METALÓGICA

Uma Introdução à Metateoria da Lógica Clássica de Primeira Ordem

Geoffrey Hunter

Tradução: Nicholas Ferreira
Canal "É Lógico, pô"

NOTA DO TRADUTOR

Esta edição não é oficial e não está completa. Ela não faz parte de nenhum projeto acadêmico nem foi financiada de qualquer maneira. Também não houve uma revisão final dos textos, já que a tradução não foi terminada e, portanto, pode-se esperar alguns erros de digitação, de formatação, numeração de notas de rodapé, etc.

Iniciei o projeto de tradução junto com vários outros, mas não os terminei por precisar dedicar meu tempo a outras atividades pessoais e profissionais. De qualquer forma, espero que o conteúdo traduzido possa servir de introdução ao estudo da metalógica àqueles que têm interesse e desejam começar seus estudos na área.

Nicholas Ferreira, 27/06/2021

Para minha mãe e em memória de meu pai,

Joseph Walter Hunter

Conteúdo

Prefácio

Meu objetivo é tornar acessível a leitores sem qualquer treinamento especializado em matemática, e com apenas um conhecimento elementar em lógica moderna, provas completas dos metateoremas fundamentais da lógica clássica de primeira ordem (i.e., basicamente vero-funcional), incluindo uma prova completa da indecidibilidade de um sistema de lógica de predicados de primeira ordem com identidade.

Muitos livros de lógica elementares param justamente onde o assunto fica interessante. Este livro começa nesse ponto e passa pelas partes interessantes, tanto quanto e incluindo uma prova de que é impossível programar um computador para dar a resposta correta (e nenhuma resposta incorreta) para cada questão da forma 'É — uma verdade da lógica pura?'.

O livro é planejado para não-matemáticos, e conceitos da matemática e teoria dos conjuntos são explicados conforme necessário.

Os conteúdos principais são: Provas da consistência, completude e decidibilidade de um sistema formal da lógica proposicional vero-funcional clássica. O mesmo para a lógica de predicados de primeira ordem monádica. Provas da consistência e completude de um sistema formal de lógica de predicados de primeira ordem. Provas da consistência, completude e indecidibilidade de um sistema formal de lógica de predicados de primeira ordem com identidade. Uma prova da existência de um modelo não-padrão de um sistema formal de aritmética.

Será assumido que o leitor tem um conhecimento elementar dos conectivos vero-funcionais, tabelas verdade e quantificadores. Para o leitor sem conhecimento em teoria dos conjuntos, aqui estão algumas explicações muito breves sobre algumas notações e ideias que serão tomadas como certas posteriormente:

1. A notação de chaves para conjuntos

'$\{Fido, Joe\}$ ' significa 'O conjunto cujos únicos membros são Fido e Joe'. '$\{3, 2, 1, 3, 2\}$' significa 'O conjunto cujos únicos membros são 3, 2, 1, 3, 2' (e este último conjunto é o mesmo que $\{1, 2, 3\}$, i.e., o conjunto cujos únicos membros são os números 1, 2 e 3).

2. A notação epsilon para o pertencimento a conjunto

'$n \in X$' significa 'n é um membro do conjunto X'.

3. O critério de identidade para conjuntos

Um conjunto A é o mesmo conjunto que um conjunto B se e somente se A e B têm exatamente os membros membros. *Nada mais importa* para a identidade de conjuntos.

4. O conjunto vazio, $\emptyset$

Pelo critério de identidade de conjuntos [(3) acima], se A é um conjunto sem membros e B é um conjunto sem membros, então A é o mesmo conjunto que B; então se há um conjunto sem membros, há apenas um tal conjunto. Nós assumiremos que há um tal conjunto.

Mais material introdutório sobre teoria dos conjuntos pode ser encontrado em, por exemplo, cap. 9 de Suppes (1957) ou cap. 1 de Fraenkel (1961).

O livro lida apenas com (1) lógica *padrão* (i.e., basicamente vero-funcional), e (2) sistemas *axiomáticos.*

(1) Lógica clássica de primeira ordem, com sua metateoria, é agora um campo seguro de conhecimento; não é o

todo da lógica, mas é importante, e é um ponto de partida para a maioria dos outros desenvolvimentos na lógica moderna. Pareceu-me que nenhum livro tentou tornar acessível a não-matemáticos provas completas da metateoria básica da lógica clássica: daí este.

(2) Sistemas sem axiomas (então chamados de 'sistemas de dedução natural') estão atualmente se tornando mais populares que sistemas axiomáticos, pois provas formals de teoremas *dentro* de um sistema são geralmente menores e mais fáceis de serem encontradas com um sistema de dedução natural do que com um axiomático. Mas eu acho que provas completas de *metateoremas* (teoremas *sobre* um sistema) são no geral mais longas e trabalhosas para sistemas de dedução natural do que para os axiomáticos; então, uma vez que eu lidarei principalmente com provas de teoremas sobre sistemas e não tanto com provas dentro de sistemas, e uma vez que tudo que se pode obter com um sistema de dedução natural também pode ser obtido com um axiomático, eu deliberadamente me concentrei em sistemas axiomáticos.

Eu espero que o livro equipe aqueles que não são especialistas em matemática não apenas para enfrentar trabalhos mais avançados na lógica clássica, tais como aqueles de Kleene ou Mendelson ou Shoenfield ou Smullyan[1], mas para enquadrar sistemas filosoficamente interessantes de lógicas não-clássicas e para provar metateoremas sobre eles. Pois eu acredito que a tarefa mais urgente do lógico no presente está no campo da lógica não clássica. Há, por exemplo, um senso de 'se' que é crucial para vários argumentos do cotidiano; parece-me claro que 'se' nesse sentido não é um conectivo vero-funcional; e então eu penso que é um escândalo que o sentido ainda não foi adequadamente pego em qualquer sistema formal interpretado com uma metateoria adequada.

[1] Para referências detalhadas, ver pp. 242

Eu comento a tarefa para meus leitores, que encontrarão ajuda em Church (1956) e em Hughes e Cresswell (1968).

