*, em nenhuma interpretação, em que $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ são todos verdadeiros e $\mathscr{C}$ é falso

Nós anexamos o subscrito **S4** ao $\vDash$ porque o sistema **S4** é completo e consistente relativo a essa nova definição de validade:

- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$
- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S4}} \mathscr{C}$

Como antes, não tentarmos provar esses resultados de correção e completude. Contudo, é relativamente fácil ver o quão é necessário que a relação de acessibilidade seja transitiva para que a regra R**S4** seja justificada:

$$\begin{array}{r|l} m & \Box\mathscr{A} \\ & \begin{array}{|l} \Box \\ \hline \Box\mathscr{A} \qquad \mathrm{R}\mathbf{4}\ m \end{array} \end{array}$$

A ideia por trás de subprovas estritas, lembre-se, é que elas são formas de provar coisas que devem ser verdadeiras em todos os mundos acessíveis. Então, a regra R**4** significa que sempre que $\Box\mathscr{A}$ for verdadeiro, $\Box\mathscr{A}$ deve também ser verdadeiro em todo mundo acessível. Em outras palavras, devemos ter $\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{S4}} \Box\Box\mathscr{A}$

Para ver isso, apenas imagine tentando encontrar uma contra-interpretação para esta afirmação:

$$\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{S4}} \Box\Box\mathscr{A}$$

Precisaríamos construir um mundo, w_1, em que $\Box\mathscr{A}$ fosse verdadeiro, mas $\Box\Box\mathscr{A}$ fosse falso. Agora, se $\Box\Box\mathscr{A}$ é falso em w_1, então w_1 deve acessar algum mundo, w_2, em que $\Box\mathscr{A}$ é falso. Da mesma forma, se $\Box\mathscr{A}$ é falso em w_2, então w_2 deve acessar algum mundo, w_3, em que $\mathscr{A}$ é falso. Acabamos de dizer que w_1 acessa w_2, e w_2 acessa w_3. Então, uma vez que estamos agora insistindo que a relação de acessibilidade é transitiva, w_1 acessa w_3. E, como $\Box\mathscr{A}$ é verdadeiro em w_1, e w_3 é acessível a w_1, segue-se que $\mathscr{A}$ deve ser verdadeiro em w_3. Emtão, $\mathscr{A}$ é verdadeiro *e* falso em w_3. Contradição!

40.5 Uma semântica para S5

Vamos colocar mais uma restrição à relação de acessibilidade. Dessa vez, vamos insistir que ela deva também ser *simétrica*:

- $\forall w_1 \forall w_2 (Rw_1w_2 \rightarrow Rw_2w_1)$

Em português: se w_1 acessa w_2, então w_2 acessa w_1. Ou, em termos de possibilidade relativa: se w_2 é possível relativo a w_1, então w_1 é possível relativo a w_2. Os lógicos chamam que é reflexiva, simétrica e transitiva de relação de *equivalência*. Podemos agora definir uma nova relação de consequência, $\vDash_{\mathbf{S5}}$, como se segue:

$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$ sse não há um mundo *cuja relação de acessibilidade seja de equivalência*, em nenhuma interpretação, em que $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ são todos verdadeiros e $\mathscr{C}$ é falso

Nós anexamos o subscrito **S5** a $\vDash$ porque o sistema **S5** é completo e consistente relativo a essa nova definição de validade:

- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$
- Se $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$, então $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vdash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$

Como antes, não tentarmos provar esses resultados de correção e completude. Contudo, é relativamente fácil ver o quão é necessário que a relação de acessibilidade seja de equivalêcia para que a regra R5 seja justificada:

$$\begin{array}{r|l} m & \neg\Box\mathscr{A} \\ & \begin{array}{|ll} \Box & \\ \hline \neg\Box\mathscr{A} & \quad \text{R5 } m \end{array} \end{array}$$

A regra diz que se $\mathscr{A}$ não é necessário, i.e., se é falso em algum mundo possível, ela também não é necessária em qualquer mundo possível acessível, i.e., nós temos $\neg\Box\mathscr{A} \vdash_{\mathbf{S5}} \Box\neg\Box\mathscr{A}$.

Para ver isso, apenas imagine tentando encontrar uma contra-interpretação para esta afirmação:

$$\neg\Box\mathscr{A} \vDash_{\mathbf{S5}} \Box\neg\Box\mathscr{A}$$

Precisaríamos construir um mundo, w_1, em que $\neg\Box\mathscr{A}$ fosse verdadeiro, mas $\Box\neg\Box\mathscr{A}$ fosse falso. Agora, se $\neg\Box\mathscr{A}$ é verdadeiro em w_1, então w_1 deve acessar algum mundo, w_2, em que $\mathscr{A}$ é falso. Da mesma maneira, se $\Box\neg\Box\mathscr{A}$ é falso em w_1, então w_1 deve acessar algum mundo,, w_3, em que $\neg\Box\mathscr{A}$ é falso. Uma vez que estamos agora insistindo que a relação de acessibilidade é uma relação de equivalência, e, consequentemnete, simétrica, podemos inferir que w_3 acessa w_1. Consequentemente, w_3 acessa w_1, e w_1 acessa w_2. Novamente, uma vez que estamos agora insistindo que a relação de acessibilidade é uma relação de equivakência, e, consequentemente, transitiva, podemos inferir que w_3 acessa w_2. Porém, mais cedo nós dissemos que $\neg\Box\mathscr{A}$ é falso em w_3, o que implica que $\mathscr{A}$ é verdadeiro em todo mundo que w_3 acessa. Emtão, $\mathscr{A}$ é verdadeiro *e* falso em w_2. Contradição!

Na definição de $\vDash_{\mathbf{S5}}$, estipulamos que a relação de acessibilidade deve ser uma relação de equivalência. Mas há outra maneira de obter uma noção de validade que sirva para **S5**. Em vez de estipularmos que a relação de acessibilidade é uma relação de equivalência, podemos estipular que ela é uma relação *universal*:

- ▹ $\forall w_1 \forall w_2 R w_1 w_2$

Em português: todo mundo acessa todo mundo. Ou, em termos de possibilidade relativa: todo mundo é possível relativo a todo mundo possível. Ao usarmos esta restrição na relação de acessibilidade, poderíamos ter definido $\vDash_{\mathbf{S5}}$ assim:

> $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n \vDash_{\mathbf{S5}} \mathscr{C}$ sse não há um mundo *cuja relação de acessibilidade seja universal*, em nenhuma interpretação, em que $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots \mathscr{A}_n$ são todos verdadeiros e $\mathscr{C}$ é falso

Se definirmos $\vDash_{\mathbf{S5}}$ assim, continuaremos tendo os mesmos resultados de correção e completude para **S5**. O que isso nos diz? Bem, isso significa que se estamos lidando com a noção de necessidade de acordo com a qual *todo* mundo é possível relativo a *todo* mundo, então devemos usar **S5**. Além do mais, a maioria dos filósofos assume que as noções de necessidade, com as quais eles estão preocupados, como *necessidade lógica* e *necessidade metafísica*, são exatamente desse tipo. Então, **S5** é o sistema modal que a maioria dos filósofos usa na maior parte do tempo.

Exercícios Práticos

A. Apresente contra-interpretações às seguintes sentenças falsas:

1. $\neg P \vDash_{\mathbf{K}} \neg\Diamond P$
2. $\Box(P \vee Q) \vDash_{\mathbf{K}} \Box P \vee \Box Q$
3. $\vDash_{\mathbf{K}} \neg\Box(A \wedge \neg A)$
4. $\Box A \vDash_{\mathbf{K}} A$

B. Apresente contra-interpretações às seguintes sentenças falsas:

1. $\Diamond A \vDash_{\mathbf{S4}} \Box\Diamond A$
2. $\Diamond A, \Box(\Diamond A \rightarrow B) \vDash_{\mathbf{S4}} \Box B$

C. Apresente contra-interpretações às seguintes sentenças falsas:

1. $\Box(M \rightarrow O), \Diamond M \vDash_{\mathbf{T}} O$
2. $\Box A \vDash_{\mathbf{T}} \Box\Box A$

Leitura complementar

A lógica modal é um grande subcampo da lógica. Nós apenas arranhamos a superfície. Se você quiser aprender mais sobre sistemas modais, aqui estão alguns manuais que você pode consultar:

- Hughes, G. E., & Cresswell, M. J. (1996). *A New Introduction to Modal Logic*, Oxford: Routledge.

- Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.

- Garson, J. W. (2013). *Modal Logic for Philosophers*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.

Nenhum desses autores formula seus sistemas de prova modal da maneira que fizemos, mas a formulação mais próxima é dada por Garson.