Os livros que eu mais pedi emprestado foram Mendelson (1964) e Margaris (1967). Eu agradeço às seguintes pessoas por ideias, informações ou críticas: Ross Brady, John Crossley, John Derrick, Len Goddard, Jeff Graves, Geoffrey Keene, Martin Löb, Angus Macintyre, Timothy Potts, Rowan Rockingham Gill, Harold Simmons, Dick Smith e Bob Stoothoff. Meus predecessores e colegas no Departamento de Lógica e Metafísica na Universidade de Sr. Andrews, e especialmente os professores J. N. Wright e L. Goddard, que fizeram possível que eu me concentrasse nessa parte da lógica, e sme os quais o livro não existiria.

Geoffrey Hunter

St. Andrews,
Dezembro de 1969.

Para correções à primeira impressão eu agradeço Ross Brady, M. J. Cresswell, Rod Girle, John Hall, L. Hodes, Harry Lewis, J. Howard Sobel, e Barry Taylor. Também agradeço ao falecido Richard Montague, quem leu parte do livro para a Editora da Universidade da Califórnia, por críticas em um estágio inicial; a Alan Anderson e Nuel Belnap por seu bonito sistema em §37; e a Czeslaw Lejewski.

G.H.

Outubro de 1972

Parte I.

Parte Um: Introdução: Noções gerais

Para ter uma ideia aproximada do que a metateoria da lógica de primeira ordem é, comece com

(1) *verdades da lógica;*

Distingua-as de

(2) *sentenças-usadas-para-expressar-verdades-da-lógica.*

(Duas diferentes sentenças, e.g. uma em francês e outra em inglês, podem ser usadas para expressar a mesma verdade lógica)

Agora considere

(3) *a teoria das sentenças-usadas-para-expressar-verdades-da-lógica.*

Esta última é, grosseiramente, a *metateoria da lógica.*

A grande diferença entre metateoria nesse sentido grosseiro e a metateoria no sentido desse livro está em (2). Neste livro, as sentenças-usadas-para-expressar-verdades-da-lógica devem ser fórmulas de uma *linguagem formal*, i.e., uma 'linguagem' que pode ser completamente especificada sem qualquer referência, direta ou indireta, ao significado das fórmulas da 'linguagem'. Foi pela insistência neste requerimento que a metateoria da lógica, depois de um longo e interessante mas inconstante história de quase dois mil anos, chegou neste século a produzir exatos e novos e profundos resultados e a dar a promessa de crescimento sistemático.

Então nós começamos com linguagem formais.

1 Linguagens formais

Os objetos básicos da metateoria são *linguagens formais.*

A coisa essencial sobre uma linguagem formal é que, mesmo se for dada uma interpretação, *ela pode ser completamente definida sem referência a qualquer interpretação para ela*: e não é necessário que se dê qualquer interpretação.

Uma linguagem formal pode ser identificada com o conjunto de suas *fórmulas bem formadas* (também chamadas *fórmulas* ou *fbf*). Se o conjunto de todas as fbfs de uma linguagem formal L é exatamente o mesmo que o conjunto de todas as fbfs de uma linguagem formal L', então L é a mesma linguagem formal que L'. Se não, não.

Uma *fórmula* é uma coisa abstrata. Um sinal [*token*] de uma fórmula é uma marca ou uma cadeia de marcas. Duas cadeias diferentes de marcas podem ser símbolos da mesma fórmula. Não é necessário para a existência de uma fórmula que haja qualquer sinal para ela. (Nós queremos, por exemplo, falar de linguagens formais com infinitas fórmulas).

O conjunto de fórmulas bem formadas de uma linguagem formal particular é determinada pela ordem de seu criador, que simplesmente estabelece que coisas devem ser fbfs em sua linguagem. Geralmente ele faz isso especificando

(1) um conjunto de *símbolos* (o *alfabeto* de sua linguagem)

e

(2) um conjunto de *regras de formação* determinando quais sequências de símbolos do seu alfabeto são fbfs em sua linguagem.

Deve ser possível definir ambos os conjuntos sem qualquer referência a uma interpretação: do contrário, a linguagem não seria uma linguagem formal.

A palavra 'símbolos' no último parágrafo é um termo técnico: símbolos, neste sentido técnico da palavra, não precisam ser símbolos de algo, e eles devem ser capazes de ser especificados sem referência a qualquer interpretação para eles.

Símbolos são coisas abstratas, como fórmulas. Um sinal de um símbolo é uma marca ou configuração de marcas.

Grosseiramente, uma linguagem formal poderia ser completamente dominado por uma máquina adequada, sem qualquer entendimento. (Isso requer qualificação onde a linguagem formal tem um alfabeto incontável (ver §10 abaixo): em tal caso não é claro que a linguagem formal poderia ser completamente dominada por qualquer coisa).

Dada uma linguagem formal particular, podemos seguir para fazer uma das duas coisas:

1. Podemos definir a noção de uma *interpretação da linguagem*. Isso nos leva à *teoria dos modelos*.

2. Podemos especificar um *aparato dedutivo* para a linguagem. Isso nos leva para a *teoria da prova*.

Exercícios

1. A linguagem W é definida como se segue:

    Alfabeto: $\triangle$ $\square$

    Fórmulas: Qualquer cadeia finita de símbolos do alfabeto de W que comece com '$\triangle$' é uma fórmula.

    W é uma linguagem formal?

2. A linguagem X é definida como se segue:

    Alfabeto: a b c d e f g

    Fórmulas: Qualquer cadeia finita de símbolos do alfabeto de X que faça uma palavra inglesa é uma fórmula.

    X é uma linguagem formal?

3. A linguagem Y é definida como se segue:

    Alfabeto: a b c d e f g

    Fórmulas: Qualquer cadeia finita de símbolos do alfabeto de Y que não faça uma palavra inglesa é uma fórmula.

   Y é uma linguagem formal?