PARTE IX

Metateoria

CAPÍTULO 41

Formas normais e completude expressiva

41.1 Forma Normal Disjuntiva

Às vezes é útil considerar sentenças de uma forma particularmente simples. Por exemplo, podemos considerar sentenças em que $\neg$ apenas se liga a fórmulas atômicas, ou aquelas que são combinações de fórmulas atômicas e fórmulas atômicas negadas usando apenas o $\wedge$. Uma forma relativamente geral, mas ainda assim simples, é aquela em que uma sentença é a disjunção de conjunções de fórmulas atômicas ou fórmulas atômicas negadas. Quando uma tal sentença é construída, nós começamos com sentenças atômicas, então (talvez) adicionamos negações, então (talvez) combinamos com $\wedge$, e finalmente (talvez) combinamos usando $\vee$.

Vamos dizer que uma sentença está na FORMA NORMAL DISJUNTIVA *sse* ela cumpre todas as seguintes condições:

(DNF1) Nenhum conectivo ocorre na sentença além de negações, conjunções e disjunções;

(DNF2) Toda ocorrência da negação tem um escopo mínimo (i.e. qualquer ‘¬’ é imediatamente seguido de uma fórmula atômica);

(DNF3) Nenhuma disjunção ocorre dentro do escopo de qualquer conjunção.

Então, aqui estão algumas sentenças na forma normal disjuntiva:

$$A$$

$$(A \land \neg B \land C)$$

$$(A \land B) \lor (A \land \neg B)$$

$$(A \land B) \lor (A \land B \land C \land \neg D \land \neg E)$$

$$A \lor (C \land \neg P_{234} \land P_{233} \land Q) \lor \neg B$$

Note que nós quebramos aqui uma das máximas deste livro e *temporariamente* nos permitimos a empregar as convenções relaxadas de parênteses que permitem que conjunções e disjunções tenham um tamanho arbitrário. Essas convenções farão fazem fácil ver quando uma sentença está na forma normal disjuntiva. Continuaremos tolerando essas convenções relaxadas, sem mais comentários.

Para ilustrar melhor a ideia de forma normal disjuntiva, introduziremos mais algumas notações. Esrevemos ‘$\pm\mathscr{A}$’ para indicar que $\mathscr{A}$ é uma sentença atômica que pode ou não estar precedida por uma ocorrência de negação. Então, uma sentença na forma normal disjuntiva tem a seguinte forma:

$$(\pm\mathscr{A}_1 \land \ldots \land \pm\mathscr{A}_i) \lor (\pm\mathscr{A}_{i+1} \land \ldots \land \pm\mathscr{A}_j) \lor \ldots \lor (\pm\mathscr{A}_{m+1} \land \ldots \land \pm\mathscr{A}_n)$$

Agora, sabemos o que significa uma sentença estar na forma normal disjuntiva. O resultado que estamos procurando é:

Teorema da Forma Normal Disjuntiva. Para qualquer sentença, há uma sentença na forma normal disjuntiva logicamente equivalente.

Daqui em diante, abreviaremos ‘Forma Normal Disjuntiva’ por ‘FND’.

41.2 Prova do teorema da FND via tabelas-verdade

Nossa primeira prova do teorema da FND emprega tabelas-verdade. Primeiro, ilustraremos a técnica para encontrar uma sentença equivalente na FND, e então tornaremos esta ilustração em uma prova rigorosa.

Suponhamos que temos alguma sentença, $\mathcal{S}$, que contém três sentenças atômicas, 'A', 'B' e 'C'. A primeira coisa a se fazer é completar uma tabela verdade para $\mathcal{S}$. Talvez nós terminemos com isso:

A	B	C	$\mathcal{S}$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

Por ocasião, $\mathcal{S}$ é verdadeiro em quatro linhas de sua tabela verdade, a saber, linhas 1, 3, 7 e 8. Correspondendo a cada uma dessas linhas, escreveremos quatro sentenças, cujos únicos conectivos são negações e conjunções, onde cada negação tem escopo mínimo:

1. '$A \land B \land C$' que é verdadeiro na linha 1 (e apenas lá)
2. '$A \land \neg B \land C$' que é verdadeiro na linha 3 (and only then)
3. '$\neg A \land \neg B \land C$' que é verdadeiro na linha 7 (e apenas lá)
4. '$\neg A \land \neg B \land \neg C$' que é verdadeiro na linha 8 (e apenas lá)

Agora, combinamos todas essas conjunções usando $\lor$, assim:

$$(A \land B \land C) \lor (A \land \neg B \land C) \lor (\neg A \land \neg B \land C) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C)$$

Isso nos dá uma sentença na FND que é verdadeira exatamente nessas linhas onde um dos disjuntos é verdadeiro, i.e. ela é verdadeira nas (e apenas nas) linhas 1, 3, 7 e 8. Então, essa sentença tem exatamente a mesma tabela verdade que $\mathcal{S}$. Então, temos uma sentença na FND que é logicamente equivalente a $\mathcal{S}$, que é exatamente o que queríamos!

Agora, a estratégia que adotamos não depende das especificidades de $\mathscr{S}$; ela é perfeitamente geral. Consequentemente, podemos usá-la para obter uma prova simples do teorema da FND.

Escolha qualquer sentença arbitrária, $\mathscr{S}$, e seja $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ as sentenças atômicas que ocorrem em $\mathscr{S}$. Para obter uma sentença na FND que é logicamente equivalente a $\mathscr{S}$, consideramos a tabela verdade de $\mathscr{S}$. Aqui estão dois casos a serem considerados:

1. *$\mathscr{S}$ é falso em todas as linhas de sua tabela verdade.* Então, $\mathscr{S}$ é uma contradição. Neste caso, a contradição $(\mathscr{A}_1 \wedge \neg\mathscr{A}_1)$ está na FND e é logicamente equivalente a $\mathscr{S}$.

2. *$\mathscr{S}$ é verdadeiro em pelo uma linha de sua tabela verdade.* Para cada linha i da tabela verdade, seja $\mathscr{B}_i$ uma conjunção da forma

   $$(\pm\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \pm\mathscr{A}_n)$$

   onde as seguintes regras determinam se deve-se ou não incluir uma negação na frente de cada sentença atômica:

   $\mathscr{A}_m$ é um conjunto [*conjunct*] de $\mathscr{B}_i$ *iff* $\mathscr{A}_m$ é verdadeiro na linha i
   $\neg\mathscr{A}_m$ é um *conjunto* de $\mathscr{B}_i$ *iff* $\mathscr{A}_m$ é falso na linha i

   Dadas estas regras, $\mathscr{B}_i$ é verdadeiro na (e apenas na) linha i da tabela verdade que considera todas as possíveis valorações de $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ (i.e., a tabela verdade de $\mathscr{S}$).

   Em seguida, sejam i_1, i_2, …, i_m os números de linhas da tabela verdade em que $\mathscr{S}$ é *verdadeiro*. Agora, seja $\mathscr{D}$ a sentença:

   $$\mathscr{B}_{i_1} \vee \mathscr{B}_{i_2} \vee \ldots \vee \mathscr{B}_{i_m}$$

   Uma vez que $\mathscr{S}$ é verdadeira em pelo menos uma linha de sua tabela verdade, $\mathscr{D}$ é de fato bem-definida; e no caso limitante em que $\mathscr{S}$ é verdadeira em exatamente uma linha de sua tabela verdade, $\mathscr{D}$ é apenas $\mathscr{B}_{i_1}$, para algum i_1.

   Por construção, $\mathscr{D}$ está na FND. Além do mais, por construção, para cada linha i da tabela verdade: $\mathscr{S}$ é verdadeiro na linha i da tabela verdade *sse* um dos disjuntos de $\mathscr{D}$ (a saber, $\mathscr{B}_i$) é verdadeiro na, e apenas na, linha i. Consequentemente, $\mathscr{S}$ e $\mathscr{D}$ têm o mesmo valor verdade, e então são logicamente equivalentes.

Esses dois casos são exaustivos e, de qualquer forma, teremos uma sentença na FND que é logicamente equivalente a $\mathcal{S}$.

Então, nós provamos o Teorema da DNF. Antes de dizermos mais, porém, devemos sinalizar imediatamente que estamos retornando à definição austera de uma sentença (LVF), segundo a qual podemos assumir que qualquer conjunção tem exatamente dois conjuntos [*conjuncts*] e qualquer disjunção possui exatamente dois disjuntos.

41.3 Forma Normal Conjuntiva

Até este capítulo, discutimos formas normais *disjuntivas*. Não seria uma surpresa ouvir dizer que há também uma coisa como uma *forma normal conjuntiva* (FNC).

A definição de FNC é exatamente análoga à definição de FND. Então, uma sentença está na FNC *sse* ela cumpre todas as seguitnes condições:

(CNF1) Nenhum conectivo ocorre na sentença além de negações, conjunções e disjunções;
(CNF2) Toda ocorrência da negação tem um escopo mínimo;
(CNF3) Nenhuma conjunção ocorre dentro do escopo de qualquer disjunção.

De modo geral, então, uma sentença na FNC se parece com isso:

$$(\pm\mathcal{A}_1 \lor \ldots \lor \pm\mathcal{A}_i) \land (\pm\mathcal{A}_{i+1} \lor \ldots \lor \pm\mathcal{A}_j) \land \ldots \land (\pm\mathcal{A}_{m+1} \lor \ldots \lor \pm\mathcal{A}_n)$$

onde cada $\mathcal{A}_k$ é uma sentença atômica.

Podemos agora provar outro teorema da forma normal:

Teorema da Forma Normal Conjuntiva. Para qualquer sentença, há uma sentença na forma normal conjuntiva equivalente.

Dada uma sentença da LVF, $\mathcal{S}$, começamos escrevendo a tabela verdade para $\mathcal{S}$.

Se $\mathcal{S}$ é *verdadeiro* em toda linha da tabela verdade, então $\mathcal{S}$ e $(\mathcal{A}_1 \lor \neg\mathcal{A}_1)$ são logicamente equivalentes

Se $\mathcal{S}$ é *falsa* em pelo menos uma linha da tabela verdade, então, para toda linha da tabela verdade onde $\mathcal{S}$ é falso, escreva uma disjunção $(\pm\mathcal{A}_1 \lor \ldots \lor \pm\mathcal{A}_n)$ que é *falsa* nessa (e apenas nessa) linha. Seja $\mathcal{C}$

a conjunção de todas esses três disjuntos; por construção, $\mathscr{C}$ está na FNC e $\mathscr{S}$ e $\mathscr{C}$ são logicamente equivalentes.

Exercícios Práticos

A. Considere as seguintes sentenças:

1. $(A \rightarrow \neg B)$
2. $\neg(A \leftrightarrow B)$
3. $(\neg A \vee \neg(A \wedge B))$
4. $(\neg(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$
5. $(\neg(A \vee B) \leftrightarrow ((\neg C \wedge \neg A) \rightarrow \neg B))$
6. $((\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow C) \wedge \neg(A \wedge D))$

Para cada sentença, encontre uma sentença logicamente equivalente na FND e uma na FNC.

41.4 A adequação expressiva da LVF

Dos nossos conectivos, o ¬ se liga a sentenças simples, e todos os outros se combinam exatamente com duas sentenças. Poderíamos também introduzir a ideia de um conectivo *n*-ário. Por exemplo, poderíamos considerar um conectivo ternário, '♡', e estipular que ele deve ter a seguinte tabela verdade característica:

A	B	C	$\heartsuit(A,B,C)$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

Provavelmente este novo conectivo não corresponderia a qualquer sentença natural da língua portuguesa (pelo menos não da forma com que '∧' corresponde a 'e'). Mas surge uma questão: se quiséssemos empregar um conectivo com esta tabela verdade característica, deveríamos adicionar um *novo* conectivo à LVF? Ou poderíamos conseguir isso com os conectivos que nós *já temos*?

Vamos tornar esta questão mais precisa. Digamos que alguns conectivos são CONJUNTAMENTE EXPRESSIVAMENTE ADEQUADOS *sse*, para qualquer tabela verdade possível, há uma sentença contendo apenas aqueles conectivos com aquela tabela verdade.

O ponto geral é que, quando estamos armados com alguns conectivos expressivamente adequados em conjunto, nenhuma tabela verdade característica está além de nosso alcance. E, de fato, estamos com sorte.

Teorema da adequação expressiva. Os conectivos da LVF são expressivamente adequados em conjunto. De fato, os seguintes pares de conectivos são expressivamente adequados em conjunto:

1. '¬' e '∨'
2. '¬' e '∧'
3. '¬' e '→'

Dada qualquer tabela verdade, podemos usar o método de provar o teorema da FND (ou o da FNC) via tabelas verdade para escrever um esquema que tem a mesma tabela verdade. Por exeplo, empregando o método verdade para provar o teorema da FND, descobrimos que os seguintes esquemas têm as mesmas tabelas características que $\heartsuit(A, B, C)$ acima:

$$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$$

Segue-se que os conectivos da LVF são expressivamente adequados em conjunto.

Resultado Subsidiário 1: adequação expressiva de '¬' and '∨'. Observe que o esquema que geramos, usando o método de tabela verdade de provar o teorema da FND, conterá apenas os conectivos '¬', '∧' e '∨'. Então, ele é suficiente para mostrar que há um esquema equivalente que contém apenas '¬' e '∨'. Para mostrar isso, simplesmente consideramos que

$$(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \quad \text{e} \quad \neg(\neg\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B})$$

são logicamente equivalentes.

Resultado Subsidiário 2: adequação expressiva de '¬' and '∧'. Exatamente como no Resultado Subsidiário 1, faz-se o uso do fato de que

$$(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \quad \text{e} \quad \neg(\neg\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B})$$

são logicamente equivalentes..

Resultado Subsidiário 3: adequação expressiva de '¬' and '→'. Exatamente como no Resultado Subsidiário 1, faz-se o uso dessas equivalências:

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) & \text{e} & (\neg\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \\ (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) & \text{e} & \neg(\mathscr{A} \to \neg\mathscr{B}) \end{array}$$

Alternativamente, poderíamos simplesmente confiar em um dos outros dois resultados subsidiários e (repetidamente) invocar apenas uma dessas duas equivalências.

Em suma, nunca há qualquer *necessidade* de se adicionar conectivos à LVF. De fato, já há alguma redundância entre os conectivos que temos: poderíamos nos contentar com apenas dois conectivos, se estivéssemos nos sentindo realmente austeros.

41.5 Conectivos individualmente expressivamente adequados

De fato, alguns conectivos binários são *individualmente* expressivamente adequados. Estes conectivos não estão normalmente incluídos na LVF, uma vez que eles são bem complexos de se usar. Mas a existência deles mostra que, se quiséssemos, poderíamos definir uma linguagem vero-funcional que fosse expressivamente adequada que contivesse apenas um único operador primitivo.

O primeiro desses conectivos que consideraremos é '↑', que tem a seguinte tabela verdade característica.

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \uparrow \mathscr{B}$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Ele é frequente chamado de '*Sheffer stroke*', depois de Henry Sheffer, quem o utilizou para mostrar como reduzir o número de conectivos lógicos no *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead.[1]

> '$\uparrow$' é expressivamente adequado sozinho.

(Na verdade, Charles Sanders Peirce antecipou Sheffer em cerca de 30 anos, mas nunca publicou seus resultados.)[2] É bem comum, também, chamá-lo de 'nand', uma vez que sua tabela verdade característica é a negação da tabela verdad do '$\wedge$'.

O Teorema da Adequação Expressiva nos diz que '$\neg$' e '$\vee$' são conjuntamente expressivamente adequados. Então, ele é suficiente para nos mostrar que, dado qualquer esquema que contenha apenas esses dois conectivos, podemos reescrevê-lo como um esquema logicamente equivalente que contém apenas '$\uparrow$'. Como na prova dos casos subsidiários do Teorema da Adequação Expressiva, então, nós simplesmente aplicamos as seguintes equivalências:

$$\begin{array}{ccc} \neg\mathscr{A} & \text{e} & (\mathscr{A} \uparrow \mathscr{A}) \\ (\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) & \text{e} & ((\mathscr{A} \uparrow \mathscr{A}) \uparrow (\mathscr{B} \uparrow \mathscr{B})) \end{array}$$

para o resultado subsidiário 1.

De maneira similar, podemos considerar o conectivo '$\downarrow$':

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \downarrow \mathscr{B}$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Ele é às vezees chamado de '*Peirce arrow*' (Peirce o chamou de *ampheck*). Mais frequentemente, porém, ele é chamado de 'nor', uma vez que sua tabela verdade característica é a negação de '$\vee$', ou seja, de 'nem … nem …'.

---

[1] Sheffer, 'A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras, with application to logical constants,' (1913, *Transactions of the American Mathematical Society* 14.4)

[2] Ver Peirce, 'A Boolian Algebra with One Constant', que é datado de c.1880; e Peirce's *Collected Papers*, 4.264–5.

‘↓’ é expressivamente adequado por si só.