Respostas

1. Sim.
2. Não. A definição de *fórmula de X* envolve essencialmente a referência ao significado, uma vez que uma coisa é uma palavra inglesa apenas se ela tem um significado. (Para saber que uma coisa é uma palavra você não tem que saber *o que* ela significa, apenas *que* ela tem um significado. Mas mesmo esta referência fraca ao significado é suficiente para evitar que X seja uma linguagem formal) (Outra maneira de se entender: Você poderia programar uma máquina para descobrir se a cadeia de símbolos é uma palavra em algum dicionário inglês especificado, e a máquina poderia fazer isso sem saber o significado de qualquer palavra. Mas, com algumas exceções que podemos ignorar, coisas são incluídas em um dicionário apenas se elas têm um significado ou significados.)
3. Não. Para dizer se uma cadeia de símbolos do alfabeto de Y é ou não uma fórmula de Y você precisa saber se ela é ou não uma palavra inglesa, e então se ela tem ou não um significado. Como, por exemplo, você diria se 'bac', ou 'deg', ou 'ged', ou 'gef', ou 'gegg' é uma fórmula de Y? Apenas descobrindo se ela é uma palavra significativa inglesa. (De fato, 'geg' parece ser a única que não é uma palavra inglesa, e então a única

a ser uma fórmula de Y.)

2 Interpretações de linguagens formais. Teoria dos modelos

Em um termos grosseiros e bem gerais, uma *interpretação* de uma linguagem formal é uma atribuição de significados a seus símbolos e/ou fórmulas.[1] *Teoria dos modelos* é a teoria das interpretações das linguagens formais (um *modelo* de uma fórmula de uma linguagem é uma interpretação da linguagem para a qual a fórmula é tida como verdadeira).[2] Entre os conceitos da teoria dos modelos estão aqueles de *verdade para uma interpretação, consequência semântica (ou modelo-teórica) e validade lógica.*

Exercício.

Dê uma interpretação para a linguagem formal W (§1, exercício 1).

Resposta

Uma possível interpretação seria: Tome '$\triangle$' como significando o mesmo que o dígito (decimal) '1', '$\Box$' como significando o mesmo que o dígito '0', e cada fórmula como significando o mesmo que um numero decimal composto exclusivamente de '1's e '0's. Então, por exemplo, '$\triangle \Box \triangle$' significa o mesmo que '1 0 1' no sistema decimal.

Isso mostra que, em um sentido bem amplo de 'interpretação', uma fórmula interpretada não precisa ser uma

[1] Na Parte 2, restringimos a noção de interpretação a interpretações para as quais cada fórmula interpretada é verdadeira ou falsa. Na parte 3 há uma restrição análoga.

[2] Pelo menos em um sentido padrão de 'modelo', que utilizaremos neste livro. Outro sentido, bastante relacionado com o nosso, será mencionado na Parte 3.

proposição, onde por ‘proposição’ queremos dizer uma sentença expressando algo verdadeiro ou falso. Pode ser, como aqui, o nome de algo. Ou pode ser um adjetivo, ou um advérbio, ou uma preposição, ou uma frase, ou uma cláusula, ou uma sentença imperativa, ou uma sequência de sentenças, ou uma sequência de nomes, ou ... Ou tais nomes podem ser anexados aos símbolos que algumas das nossas fórmulas interpretadas saíram como sem sentido. Posteriormente no livro nós restringimos a noção de interpretação: ver p.6, fn.1 MUDAR REFERÊNCIA

3 Aparatos dedutivos. Sistemas formais. Teoria da prova

Ao especificar um aparato dedutivo para uma linguagem formal nós obtemos um sistema formal.

Um *sistema formal* S é uma linguagem formal L junto com um *aparato dedutivo* dado por

(1)

e/ou

(2)

O aparato dedutivo deve ser definível sem referência a uma interpretação pretendida para a linguagem: do contrário, o sistema não é um sistema formal.

Um aparato dedutivo pode consistir de axiomas e regras de inferência, ou de axiomas sozinhos, ou de regras de inferência sozinhas.

Teoria da prova é a parte da teoria dos sitemas formais (i.e. de linguagens formais com aparatos dedutivos) que não envolve teoria dos modelos de uma maneira essencial (i.e. que não requer qualquer referência a interpretações da linguagem). Entre os conceitos pertencentes à teoria da prova estão aqueles de *prova em um sistema* (ou *prova formal*), *teorema de um sistema* (ou *teorema formal*), *derivação em um sistema* (ou *derivação formal*), e *consequência sintática* (ou *prova-teórica*). Todas elas envolvem essencialmente referência a um aparato dedutivo, e podem todas ser definidas sem dizer qualquer coisa sobre interpretações.

Uma linguagem formal pode ser identificada com o conjunto de todas as suas fbfs. Mas um sistema formal não pod ser identificado com o conjunto de todos os seus teoremas. Pois dois sistemas formais S e S' podem ter exatamente os mesmos teoremas e ainda diferirem de alguma maneira prova-teórica importante: e.g. uma fórmula A que é consequência sintática em S de alguma fórmula B pode não ser uma consequência sintática em S' de B.

Exercícios

Seja Z o sistema dedutivo definido como se segue:

Alfabeto: △ □

Fórmulas: Qualquer cadeia finida de símbolos do alfabeto de Z que comece com um '△' é uma fórmula de Z. Nada mais é uma fórmula de Z.

Axioma: △ □ □ □

Regra de inferência: Qualquer fórmula de Z cujos dois últimos símbolos são um '△' e um '□', nessa ordem, é uma consequência imediata em Z de qualquer fórmula de Z cujos dois primeiros símbolos são um '△' e um '□', nessa ordem. [E.g. '△ □ □ □ △ △ □' é uma consequência imediata em Z de '△ □ △ △ △ □ △'.] Nada mais é uma consequência imediata em Z de qualquer coisa.

1. Z é um sistema formal?

2. '△ △ □' é uma consequência imediata em Z de '△ □ □ □'?
3. '△ □' é uma consequência imediata em Z de '△ □'?
4. '△ □ □ △' é uma consequência imediata em Z de '△ □ □ △'?
5. '□ □ △ △ □' é uma consequência imediata em Z de '△ □ △ △ △ △'?
6. Dê um exemplo de uma consequência imediata em Z de '△ △ △ △ △'.

Respostas

1. Sim.
2. Não.
3. Sim.
4. Não. Apenas fórmulas que terminam com '... △ □' podem ser consequências imediatas em Z.
5. Não. '□ □ △ △ □' não é uma fórmula de Z, uma vez que ela não começa com '△'.
6. Não há. Apenas fórmulas que começam com '△ □' podem ter consequências imediatas em Z.

4 'Sintático', 'Semântico'

Neste livro, 'sintático' e 'semântico' terão os seguintes significados:

Sintático: tem a ver com linguagens formais ou sistemas formais sem lidar essencialmente com sua interpretação.

Semântico: tem a ver com a interpretação de linguagens formais.

‘Sintático’ tem um sentido ligeiramente mais amplo que ‘prova-teórico’, uma vez que ele pode ser aplicado a propriedades de linguagens formais sem aparatos dedutivos, bem como a propriedades de sistemas formais. ‘Semântico’ nesse livro significa apenas ‘modelo-teórico’.

Exercícios

1. É uma propriedade sintática ou semântica de uma fórmula em um sistema Z (§3, exercícios) ela ser uma consequência imediata em Z de outra fórmula de Z?
2. É uma propriedade sintática ou semântica de uma fórmula que ela denota um número?
3. É uma propriedade sintática ou semântica de uma fórmula que ela é verdadeira?

Respostas

1. Sintática.
2. Semântica: a última parte da pergunta pode ser parafraseada como ‘... que ela seja *interpretada* como denotando um número’.
3. Semântica: a última parte da pergunta pode ser parafraseada como ‘... que ela pode ser *interpretada* como expressando algo verdadeiro’.

5 Metateoria. A metateoria da lógica

Metateoria é a teoria de linguagens formais e sistemas e suas interpretações. Ela toma linguagens formais e sistemas e suas interpretações como objetos de estudo, e consiste em um corpo de verdades e conjecturas sobre esses objetos. Entre seus principais problemas estão problemas sobre a *consistência*, *completude* (em vários sentidos), *deci-*

dibilidade (ver §8 abaixo) e *independência* de conjuntos de fórmulas. Tanto a teoria dos modelos quanto a teoria da prova pertencem à metateoria.

A *metateoria da lógica* é a teoria daquelas linguagens formais e sistemas que por um motivo ou outro importam ao lógico. Geralmente o lógico está interessado em uma linguagem formal porque ela tem fórmulas que podem ser interpretadas como expressanado verdades lógicas; e geralmente ele está interessado em um sistema formal porque seus teoremas podem ser interpretados como expressando verdades lógicas ou porque suas regras de transformação podem ser interpretadas como regras de inferência logicamente válidas.

6 Uso e menção. Linguagem objeto e metalinguagem. Provas em um sistema formal e provas sobre um sistema formal. Teorema e metateorema

Em lógica, as palavras 'uso' e 'menção' [ambos são substantivos e verbos] são às vezes usados em um sentido técnico para marcar uma importante distinção, que explicamos por exemplo:

A. 'Londres' é uma palavra com sete letras.

B. Londres é uma cidade.

Em A, a palavra 'Londres' é dita ter sido *mencionada*; em B, a palavra 'Londres' é dita ter sido *usada* (e não mencionada).

Há várias maneiras de indicar que uma expressão está sendo mencionada; e.g. colocá-la entre aspas (como no exemplo), por deixá-la em itálico, ou deixá-la em uma linha apenas para ela. Usaremos alguns desses dispositivos, mas para evitar o uso de aspas e também para tornar o texto mais fácil de ser lido, faremos o uso de uma convenção padrão. Em casos em que o contexto torna claro que expressões estão sendo mencionadas, não usadas, omitiremos às vezes o uso de aspas: e.g. em vez de escrever

'$\supset$' é um conectivo vero-funcional

escreveremos simplesmente

$\supset$ é um conectivo vero-funcional

e em vez de escrevermos

O conjunto {'$\sim$', '$\wedge$', '$\vee$'}

escreveremos simplesmente

O conjunto $\{\sim, \wedge, \vee\}$.

Linguagens formais são às vezes chamadas *linguagens objeto*. A linguagem usada para descrever uma linguagem objeto é chamada sua *metalinguagem*. Nós usamos o português, suplementado por um simbolismos especial (incluindo a simbolização da teoria dos conjuntos), para nossa metalinguagem.

Uma *prova em um sistema formal* que tem axiomas (e todos com os quais lidaremos têm axiomas) é uma cadeia de fórmulas de uma linguagem formal que satisfaz certos requerimentos puramente sintáticos e não tem significado.

Uma *prova sobre um sistema formal* é um pedaço de discurso significativo, expressado na metalinguagem, justificando um enunciado verdadeiro sobre o sistema.

Similarmente, um *teorema de um sistema formal* é uma fórmula de uma linguagem formal que satisfaz certos requerimentos puramente sintáticos e não tem significado, enquanto um *teorema sobre um sistema formal* (também chamado de *metateorema*) é um enunciado verdadeiro sobre o sistema, expressado na metalinguagem.

Exercícios

1. *Dama cristã*: É suficiente para meu argumento que você admita que a existência de Deus, se não certa, é no mínimo provável; ou, se não provável, é no mínimo possível.

   Infiel: Eu não posso fazer tal admissão até eu saber o que você quer dizer com a palavra 'Deus'.

   Charles Braudlaugh, 'Doubts in Dialogue', *National Reformer*, 23 Jan 1887

   a) No diálogo acima, a dama cristã está usando ou mencionando a palavra 'Deus', no sentido especial dos lógicos das palavras 'uso' e 'menção'?
   b) O infiel está usando ou mencionando a palavra 'Deus'?

2. Em cada um dos seguintes casos, diga se a sentença 'feche a porta' é usada ou mencionada:

   a) 'Feche a porta' é usado para fazer um pedido ou ordenar um comando.
   b) Feche a porta.
   c) Eu não sei o que você quer dizer com 'feche a porta'.

3. Em cada um dos seguintes casos, diga se a sentença 'crueldade é errado' é usada ou mencionada:

   a) Crueldade é errada, independentemente das circunstâncias.
   b) As palavras *crueldade é errado* expressam uma

proposição verdadeira.

c) A sentenças 'crueldade é errado' é tipicamente usada para condenar a crueldade.

4. Na seguinte sentença, quais palavras são usadas e quais são mencionadas?

> O que *é* significa é e portanto difere de *é*, pois '*é* é' seria sem sentido.

Bertrand Russell, *My Philosophical Development*, p.63

5. A proposição

> Nem toda cadeia de '$\triangle$' e '$\square$' é uma fórmula no sistema formal Z [de §3]

é um teorema de Z, um teorema sobre Z ou um metateorema?