Como no resultado anterior para ↑, porém, invocando as equivalências:

$$\begin{array}{rcl} \neg\mathscr{A} & \text{e} & (\mathscr{A} \downarrow \mathscr{A}) \\ (\mathscr{A} \land \mathscr{B}) & \text{e} & ((\mathscr{A} \downarrow \mathscr{A}) \downarrow (\mathscr{B} \downarrow \mathscr{B})) \end{array}$$

e o resultado subsidiário 2.

41.6 Falhas de adequação expressiva

De fato, os *únicos* conectivos binários que são individualmente expressivamente adequados são ‘↑’ e ‘↓’. Mas como mostraríamos isso? De maneira mais geral, como podemos mostrar que alguns conectivos *não* são conjuntamente expressivamente adequados?

A coisa óbvia a se fazer é tentar encontrar alguma tabela verdade que *não podemos* expressar usando apenas os conectivos dados. Mas há um pouco de arte nisso.

Para tornar isso concreto, vamos considerar a questão sobre se ‘∨’ é expressivamente adequado por si só. Depois de um pouco de reflexão, deve estar claro que ele não é. Em particular, deve estar claro que qualquer esquema que contenha apenas disjunções não pode ter a mesma tabela verdade que a negação, i.e.:

$\mathscr{A}$	$\neg\mathscr{A}$
T	F
F	T

A razão intuitiva de por que isso deve ser assim é simples: as linhas do topo da tabela verdade desejada precisam ter o valor falso; mas a linha do topo de qualquer tabela para um esquema que contém *apenas* ∨ sempre será verdadeiro. O mesmo é verdadeiro para ∧, →, e ↔.

‘∨’, ‘∧’, ‘→’, e ‘↔’ não são expressivamente adequados por si só.

Na verdade, o seguinte é verdadeiro:

Os *únicos* conectivos binários que são expressivamente adequados por si só são '↑' e '↓'.

Certamente, isso é mais difícil de se provar do que para conectivos primitivos. Por exemplo, o conectivo de "disjunção exclusiva" não tem um T na primeira linha de sua tabela verdade característica, então o método usado acima não é mais suficiente para mostrar que ele não pode expressar todas as tabelas verdades. Também é mais difícil mostrar que, e.g., '↔' e '¬' *juntos* não são expressivamente adequados.

CAPÍTULO 42

Correção

Neste capítulo, relacionaremos a semântica da LVF ao seu *sistema de prova* de dedução natural (conforme definido na parte IV). Provaremos que o sistema formal de prova é seguro: você pode provar sentenças apenas de premissas das quais elas se seguem. Intuitivamente, um sistema formal de prova é correto [*sound*] sse ele não nos permite provar qualquer argumento inválido. Isso obviamente é uma propriedade fortemente desejável. Ela nos diz que nossos sistema de prova jamais nos desviará. Na verdade, se nosso sistema de prova não fosse correto, então nós não poderíamos confiar em nossas provas. O objetivo deste capítulo é provar que nosso sistema de prova é correto.

Vamos fazer a ideia mais precisa. Abreviaremos uma lista de sentenças usando a letra grega Γ ('gamma'). Um sistema formal de prova é CORRETO [*SOUND*] (relativo a uma dada semântica) *sse*, sempre que houver uma prova de $\mathscr{C}$ a partir de assunções de Γ, então Γ genuinamente acarreta [*entails*] $\mathscr{C}$ (dada essa semântica). Posto de outra maneira, para provar que o sistema de prova da LVF é correto, precisamos provar o seguinte

Teorema da Correção. Para quaisquer sentenças Γ e $\mathscr{C}$: se $\Gamma \vdash \mathscr{C}$, então $\Gamma \vDash \mathscr{C}$

Para provar isso, checaremos cada uma das regras do sistema de prova da LVF individualmente. Queremos mostrar que nenhuma aplicação dessas regras nos engana. Uma vez que uma prova apenas envolve aplicações repetidas dessas regras, isso mostrará que nenhuma prova nos engana. Ou, pelo menos, essa é a ideia geral.

Para começar, precisamos tornar a ideia de ‘nos enganar’ mais precisa. Digamos que uma linha de uma prova é BRILHANTE sse as assunções das quais essa linha depende acarretam tautologicamente a sentença nessa linha.[1] Para ilustrar a ideia, considere o seguinte:

$$\begin{array}{r|lll}
1 & F \to (G \land H) & & \\
\hline
2 & \quad \vert\; F & & \\
3 & \quad \vert\; G \land H & & \to\text{E } 1, 2 \\
4 & \quad \vert\; G & & \land\text{E } 3 \\
5 & F \to G & & \to\text{I } 2\text{–}4
\end{array}$$

A linha 1 é brilhante sse $F \to (G \land H) \vDash F \to (G \land H)$. Você deveria ser facilmente convencido de que a linha 1 é de fato brilhante! De maneira similar, a linha 4 é brlihante sse $F \to (G \land H), F \vDash G$. Novamente, é fácil checar que a linha 4 é brilhante. Assim como o é em toda linha nessa prova da LVF. Queremos mostrar que isso não é uma coincidência. Isto é, queremos provar:

Lema do Brilho. Toda linha de toda prova da LVF é brilhante.

Então, saberemos que nunca seremos enganados, em qualquer linha de uma prova. De fato, dado o Lema do Brilho, será fácil provar o Teorema da Correção:

Prova. Suponha que $\Gamma \vdash \mathscr{C}$. Então, há uma prova da LVF, com $\mathscr{C}$ aparecendo em sua última linha, cujas únicas assunções não eliminadas estão entre Γ. O Lema do Brilho nos diz que toda linha em uma prova da LVF é brilhante. Então, esta última linha é brilhante, i.e. $\Gamma \vDash \mathscr{C}$. QED

Ainda falta provar o Lema do Brilho.

Para fazer isso, observe que toda linha de qualquer prova da LVF é obtida ao se aplicar alguma regra. Então o que queremos mostrar é que nenhuma aplicação de uma regra do sistema de prova da LVF nos enganará. Mais precisamente, digamos que uma regra de inferência é CORRETA [*rule-sound*] *sse* para todas as provas da LVF, se obtivermos uma linha em uma prova da LVF ao aplicar aquela regra, e todas as

---

[1] A palavra ‘brilhante’ não é padronizada entre os lógicos.

linhas anteriores na prova da LVF forem brilhantes, então nossa nova linha é também brilhante. O que precisamos mostrar é que *todas* as regras no sistema de provas da LVF são corretas.

Faremos isso na próxima seção. Mas, tendo demonstrado a correção de todas as regras, o Lema do Brilho seguirá imediatamente:

Prova. Fixe qualquer linha, linha n, em qualquer prova da LVF. A sentença escrita na linha n deve ser obtida usando uma regra de inferência formal que é correta. Isso é dizer que, se toda linha anterior é brilhante, então a linha n é ela mesma brilhante. Consequentemente, pelo teorema forte da indução no tamanho das provas da LVF, toda linha de toda prova da LVF é brilhante. QED.

Note que esta prova apela a um princípio da indução forte no tamanho das provas da LVF. Esta é a primeira vez que nós vimos este princípio, e você deveria pausar para confirmar que ele é, de fato, justificado.

Resta mostrar que toda regra é correta. Isso não é difícil, mas é consumidor de tempo, uma vez que precisamos checar cada regra individualmente, e o sistema de prova da LVF tem várias regras! Para acelerar o processo marginalmente, introduziremos uma abreviação conveniente: 'Δ_i' ('delta') abreviará as assunções (se houver) em que a linha i depende da nossa prova na LVF (o contexto indicará qual prova da LVF tivermos em mente).

Introduzir uma assunção é correto

Se $\mathscr{A}$ é introduzida como uma assunção na linha n, então $\mathscr{A}$ está entre Δ_n, and so $\Delta_n \vDash \mathscr{A}$.

A regra $\wedge$I é correta.

Prova. Considere qualquer aplicação de $\wedge$I em qualquer prova da LVF, i.e., algo como:

i	$\mathscr{A}$	
j	$\mathscr{B}$	
n	$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$	$\wedge$I i, j

Para mostrar que $\wedge$I é correto, assumimos que toda linha antes da linha n é brilhante; e desejamos mostrar que a linha n é brilhante, i.e. que $\Delta_n \vDash \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$.

Então, seja v qualquer avaliação que torne todas as fórmulas de Δ_n verdadeiras.

Primeiro mostramos que v torna $\mathscr{A}$ verdadeiro. Para provar isso, note que todas as fórmulas de Δ_i estão entre Δ_n. Por hipótese, a linha i é brilhante. Então, qualquer valoração que torne todos de Δ_i verdadeiros torna $\mathscr{A}$ verdadeiro. Uma vez que v torna todos de Δ_i verdadeiros, ele torna $\mathscr{A}$ verdadeiros também.