6. Dado que, para qualquer sistema formal S, qualquer coisa que seja um axioma de S ou uma consequência imediata em S de um axioma de S é um *teorema* de S, diga para cada um dos seguintes se eles são ou não um teorema de Z de §3. [*Nota*: Esta não pretende ser a definição da noção de *teorema formal*, mas meramente uma simplificação para o exercício. A definição usual permite que muitas outras coisas sejam teoremas.]

   a) $\triangle \; \square \; \triangle \; \square$

   b) $\square \; \square \; \triangle \; \square$ [Para Sistema Z, ver p.8 MUDAR REFERÊNCIA]

   c) $\triangle \; \square \; \square \; \square$

   d) '$\triangle \; \square \; \square \; \square$' é um teorema de Z.

7. 'Seja A e B fórmulas arbitrárias de uma linguagem formal L'. Explique a função nessa sentença das letras

‘A’ e ‘B’.

8. No exercício em §3, as aspas são usadas em todos e apenas nos lugares onde elas deveriam estar?

Respostas

1. a) Usando.
   b) Mencionando.
2. a) Mencionada.
   b) Usanda.
   c) Mencionada.
3. a) Usada.
   b) Mencionada.
   c) Mencionada.
4. A sentença tem 15 palavras. Eu penso que as 2ª, 9ª, 11ª e 12ª palavras são mencionadas, as outras são usadas. A 2ª e 9ª palavras são nomes da palavra ‘é’. A primeira das duas palavras entre aspas são nomes da palavra ‘é’; a segunda é a palavra ‘é’. Então, nesse ponto, primeiro o nome da palavra ‘é’ é mencionado, e então a palavra ‘é’ é mencionada.
5. É tanto um teorema sobre Z e um metateorema (sobre Z). Não é uma fórmula de Z, então não é um teorema de Z.
6. a) Sim. (consequência imediata do axioma).
   b) Não (nem ao menos é uma fórmula – começa com um ‘□’)
   c) Sim (axioma).
   d) Não. Não é uma fórmula de Z (nenhuma fórmula

de qualquer uma das linguagens formais deste livro contém uma expressão entre aspas). Mas ele é um metateorema de Z.

7. ‘A’ e ‘B’ aqui são variáveis metalinguísticas, pertencendo à metalinguagem da linguagem L.
8. Espero que sim.

7 A noção de *método efetivo* na lógica e matemática

Ao longo do que se segue, preocupar-nos-emos com métodos efetivos *na lógica e matemática*, e não, por exemplo, com métodos para nos dizer se algo é ou não um ácido.

Na lógica e matemática, um *método efetivo* para resolver um problema é um método para computar a resposta, se seguido corretamente e tanto quanto necessário, que está logicamente ligada a dar a resposta correta (e nenhuma resposta incorreta) em um número finito de passos. Um método efetivo para a resolução de uma classe de problemas é um método efetivo que funciona para cada problema na classe.

Esta não é uma definição muito precisa, mas o conceito não é um conceito preciso, mesmo apesar de pertencer ao campo da lógica, matemática e computação.

Os casos paradigmáticos de métodos efetivos são algoritmos matemáticos, como o algoritmo de Euclides (Livro VII, Prop. 1) para nos dizer se dois inteiros positivos têm ou não algum divisor em comum além de 1, ou seu algoritmo (Livro VII, Prop. 2) para encontrar o maior divisor comum entre dois inteiros positivos que não são primos entre si (i.e que tem algum divisor comum além de 1).

Um método pode ser efetivo mesmo apesar de não ser possível na prática seguir tanto quanto necessário em algum (ou mesmo em qualquer) caso. Por exemplo, há números tão grandes que escrever ou imprimir seus nomes em qualquer notação adequada requeriria mais papel do que há no mundo; então (exceto alguns poderes bem extraordinários da aritmética mental), não seria possível na prática encontrar seu maior divisor comum por meio do algoritmo de Euclides. Ainda assim, mesmo para aqueles números o algoritmo de Euclides é um método efetivo.

Não é necessário para a existência de um método efetivo que ele seja conhecido por alguém em algum momento. Podem existir métodos efetivos que ninguém jamais descubra em toda a história do mundo.

Porque um método efetivo deve ser capaz de ser seguido mecanicamente, sem requerer qualquer discernimento ou imaginação ou talento por parte do usuário, 'método mecânico' é às vezes usado como sinônimo de 'método efetivo'. Nossa definição garante que um método efetivo não requira imaginação ou talento ao tornar uma condição de algo ser um método efetivo que (1) ele seja um método de *computar* e que (2) se seguido corretamente e tanto quanto necessário, ele está *logicamente* ligado a dar a resposta correta.

Uma objeção a nossa explanação de 'método efetivo' é que nós deixamos sem explicação as noções de *computar* e *logicamente ligado*, que são cruciais a ele. Nossa presente resposta a esta objeção é que a noção de um método efetivo é uma noção informal, intuitiva e imprecisa, não uma noção formal e precisa, de maneira que uma explanação do sentido intuitivo está fadado a ser imprecisa. Em uma parte posterior, mencionamos algumas definições sugeridas de efetividade que são precisas e para as quais é afirmado que elas correspondem satisfatoriamente à noção intuitiva. (§52, Tese de Church).

Exercícios

1. 'Pergunte a Deus' é um método efetivo para a resolução de um problema?
2. 'Pergunte a um oráculo' é um método efetivo?
3. 'Pergunte a um oráculo que sempre responde e sempre diz a verdade' é um método efetivo?
4. 'Primeiro diga "sim", e então diga "não"' é um método efetivo para resolver um problema para o qual a resposta correta é de fato 'sim'?
5. 'Teste com papel de tornassol' é um método efetivo (no sentido definido) para dizer se algo é ou não um ácido?
6. 'Nenhuma solução foi encontrada para este problema, então não há um método efetivo para resolvê-lo'. Este é um argumento válido?

Respostas

1. Não. Pois (a) isso não é um método para *computar*, e (b) ele não está logicamente ligado a dar a resposta correta, porque Deus não precisa responder.
2. Não. Mesmos motivos que para 1 acima.
3. Não. Não é um método de *computar*.
4. Não. Confira o requerimento na definição de que o método efetivo *não deve fornecer respostas incorretas*.
5. Não. Não é um método de *computar*. Também não está logicamente ligado a fornecer a resposta correta.
6. Não. Não é necessário para a existência de um método efetivo que ele deva ser conhecido por alguém.