Podemos, de maneira similar, ver que v torna $\mathscr{B}$ verdadeiro.

Então, v torna $\mathscr{A}$ verdadeiro e v torna $\mathscr{B}$ verdadeiro. Consequentemente, v torna $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ verdadeiro. Então, qualquer valoração que torna todas as sentenças entre Δ_n verdadeiras também torna $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ verdadeiro. Ou seja: a linha n é brilhante. QED

Todos os lemas restantes que estabelecem a correção de regras terão essencialmente a mesma estrutura que este.

A regra $\wedge$E é correta.

Prova. Assuma que toda linha antes da linha n em alguma prova da LVF é brilhante, e que $\wedge$E é usada na linha n. Então, a situação é:

$$\begin{array}{r|ll} i & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \\ n & \mathscr{A} & \wedge\text{E } i \end{array}$$

(ou talvez com $\mathscr{B}$ na linha n; mas, um raciocínio similar se aplicará nesse caso). Seja v qualquer valoração que torna todas as sentenças de Δ_n verdadeiras. Note que todas as sentenças de Δ_i estão entre Δ_n. Por hipótese, a linha i é brilhante. Então, qualquer valoração que torna todas as sentenças de Δ_i verdadeiras torna $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ verdadeira. Então, v torna $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ verdadeira, e consequentemente torna $\mathscr{A}$ verdadeira. Então, $\Delta_n \vDash \mathscr{A}$. QED

A regra $\vee$I é correta.

Deixamos este como um exercício.

A regra $\vee$E é correta.

Prova. Assuma que toda linha antes da linha n em alguma prova da LVF é brilhante, e que $\wedge$E é usada na linha n. Então, a situação é:

m	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$	
i	$\quad\mathscr{A}$	
j	$\quad\mathscr{C}$	
k	$\quad\mathscr{B}$	
l	$\quad\mathscr{C}$	
n	$\mathscr{C}$	$\vee$E m, i–j, k–l

Seja v qualquer valoração que torna todas as sentenças de Δ_n verdadeiras. Note que todas as sentenças de Δ_m estão entre Δ_n. Por hipótese, a linha m é brilhante. Então, qualquer valoração que torna Δ_n verdadeira torna $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ verdadeira. Então, em particular, v torna $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ verdadeira, e, consequentemente, ou v torna $\mathscr{A}$ verdadeira, ou v torna $\mathscr{B}$ verdadeira. Nós agora raciocinamos por entre estes dois casos:

Caso 1: v torna $\mathscr{A}$ verdadeira. Todas as sentenças de Δ_i estão entre Δ_n, com a possível exceção de $\mathscr{A}$. Uma vez que v torna todas de Δ_n verdadeiras, e também torna $\mathscr{A}$ verdadeira, v torna todas de Δ_i verdadeiras. Agora, por hipótese, linha j é brilhante; então, $\Delta_j \vDash \mathscr{C}$. Mas as sentenças Δ_i são exatamente as sentenças Δ_j, então, $\Delta_i \vDash \mathscr{C}$. Então, qualquer valoração que torna todas as sentenças de Δ_i verdadeiras torna $\mathscr{C}$ verdadeira. Mas v é uma tal valoração. Então, v torna $\mathscr{C}$ verdadeira.

Caso 2: v torna $\mathscr{B}$ verdadeira. Raciocinar da exata mesma maneira, considerando as linhas k e l, k torna c verdadeira.

De qualquer maneira, v torna $\mathscr{C}$ verdadeira. Então, $\Delta_n \vDash \mathscr{C}$. QED

A regra $\neg$E correta.

Prova. Assuma que cada linha antes da linha n em alguma prova da LVF é brilhante, e que $\neg$E é usada na linha n. Então, a situação é:

$$\begin{array}{r|ll} i & \mathscr{A} & \\ j & \neg\mathscr{A} & \\ n & \bot & \neg\text{E } i, j \end{array}$$

Note que todas as sentenças de Δ_i e todas as de Δ_j estão entre Δ_n. Então, qualquer valoração que torne verdadeiras todas as sentenças de Δ_n também teria que tornar tanto $\mathscr{A}$ quanto $\neg\mathscr{A}$ verdadeiras. Mas, nenhuma valoração pode fazer isso. Então, nenhuma valoração torna verdadeiras todas as sentenças de Δ_n. Então, $\Delta_n \vDash \bot$, vacuosamente. QED

A regra X é correta.

Deixamos esta como um exercício.

A regra ¬I é correta.

*Prova.*Assuma que toda linha antes da linha n de alguma prova da LVF é brilhante, e que ¬I é usada na linha n. Então, a situação é:

$$\begin{array}{r|l|ll} i & & \mathscr{A} & \\ \cline{3-3} j & & \bot & \\ n & \multicolumn{2}{l}{\neg\mathscr{A}} & \neg\text{I } i\text{–}j \end{array}$$

Seja v qualquer valoração que torne verdadeiras todas as sentenças de Δ_n. Note que todas as sentenças de Δ_n estão entre Δ_i, com a possível exceção de $\mathscr{A}$. Por hipótese, a linha j é brilhante. Mas, nenhuma valoração pode tornar '$\bot$' verdadeira, então, nenhuma valoração pode tornar todas as sentenças de Δ_j verdadeiras. Uma vez que as sentenças Δ_i são exatamente as sentenças Δ_j, nenhuma valoração pode tornar todas de Δ_i verdadeiras. Uma vez que v torna todas de Δ_n verdadeiras, ela deve, portanto, tornar $\mathscr{A}$ falsa, e, então, tornar $\neg\mathscr{A}$ verdadeira. Então, So $\Delta_n \vDash \neg\mathscr{A}$. QED

As regras IP, →I, →E, ↔I, e ↔E são todas corretas.

Deixamos este como exercício.

Isso estabelece que todas as regras básicas do nosso sistema de prova são corretas. Finalmente, mostramos:

Todas as regras derivadas do nosso sistema são completas.

Prova. Suponha que usamos uma regra derivada para obter alguma sentença, $\mathscr{A}$, na linha n de alguma prova da LVF, e que toda linha anterior é brilhante. Todo uso de uma regra derivada pode ser substituído (aos custos da longevidade) por múltiplos usos das regras básicas. Isto é, poderíamos ter usado as regras básicas para escrever $\mathscr{A}$ em alguma linha $n+k$, sem introduzir qualquer outra assunção. Então, ao aplicar várias vezes nossos resultados individuais de que todas as regras básicas são corretas ($k+l$ vezes, na verdade), podemos ver que a linha $n+k$ é brilhante. Consequentemente, a regra derivada é correta. QED

E é isso! Nós mostramos que todas as regras—básicas ou não—são corretas, que é tudo o que precisávamos para estabelecer o Lema do Brilho, e, consequentemente, o Teorema da Correção.

Mas, pode ajudar a terminar este capítulo se repetirmos minha explicação informal do que nós fizemos. Uma prova formal é apenas uma sequência—de tamanho arbitrário—de aplicações de regras. Mostramos que qualquer aplicação de qualquer regra não nos levará a enganos. Segue-se (por indução) que nenhuma prova formal nos levará a enganos. Ou seja: nosso sistema de prova é correto.

Exercícios Práticos

A. Complete os lemas deixados como exercício neste capítulo. Ou seja, mostre que as seguintes regras são corretas:

1. ∨I. (*Dica*: este caso é similar ao caso de ∧E.)
2. X. (*Dica*: este caso é similar ao caso de ¬E.)
3. →I. (*Dica*: este caso é similar ao caso de ∨E.)
4. →E.
5. IP. (*Dica*: este caso é similar ao caso de ¬I.)

Appendices

APÊNDICE A

Notação simbólica

1.1 Nomeclatura alternativa

Lógica vero-funcional. A LVF é conhecida por outros nomes. Às vezes ela é chamada de *lógica sentencial*, porque ela lida fundamentalmente com sentenças. Às vezes é chamada de *lógica proposicional*, na ideia de que ela lida fundamentalmente com proposições. Nós ficamos com *lógica vero-funcional*, para enfatizar o fato de que ela lida apenas com as atribuições de verdade e falsidade a sentenças, e que seus conectivos são todos vero-funcionais.

Lógica de primeira ordem. A LPO é conhecida por outros nomes. Às vezes ela é chamada de *lógica de predicados*, porque ela nos permite aplicar predicados a objetos. Às vezes é chamada de *lógica quantificada*, porque ela faz o uso de quantificadores.

Fórmulas. Alguns textos chamam fórmulas de *fórmulas bem-formadas*. Uma vez que 'fórmula bem-formada' é uma frase grande e incômoda, eles então abreviam isso como *fbf*. Isso é tanto bárbaro quanto desnecessário (tais textos não suportam 'fórmulas mal-formadas'). Nós ficamos com 'fórmula'.

Em §6, nós definimos *sentenças* da LVF. Elas também são às vezes chamadas de 'fórmulas' (ou 'fórmulas bem-formadas'), uma vez que na LVF, diferentemente da LPO, não há diferença entre uma fórmula e uma sentença.

Valorações. Alguns textos chamam valorações de *atribuições de verdade*, ou *atribuições de valores de verdade.*

Adequação expressiva. Alguns textos descrevem a LVF como *verdade-funcionalmente completa [truth-functionally complete]*, em vez de expressivamente adequada.

Predicados *n*-ários. Escolhemos chamar predicados ‘de um lugar’, ‘de dois lugares’, ‘de três lugares’, etc. Outros textos os chamam respectivamente de ‘monádicos’, ‘diádicos’, ‘triádicos’, etc. Ainda, outros textos os chamam de ‘unários’, ‘binários’, ‘ternários’, etc.

Nomes. Na LPO, usamos ‘a’, ‘b’, ‘c’, para nomes. Alguns textos os chamam de ‘constantes’. Outros textos não marcam qualquer diferença entre nomes e variáveis na sintaxe. Esses textos focam simplesmente em se o símbolo ocorre *ligado* ou *não ligado.*

Domínios. Alguns textos descrevem um domínio como um ‘domínio de discurso’, ou um ‘universo de discurso’.

1.2 Símbolos alternativos

Na história da lógica formal, diferentes símbolos foram usados em diferentes tempos e por diferentes autores. Frequentemente, autores foram forçados a usar uma notação que suas impressoras pudessem formatar. Este apêndice apresenta alguns símbolos comuns, de maneira que você pode reconecê-los caso os encontre em um artigo ou em outro livro.

Negação. Dois símbolos comuns usados são *o da negação*, ‘$\neg$’, e o *til*, ‘$\sim$.’ Em alguns sistemas formais mais avançados, é necessário distinguir entre dois tipos de negação; a distinção geralmente é representada usando-se tanto ‘$\neg$’ quanto ‘$\sim$’. Textos mais antigos às vezes indicam a negação por uma pequena linha acima da fórmula sendo negada, e.g., $\overline{A \wedge B}$. Alguns textos usam ‘$x \neq y$’ para abreviar ‘$\neg x = y$’.

Disjunção. O símbolo '∨' é tipicamente usado para simbolizar a disjunção inclusiva. Uma etimologia é a partir da palavra latina 'vel', significando 'ou'.

Conjunção. A conjunção frequentemente é simbolizada com o *'e' comercial*, '&'. O 'e' comercial é uma forma decorativa da palavra latina 'et', que signfiica 'e'. (Sua etimologia ainda permanece em certas frontes, particularmente em fontes itálicas; então, um 'e' comercial em itálico pode aparecer como '*&*'.) Este símbolo é comumente usado na escrita natural inglesa (e.g., 'Smith & Sons'), e então mesmo apesar de ser uma escolha natural, muitos lógicos usam um símbolo diferente para evitar confusões entre a linguagem objeto e a metalinguagem: como um símbolo em um sistema formal, o 'e' comercial não é a palavra inglesa '&'. A escolha mais comum agora é '∧', que é uma contraparte ao símbolo usado para a disjunção. Às vezes um único ponto, '•', é usado. Em alguns textos antigos, não há qualquer símbolo para a conjunção; 'A e B' é simplesmente escrito como 'AB'.

Condicional material. Há dois símbolos comuns para o condicional material: o *arrow*, '→', e a *ferradura*, '⊃'.

Bicondicional material. A *dupla seta*, '↔',é usada em sistemas que usam a seta para representar o condicional material. Sistemas que usam a ferradura como condicional tipicamente usam a *barra tripla*, '≡', para o bicondicoinal.

Quantificadores. O quantificador universal tipicamente é simbolizado como um 'A' rotacionado, e o quantificador existencial como um 'E' rotacionado. Em alguns textos, não há um símbolo separado para o quantificador universal. De fato, a variável é apenas escrita entre parênteses na frente da fórmula à qual ela liga. Por exemplo, eles podem escrever '$(x)Px$' onde nós escreveríamos '$\forall x\, Px$'.

Estas tipografias alternativas estão sumarizadas abaixo:

negação	$\neg$, $\sim$
conjunção	$\wedge$, $\&$, $\bullet$
disjunção	$\vee$
condicional	$\rightarrow$, $\supset$
bicondicional	$\leftrightarrow$, $\equiv$
quantificador universal	$\forall x$, (x)

APÊNDICE B

Sistemas alternativos de prova

Ao formular nosso sistema dedutivo, tratamos certas regras de dedução natural como *básicas*, e outras como *derivadas*. Contudo, poderíamos igualmente muito bem ter escolhido várias regras diferentes como básicas ou derivadas. Ilustraremos este ponto ao considerar alguns tratamentos laternativos da disjunção, negação, e dos quantificadores. Explicaremos também por que nós fizemos as escolhas que fizemos.

2.1 Eliminação alternativa da disjunção

Alguns sistemas tomam o DS como sua regra básica para a eliminação da disjunção. Tais sistemas podem então tratar a regra $\vee$E como uma regra derivada. Pois, eles podem oferecer os seguintes esquemas de prova:

m	$\vert\ \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$	
i	$\vert\ \vert\ \underline{\mathscr{A}}$	
j	$\vert\ \vert\ \mathscr{C}$	
k	$\vert\ \vert\ \underline{\mathscr{B}}$	
l	$\vert\ \vert\ \mathscr{C}$	
n	$\vert\ \mathscr{A} \to \mathscr{C}$	$\to$I i–j
$n+1$	$\vert\ \mathscr{B} \to \mathscr{C}$	$\to$I k–l
$n+2$	$\vert\ \vert\ \underline{\neg\mathscr{C}}$	
$n+3$	$\vert\ \vert\ \vert\ \underline{\mathscr{A}}$	
$n+4$	$\vert\ \vert\ \vert\ \mathscr{C}$	$\to$E $n+3$, n
$n+5$	$\vert\ \vert\ \vert\ \bot$	$\neg$E $n+2$, $n+4$
$n+6$	$\vert\ \vert\ \neg\mathscr{A}$	$\neg$I $n+3$–$n+5$
$n+7$	$\vert\ \vert\ \mathscr{B}$	DS m, $n+6$
$n+8$	$\vert\ \vert\ \mathscr{C}$	$\to$E $n+7$, $n+1$
$n+9$	$\vert\ \vert\ \bot$	$\neg$E $n+2$, $n+8$
$n+10$	$\vert\ \mathscr{C}$	IP $n+2$–$n+9$

Então, por que nós escolhemos tomar ∨E como básico, em vez de SD?[1] Nosso raciocínio é que SD envolve o uso de '¬' no enunciado desta regra. É de certa forma 'mais claro' que nossa regra da eliminação da disjunção evite mencionar *outros* conectivos.

2.2 Regras alternativas de negação

Alguns sistemas tomam a seguinte regra como suas regras básicas de introdução da negação:

---

[1] A versão original deste livro, de P.D. Magnus, foi pelo outro caminho.

$$
\begin{array}{l|l|l}
m & & \mathscr{A} \\ \cline{3-3}
n-1 & & \mathscr{B} \\
n & & \neg\mathscr{B} \\
 & \neg\mathscr{A} & \qquad \neg\text{I* } m\text{–}n
\end{array}
$$

e uma versão correspondente desta regra que chamamos de IP como regra básica de eliminação da negação:

$$
\begin{array}{l|l|l}
m & & \neg\mathscr{A} \\ \cline{3-3}
n-1 & & \mathscr{B} \\
n & & \neg\mathscr{B} \\
 & \mathscr{A} & \qquad \neg\text{E* } m\text{–}n
\end{array}
$$

Usando estas duas regras, poderíamos ter evitado todos os usos do símbolo '⊥' completamente. [2]

Outra maneira de lidar com a negação é usar LEM ou DNE como uma regra básica e introduzir IP como uma regra derivada. Tipicamente, em um tal sistema, às regras são dados nomes diferentes, também. Por exemplo, às vezes o que chamamos de ¬E é chamado de ⊥I,e o que chamamos de X é chamado de ⊥E. [3]

Então, por que escolhemos nossas regras para negação e contradição?