8 Conjuntos decidíveis

Um conjunto é *decidível* se e somente se há um método efetivo para dizer, para cada coisa que possa ser um membro do conjunto, se ele realmente é ou não um membro.

Alguns autores requerem de sistemas formais que o conjunto de provas no sistema seja decidível. Nós não os seguiremos nisso. Em cada um dos sistemas formais principais nesse livro, o conjunto de provas no sistema é de fato decidível. Mas a metateoria de alguns deles se refere ocasionalmente a sistemas que podem ou não ter conjuntos de provas decidíveis: é conveniente chamar tais sistemas de sistemas formais – e é próprio também, uma vez que eles são definidos em termos puramente sintáticos.

Todo sistema *finito* é decidível. Intuitivamente, pense nos membros do conjunto como alinhados em uma fileira. Então, para determinar se algo é um membro do conjunto, verifique se ele é idêntico a alguma das coisas na fileira.

De agora em diante, abreviaremos 'se e somente se' como 'sse'.

Exercício

'Um conjunto é indecidível sse foi provado que não há método efetivo para dizer se algo é ou não um membro dele'. Há algo de errado com este enunciado?

Resposta

Sim. Delete as palavras ‘foi provado que’.

9 Correspondência 1–1. Ter o mesmo número cardinal de. Ter um número cardinal maior (ou menor) que

Há uma *correspondência* 1–1 entre um conjunto A e um conjunto B sse há um método (que não precisa ser conhecido por alguém) de parear todos os membros de A com os membros de B de tal maneira que

(1) cada membro de A seja pareado exatamente com um membro de B

e

(2) cada membro de B seja pareado com exatamente um membro de A. (Segue-se que nenhum membro de qualquer um deles é deixado despareado.)

Dois conjuntos são ditos *terem o mesmo número cardinal* ou *a mesma cardinalidade* sse há uma correspondência 1–1 entre eles.

Um conjunto A *tem um número cardinal maior que* um conjunto B sse há uma correspondência 1–1 entre B e um subconjunto próprio de A, mas não uma correspondência 1–1 entre B e o todo de A. (Um conjunto C é um *subconjunto próprio* de D [escrito: $C \subset D$] sse não há um membro de C que não é membro de D, mas há um membro de D que não é membro de C.)

Um conjunto A tem *um número cardinal menor* que um conjunto B sse B tem um número cardinal maior que A.

O número cardinal de um conjunto é simbolizado ao se escrever duas linhas paralelas acima do nome do conjunto. Então, o número cardinal de um conjunto A é ‘$\overline{\overline{A}}$’, e ‘$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$’

significa ‘os conjuntos A e B têm o mesmo número cardinal’. (Esta notação, que é de Cantor, foi concebida por ele para significar uma abstração dupla: (1) uma abstração da natureza dos membros do conjunto, (2) uma abstração da ordem em que eles são escolhidos. i.e., no que diz respeito ao número cardinal de um conjunto, nem a natureza nem a ordem dos membros do conjunto importam)

Exercício

‘Todo conjunto tem uma correspondência 1–1 consigo mesmo.’ Verdadeiro ou falso?

Resposta

Verdadeiro. O ponto ao incluir este exercício é trazer a noção de que a palavra ‘parear’ em nossa definição de *correspondência* 1–1 é usada de tal maneira que uma coisa pode ser dita ‘*pareada*’ consigo mesma.

10 Conjuntos finitos. Conjuntos enumeráveis. Conjuntos contáveis. Conjuntos incontáveis

Os *números naturais* são os números 0, 1, 2, 3, etc.

Um conjunto é *finito* sse ele tem apenas um número finito de membros; *enumerável* sse há uma correspondência 1–1 entre ele e o conjunto dos números naturais (então um conjunto enumerável é um conjunto infinito); *contável* sse ele é ou finito ou enumerável; *incontável* sse ele não é nem finito nem enumerável (então um conjunto incontável é um conjunto infinito).

0 conta como um membro finito, então o conjunto vazio é um conjunto finito.

A existência de um conjunto incontável será provada em §11, assumindo o Axioma do Conjunto Potência (§11.1).

(A existência de outros conjuntos incontáveis é provada no Apêndice 1, sem apelar para o Axioma do Conjunto Potência).

Um infinito enumerável é o menor tipo de infinito: nenhum conjunto infinito tem uma número cardinal menor que um conjunto enumerável. Então $\aleph_0$ [aleph zero], que é, por definição, o número cardinal do conjunto dos números naturais, é o menor número cardinal transfinito. (O número cardinal de conjuntos infinitos são chamados de cardinais transfinitos).

É uma propriedade característica[1] de qualquer conjunto infinito que há uma correspondência 1–1 entre ele e pelo menos um de seus subconjuntos próprios. Por exemplo, há uma correspondência 1–1 entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados de números naturais, que é um sunconjunto próprio do conjunto dos números naturais:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & \ldots \end{array}$$

Esta correspondência particular era conhecida por Galileu (1638). O reconhecimento mais ou menos claro de que um conjunto infinito pode ter uma correspondência 1–1 com (alguns de) seus próprios subconjuntos próprios remonta a pelo menos os Estóicos (Crísipo?) no terceiro século antes de Cristo. Para referências, veja por exemplo Kleene (1967, p. 176, fn. 121).

[1] Estritamente, isso vale apenas sob a assunção do Axioma da Escolha, um axioma que recomenda a si próprio, tanto por causa de sua plausibilidade intuitiva e porque 'há tantas aplicações importantes em praticamente todos os ramos da matemática que não aceitá-lo seria um mancar intencional do matemático prático' (Mendelson, 1964, p.201). [Para o Axioma da Escolha, veja §59.]

Nenhum conjunto finito pode ter uma correspondência 1–1 com qualquer um de seus subconjuntos próprios. De acordo, C. S. Peirce, em 1885 [*Collected Papers*, iii, §402] tomou a não-existência de uma tal correspondência como uma propriedade definidora de conjuntos finitos, enquanto Dedeking tomou sua existência como uma propriedade definidora de conjuntos infinitos. (Dedekind publicou sua definição em 1888. Ele diz que ele a submeteu a Cantor em setembro de 1882 e a Schwarz e Weber vários anotes depois: cf. Dedeking (1887, fn. para §64)).

Exercícios

1. Mostre que os seguintes conjuntos são enumeráveis:
   a) O conjunto dos inteiros positivos, $\{1, 2, 3, 4, ...\}$.
   b) O conjunto dos números pares, $\{2, 44, 6, 8, ...\}$
   c) O conjunto dos números ímpares,$\{1, 3, 5, 7, ...\}$
   d) O conjunto dos inteiros, $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
   e) O conjunto dos números racionais positivos.[2]
   f) O conjunto dos números racionais.
2. Mostre como cada um dos conjuntos no exercício anterior pode ser colocado em uma correspondência 1–1 com algum de seus subsconjuntos próprios.
3. Mostre que o conjunto dos quadrados de um tabuleiro de xadrez infinito de quadrados de uma polegada é enumerável.
4. Mostre que $\aleph_0 - 1 = \aleph_0$ e que $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, e que, portanto, $\aleph_0 \pm n = \aleph_0$, onde n é um número natural.

[2]Um *número racional* é um número é um número que pode ser expresso pela *razão* de dois inteiros, $\frac{a}{b}$, onde $b \neq 0$: e.g. $\frac{1}{2}$, $\frac{39}{17}$, -15 $[= \frac{-15}{1}]$

5. Mostre que $\aleph_0.\aleph_0 = \aleph_0$.

Respostas

1. a) Aqui está o começo de uma correspondência 1–1 entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros positivos:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \end{array}$$

Para provar a existência de uma correspondência 1–1 entre um conjunto A e o conjunto dos números naturais, é suficiente mostrar como gerar uma sequência infinita de membros de A que conterão, sem repetição, todos os membros de A e nada que não é um membro de A. Então, para as provas restantes, simplesmente escrevemos os primeiros termos das sequências apropriadas geradas através de regras, com explicações ocasionais. [Para mais sobre sequências, veja §12.]

b) 2, 3, 6, 8, ...

c) 1, 3, 5, 7, ...

d) 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... [Aqui, abandonamos qualquer tentariva de tomar os membros do conjunto em ordem de magnitude.]

e) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \left[\frac{2}{2}\right], \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \left[\frac{2}{4}\right], \left[\frac{3}{3}\right], \left[\frac{4}{2}\right], \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \ldots$

(Escrevemos primeiro todo racional positivo cuja soma do numerador e denominador é 2. Há apenas um, a saber, $\dfrac{1}{1}$. Então, escrevemos todos cuja soma do numerador e denominador é 3, colocando números com numeradores menores antes de números com numeradores maiores. Então nós fazemos o mesmo para os racionais cuja soma do numerador e denominador é 4, e assim por diante. Cada vez neste processo em que chegarmos a um número que já ocorreu na sequência é omitida: então, os números em colchetes não estão na sequência; eles foram colocados simplesmente para mostrar como a sequência é obtida.)

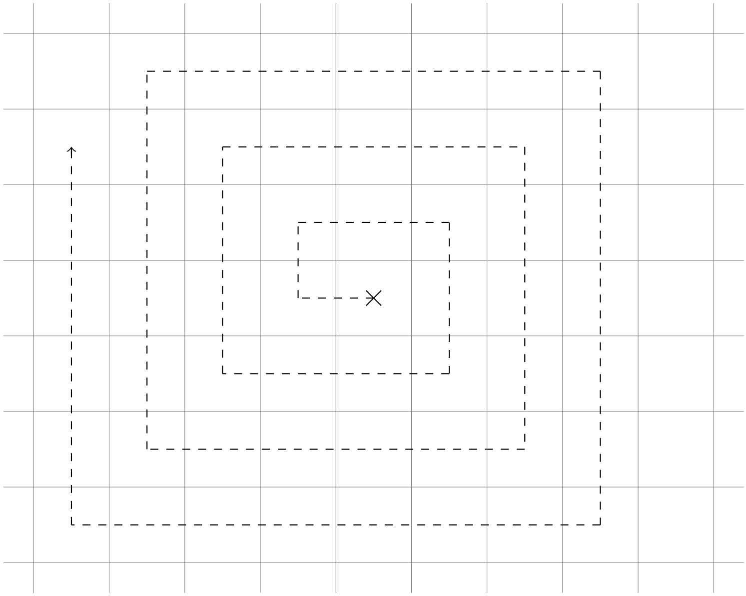
f) 0, 1, -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 2, -2, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, 3, -3, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$, 4, -4, ...

(A sequêcia para (e) é expandida inserindo-se após cada termo o número negativo correspondente, e adicionando-se 0 ao começo.)

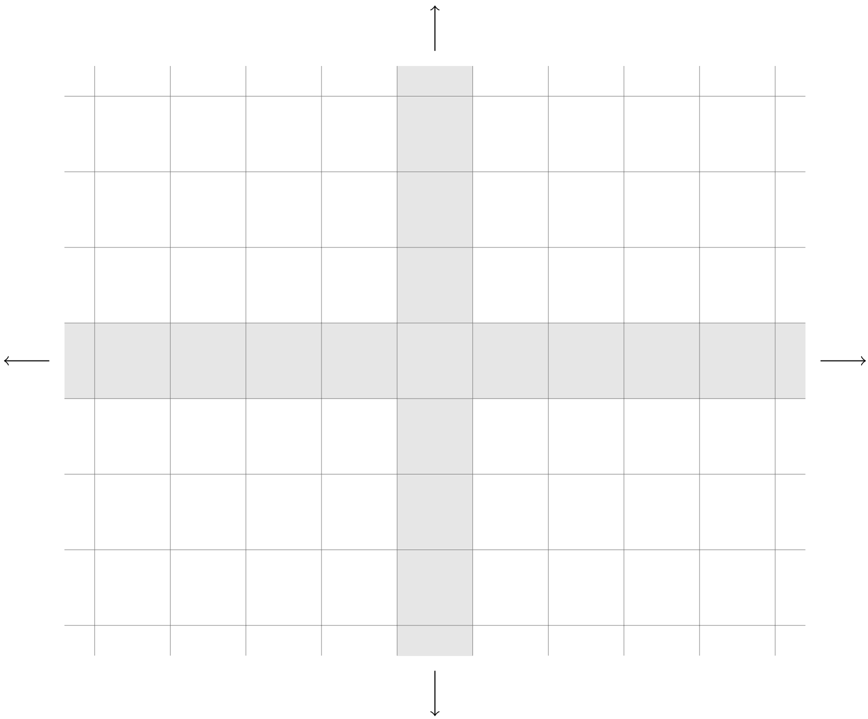
2. Em cada caso, simplesmente pareie o primeiro termo na sequência dada na resposta ao xercício 1 com o segundo termo, o segundo com o terceiro, e assim por diante. Por exemplo, no caso (a):