Nosso primeiro motivo é que adicionar o símbolo '⊥' ao nosso sistema de dedução natural torna consideravelmente mais fácil trabalhar com provas. Por exemplo, em nosso sistema, é sempre claro o que uma conclusão de uma subprova é: a sentença na última linha, e.g. ⊥ em IP ou ¬I. Em ¬I e ¬E*, subprovas têm duas conclusões, então você não pode checar se uma aplicação delas é correta.

Nosso segundo motivo é que um monte de discussões filosóficas fascinantes se concentraram na aceitabilidade ou não de provas indiretas de IP (de maneira equivalente, i.e. LEM, ou eliminação da dupla

---

[2] Novamente, a versão original deste livro, de P.D. Magnus, foi por outro caminho.

[3] A versão deste livro devida a Tim Button vai por esse caminho e substitui IP por LEM, que ele chama de TND, para "tertium non datur."

negação DNE) e explosão (i.e. X). Ao tratar estas como regras separadas no sistema de prova, você estará em uma posição melhor para engajar naquela discussão filosófica. Em particular: tendo invocado estas regras explicitamente, será muito mais fácil para nós sabermos como seria um sistema que não tivesse estas regras.

Essa discussão e, de fato, a grande maioria dos estudos matemáticos sobre aplicações de provas de dedução natural além dos cursos introdutórios, faz referência a uma versão diferente da dedução natural. Esta versão foi inventada por Gerhard Gentzen em 1935 e refinada por Dag Prawitz em 1965. Nosso conjunto de regras básicas coincide com o deles. Em outras palavras, as regras que usamos são aquelas que são padrão na discussão filosófica e matemática das provas de dedução natural fora dos cursos introdutórios.

2.3 Regras alternativas de quantificação

Uma abordagem alternativa para os quantificadores é a de tomar como básicas as regras para ∀I e ∀E de §32, e também duas regras CQ que nos permitem mover de $\forall x \neg \mathscr{A}$ para $\neg \exists x \mathscr{A}$ e vice-versa.[4]

Tomando apenas estas regras como básicas, poderíamos derivar as regras ∃I e ∃E fornecidas em §32. Derivar a regra ∃I é razoavelmente simples. Suponha que $\mathscr{A}$ contém o nome c, e não contém qualquer instância da variável x, e que queremos fazer o seguinte:

$$\begin{array}{r|l} m & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) \\ & \\ k & \exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots c \ldots) \end{array}$$

Isso ainda não é permitido, uma vez que neste novo sistema, não temos a regra ∃I. Podemos, contudo, oferecer o seguinte:

---

[4] Warren Goldfarb se gue esta linha em *Deductive Logic*, 2003, Hackett Publishing Co.

$$\begin{array}{r|l|l l}
m & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)} & \\ \cline{2-3}
m+1 & & \neg\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots c \ldots) & \\ \cline{3-3}
m+2 & & \forall x \neg\mathscr{A}(\ldots x \ldots c \ldots) & \text{CQ } m+1 \\
m+3 & & \neg\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \forall\text{E } m+2 \\
m+4 & & \bot & \neg\text{E } m+3,\ m \\
m+5 & \multicolumn{2}{l}{\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots c \ldots)} & \text{IP } m+1\text{–}m+4
\end{array}$$

Derivar a regra ∃E é ainda mais sutil. Isso ocorre porque a a regra ∃E tem uma importante restrição (como, de fato, a regra ∀I), e nós precisamos ter certeza de que estamos o respeitando. Então, suponha que estamos em uma situação onde nós *queremos* fazer o seguinte:

$$\begin{array}{r|l|l}
m & \multicolumn{2}{l}{\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)} \\
i & & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) \\ \cline{3-3}
j & & \mathscr{B} \\
k & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{B}}
\end{array}$$

onde c não ocorre em qualquer assunção não eliminada, ou em $\mathscr{B}$, ou em $\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$. Ordinariamente, seríamos permitidos a usar a regra ∃E; mas nós não estamos assumindo aqui que nós aceitamos esta regra como uma regra básica. Todavia, poderíamos oferecer a seguinte derivação, mais complicada:

m	$\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$	
i	$\mid \underline{\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)}$	
j	$\mid \mathscr{B}$	
k	$\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) \rightarrow \mathscr{B}$	$\rightarrow$I i–j
$k+1$	$\mid \underline{\neg\mathscr{B}}$	
$k+2$	$\mid \neg\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$	MT k, $k+1$
$k+3$	$\mid \forall x \neg\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$	$\forall$I $k+2$
$k+4$	$\mid \neg\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$	CQ $k+3$
$k+5$	$\mid \bot$	$\neg$E $k+4$, m
$k+6$	$\mathscr{B}$	IP $k+1$–$k+5$

Somos permitidos a usar ∀I na linha $k + 3$ porque c não ocorre em qualquer assunção não eliminada, porque c não ocorre em $\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$.

Armados com estas regras derivadas, poderíamos agora derivar as duas regras CQ restantes, exatamente como em §36.

Então, por que nós começamos com todas as regras para os quantificadores como básicas, e então derivamos as regras CQ?

Nossa primeira razão é que parece ser mais intuitivo tratar os quantificadores como pareados um com o outro, dando a eles suas próprias regras básicas para introdução e eliminação.

Nossa segunda razão tem a ver com a discussão de regras alternativas de negação. Nas derivações das regras de ∃I e ∃E que nós oferecemos nesta seção, nós invocamos IP. Mas, como mencionado anteriormente, IP é uma regra controversa. Então, se quiermos mover para um sistema que abandona IP, mas que ainda nos permite usar quantificadores existenciais, quereremos tomar as regras de introdução e eliminação de quantificadores como básicas, e tomar as regras CQ como derivadas. (De fato, em um sistema sem IP, LEM e DNE, seremos *incapazes* de derivar a regra CQ, que move de $\neg\forall x \mathscr{A}$ para $\exists x \neg\mathscr{A}$)

APÊNDICE C

Referências rápidas

3.1 Tabelas verdades características

$\mathscr{A}$	$\neg\mathscr{A}$
T	F
F	T

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$	$\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$	$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

3.2 Simbolização

Conectivos Sentenciais

Não é o caso que P	$\neg P$
P ou Q	$(P \vee Q)$
Nem P nem Q	$\neg(P \vee Q)$ or $(\neg P \wedge \neg Q)$
Ambos, P e Q	$(P \wedge Q)$
Se P, então Q	$(P \rightarrow Q)$
P somente se Q	$(P \rightarrow Q)$
P se, e somente se, Q	$(P \leftrightarrow Q)$
P a menos que Q	$(P \vee Q)$

Predicados

Todos os Fs são Gs	$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$
Alguns Fs são Gs	$\exists x(F(x) \wedge G(x))$
Nem todos os Fs são Gs	$\neg\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ or $\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$
Nenhum F é G	$\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$ or $\neg\exists x(F(x) \wedge G(x))$

Identititidade

Apenas c é G	$\forall x(G(x) \leftrightarrow x = c)$
Tudo além de c é G	$\forall x(\neg x = c \rightarrow G(x))$
O F é G	$\exists x(F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow x = y) \wedge G(x))$
Não é o caso que o F é G	$\neg\exists x(F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow x = y) \wedge G(x))$
O F é não-G	$\exists x(F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow x = y) \wedge \neg G(x))$

3.3 Usando identidade para simbolizar quantidades

Há pelo menos _____ Fs.

um $\exists x\, F(x)$

dois $\exists x_1 \exists x_2 (F(x_1) \land F(x_2) \land \neg x_1 = x_2)$

três $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (F(x_1) \land F(x_2) \land F(x_3) \land$
$\neg x_1 = x_2 \land \neg x_1 = x_3 \land \neg x_2 = x_3)$

quatro $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (F(x_1) \land F(x_2) \land F(x_3) \land F(x_4) \land$
$\neg x_1 = x_2 \land \neg x_1 = x_3 \land \neg x_1 = x_4 \land$
$\neg x_2 = x_3 \land \neg x_2 = x_4 \land \neg x_3 = x_4)$

n $\exists x_1 \ldots \exists x_n (F(x_1) \land \ldots \land F(x_n) \land$
$\neg x_1 = x_2 \land \ldots \land \neg x_{n-1} = x_n)$

Há no máximo _____ Fs.

Uma maneira de dizer ‘há no máximo n Fs’ é colocar um sinal de navegação na frente da simbolização para ‘há pelo menos $n + 1$ Fs’. De maneira equivalente, podemos oferecer:

um $\forall x_1 \forall x_2 \big[(F(x_1) \land F(x_2)) \to x_1 = x_2\big]$

dois $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \big[(F(x_1) \land F(x_2) \land F(x_3)) \to$
$(x_1 = x_2 \lor x_1 = x_3 \lor x_2 = x_3)\big]$

três $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \big[(F(x_1) \land F(x_2) \land F(x_3) \land F(x_4)) \to$
$(x_1 = x_2 \lor x_1 = x_3 \lor x_1 = x_4 \lor$
$x_2 = x_3 \lor x_2 = x_4 \lor x_3 = x_4)\big]$

n $\forall x_1 \ldots \forall x_{n+1} \big[(F(x_1) \land \ldots \land F(x_{n+1})) \to$
$(x_1 = x_2 \lor \ldots \lor x_n = x_{n+1})\big]$

Há exatamente _____ Fs.

Uma maneira de dizer ‘há exatamente n Fs’ é unir duas das simbolizações acima e dizer ‘há pelo menos n Fs e há no máximo n Fs’. As fórmulas equivalentes seguintes são mais curtas:

$$\begin{array}{rl}
\text{zero} & \forall x \neg F(x) \\
\text{um} & \exists x \big[F(x) \wedge \forall y (F(y) \rightarrow x = y) \big] \\
\text{dois} & \exists x_1 \exists x_2 \big[F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \\
 & \neg x_1 = x_2 \wedge \forall y \big(F(y) \rightarrow (y = x_1 \vee y = x_2) \big) \big] \\
\text{três} & \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \big[F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge F(x_3) \wedge \\
 & \neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = x_3 \wedge \neg x_2 = x_3 \wedge \\
 & \forall y \big(F(y) \rightarrow (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3) \big) \big] \\
n & \exists x_1 \ldots \exists x_n \big[F(x_1) \wedge \ldots \wedge F(x_n) \wedge \\
 & \neg x_1 = x_2 \wedge \ldots \wedge \neg x_{n-1} = x_n \wedge \\
 & \forall y \big(F(y) \rightarrow (y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n) \big) \big]
\end{array}$$

3.4 Regras de dedução básicas para LVF

Reiteração

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{A} & \text{R } m \end{array}$$

Conjunção

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ n & \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \wedge\text{I } m,\ n \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} & \wedge\text{E } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \\ & \mathscr{B} & \wedge\text{E } m \end{array}$$

Condicional

$$\begin{array}{r|l|ll} i & & \mathscr{A} & \\ \cline{3-3} j & & \mathscr{B} & \\ & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{A} \to \mathscr{B}} & \to\text{I } i\text{–}j \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \to \mathscr{B} & \\ n & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} & \to\text{E } m,\ n \end{array}$$

Negação

$$\begin{array}{r|l|ll} i & & \mathscr{A} & \\ \cline{3-3} j & & \bot & \\ & \multicolumn{2}{l}{\neg\mathscr{A}} & \neg\text{I } i\text{–}j \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\mathscr{A} & \\ n & \mathscr{A} & \\ & \bot & \neg\text{E } m,\ n \end{array}$$

Prova indireta

$$\begin{array}{r|l|ll} i & & \neg\mathscr{A} & \\ \cline{3-3} j & & \bot & \\ & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{A}} & \text{IP } i\text{–}j \end{array}$$

Explosão

$$\begin{array}{r|ll} m & \bot & \\ & \mathscr{A} & \text{X } m \end{array}$$

Disjunção

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{A} \lor \mathscr{B} & \lor\text{I } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} \lor \mathscr{A} & \lor\text{I } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \lor \mathscr{B} & \\ i & \vert\ \underline{\mathscr{A}} & \\ j & \vert\ \mathscr{C} & \\ k & \vert\ \underline{\mathscr{B}} & \\ l & \vert\ \mathscr{C} & \\ & \mathscr{C} & \lor\text{E } m,\ i\text{–}j,\ k\text{–}l \end{array}$$

Bicondicional

$$\begin{array}{r|ll} i & \vert\ \underline{\mathscr{A}} & \\ j & \vert\ \mathscr{B} & \\ k & \vert\ \underline{\mathscr{B}} & \\ l & \vert\ \mathscr{A} & \\ & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \leftrightarrow\text{I } i\text{–}j,\ k\text{–}l \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \\ n & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} & \leftrightarrow\text{E } m,\ n \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \\ n & \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} & \leftrightarrow\text{E } m,\ n \end{array}$$

3.5 Regras derivadas para a LVF

Silogismo disjuntivo

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \lor \mathscr{B} & \\ n & \neg\mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} & \text{DS } m, n \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \lor \mathscr{B} & \\ n & \neg\mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} & \text{DS } m, n \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \to \mathscr{B} & \\ n & \neg\mathscr{B} & \\ & \neg\mathscr{A} & \text{MT } m, n \end{array}$$

Eliminação da dupla negação

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\neg\mathscr{A} & \\ & \mathscr{A} & \text{DNE } m \end{array}$$

Terceiro excluído

$$\begin{array}{r|ll} i & \vert\; \underline{\mathscr{A}} & \\ j & \vert\; \mathscr{B} & \\ k & \vert\; \underline{\neg\mathscr{A}} & \\ l & \vert\; \mathscr{B} & \\ & \mathscr{B} & \text{LEM } i\text{–}j,\ k\text{–}l \end{array}$$

Leis de De Morgan

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg(\mathscr{A} \lor \mathscr{B}) & \\ & \neg\mathscr{A} \land \neg\mathscr{B} & \text{DeM } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\mathscr{A} \land \neg\mathscr{B} & \\ & \neg(\mathscr{A} \lor \mathscr{B}) & \text{DeM } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg(\mathscr{A} \land \mathscr{B}) & \\ & \neg\mathscr{A} \lor \neg\mathscr{B} & \text{DeM } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\mathscr{A} \lor \neg\mathscr{B} & \\ & \neg(\mathscr{A} \land \mathscr{B}) & \text{DeM } m \end{array}$$

3.6 Regras básicas de dedução para LPO

Eliminação universal

m	$\forall x\mathscr{A}(\ldots x\ldots x\ldots)$	
	$\mathscr{A}(\ldots c\ldots c\ldots)$	$\forall$E m

Introdução universal

m	$\mathscr{A}(\ldots c\ldots c\ldots)$	
	$\forall x\mathscr{A}(\ldots x\ldots x\ldots)$	$\forall$I m

c não pode ocorrer em qualquer assunção não eliminada

x não pode ocorrer em $\mathscr{A}(\ldots c\ldots c\ldots)$

Introdução do existencial

m	$\mathscr{A}(\ldots c\ldots c\ldots)$	
	$\exists x\mathscr{A}(\ldots x\ldots c\ldots)$	$\exists$I m

Introdução da identidade

$c = c$	=I

x não pode ocorrer em $\mathscr{A}(\ldots c\ldots c\ldots)$

Eliminação existencial

m	$\exists x\mathscr{A}(\ldots x\ldots x\ldots)$	
i	$\quad\mathscr{A}(\ldots c\ldots c\ldots)$	
j	$\quad\mathscr{B}$	
	$\mathscr{B}$	$\exists$E m, i–j

c não pode ocorrer em qualquer assunção não eliminada, em $\exists x\mathscr{A}(\ldots x\ldots x\ldots)$, ou em $\mathscr{B}$

Eliminação da identidade

m	$a = b$	
n	$\mathscr{A}(\ldots a\ldots a\ldots)$	
	$\mathscr{A}(\ldots b\ldots a\ldots)$	=E m, n

m	$a = b$	
n	$\mathscr{A}(\ldots b\ldots b\ldots)$	
	$\mathscr{A}(\ldots a\ldots b\ldots)$	=E m, n

3.7 Regras derivadas para LPO

$$\begin{array}{r|ll} m & \forall x \neg \mathscr{A} & \\ & \neg \exists x \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \exists x \neg \mathscr{A} & \\ & \neg \forall x \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg \exists x \mathscr{A} & \\ & \forall x \neg \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg \forall x \mathscr{A} & \\ & \exists x \neg \mathscr{A} & \text{CQ } m \end{array}$$

Na Introdução ao seu volume, *Symbolic Logic*, Charles Lutwidge Dodson avisou: “Quando você chega a uma passagem que você não entende, *leia-a novamente*: se você *ainda* não entendê-la, *leia-a de novo*: se você falhar, mesmo depois de *três* leituras, muito provavelmente seu cérebro está ficando um pouco cansado. Neste caso, coloque o livro longe, e ocupe-se com outras coisas, e no próximo dia, quando você o encontrá-lo, muito provavelmente você achará que ele é *um pouco* mais fácil.”

O mesmo poderia ser dito sobre este volume, apesar de os leitores serem perdoados se eles derem um tempo para um lanche depois de *duas* leituras.