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & 7\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \end{array}$$

3. Eles podem ser enumerados ao se iniciar por um quadrado arbitrário e seguir o caminho espiral indicado na seguinte figura:



4. Considere a resposta para o exercício 2.
5. Considere a resposta para o exercício 3. O número de quadrados no tabuleiro de xadrez infinito é o produto do número de quadrados ao longo de alguma linha arbitrária no tabuleiro e o número de quadrados ao longo de uma linha perpendicular, que é o produto de $\aleph_0$ e $\aleph_0$:



11 Prova da incontabilidade do conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais

Um conjunto A é um *subconjunto* de um conjunto B [escrito; $A \subseteq B$] sse não há um membro de A que não seja membro de B. O conjunto vazio, $\emptyset$, é um subconjunto de todo conjunto, uma vez que para qualquer conjunto C, não há um membro de $\emptyset$ que não é membro de C, simplesmente porque não há um membro de $\emptyset$. Também, todo conjunto é um sunconjunto de si mesmo. (Por outro lado, nenhum conjunto é um subconjunto *próprio* de si mesmo).

O conjunto de todos os subconjuntos de A é chamado de *conjunto potência* de A. Parece intuitivamente óbvio que o conjunto dos números naturais *tem* o seu conjunto potência, i.e., que *há* um conjunto que tem como membros todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais e nada mais. Mas nós ainda não provamos isso. É comum apelar aqui para um axioma mais geral, a saber,

11.1 (*O axioma do Conjunto Potência*) *Para qualquer conjunto, há o seu conjunto potência*

Este axioma não pode ser tomado como certamente verdadeiro, mas ele parece bem plausível, e nós o assumiremos a partir de agora.

11.2 *O conjunto de todos os sunconjuntos do conjunto dos números naturais é incontável*

Prova. Claramente, o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais não é finito. Para cada número natural há o conjunto que tem esse número como seu único membro; há enumeravelmente vários conjuntos assim, e cada um é um subconjunto do conjunto dos números naturais.

Agora, suponha que alguém afirme que ele encontrou uma correspondência 1–1 entre o conjunto dos números naturais e o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais. Mostraremos como uma tal afirmação pode ser refutada.

Suponha que a alegada correspondência 1–1 comece assim:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0 ↔ a classe dos números naturais	S	S	S	S	S	S	S	S	S	...
1 ↔ a classe vazia	N	N	N	N	N	N	N	N	N	...
2 ↔ a classe dos números ímpares	N	N	S	N	S	N	S	N	S	...
3 ↔ a classe dos números pares	N	N	S	N	S	N	S	N	S	...
4 ↔ a classe dos números primos	N	N	S	S	N	S	N	S	N	...
5 ↔ a classe dos quadrados de n.n	S	S	N	N	S	N	N	N	N	...
6 ↔ a classe dos cubos de n.n	S	S	N	N	N	N	N	N	S	...
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

[Do lado direito da tabela nós escrevemos ‘S’ sob um número se ele é um membro do conjunto mencionado a sua esquerda, e ‘N’ caso contrário.][1]

Nós usamos o *argumento da diagonal de Cantor* para mostrar que a suposta correspondência 1–1 do nosso afirmador imaginário não é uma correspondência 1–1 no final das contas. Pois nós podemos definir um subconjunto do conjunto dos números naturais que não ocorra em seu pareamento, a saber, o subconjunto definido ao se iniciar pelo canto superior esquerdo da matriz à direita e ir descendo a diagonal trocando cada ‘S’ por ‘N’ e cada ‘N’ por ‘S’, assim:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
N	S	S	S	S	S	S	S	S	...
N	**S**	N	N	N	N	N	N	N	...
N	N	**N**	N	S	N	S	N	S	...
N	S	N	**N**	N	S	N	S	N	...
N	N	S	S	**S**	S	N	S	N	...
S	S	N	N	S	**S**	N	N	N	...
S	S	N	N	N	N	**S**	N	S	...
.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	

Ao descer pela diagonal, vemos que entre os números deste conjunto estarão os números 1, 4, 5 e 6. O conjunto

[1] NT: ‘Conjunto’ [*set*] foi traduzido como ‘classe’ aqui para manter a uniformidade da tabela

assim definido é um subconjunto do conjunto dos números naturais que difere de cada conjunto no pareamento original em pelo menos um membro.

Este foi o único exemplo particular. É claro, porém, que para *qualquer* pareamento 1–1 dos subconjuntos do conjunto dos números naturais com os números naturais, um argumento da diagonal similar produziria um subconjunto do conjunto dos números naturais que *não* estão no pareamento. Então, nós temos de maneira geral:

> Não há uma correspondência 1–1 entre o conjunto dos números naturais e o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais.

Então, o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais não é enumerável. Nós vimos que ele não é finito. Então ele é incontável.

Q.E.D.

O leitor pode por um momento pensar que poderíamos dar a volta no argumento da diagonal ao adicionar o novo subconjunto no topo da lista, pareando-o com o número 0 e deslocando cada um dos outros subconjuntos em uma casa. Isso não ajudaria. Pois uma nova aplicação do argumento da diagonal produziria outro subconjunto que não estaria na lista. E assim por diante, sem fim. Qualquer tentativa de parear os subconjuntos do conjunto dos números naturais com o conjunto dos números naturais deixa de fora não apenas um, mas infinitos subconjuntos (na verdade, incontáveis: cf. 13.6 abaixo).

Há uma correspondência 1–1 entre o conjunto dos números naturais e o conjunto cujos membros são $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ e assim por diante. Este último conjunto é um subconjunto próprio do conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais. Então nós temos: Há uma correspondência 1–1 entre o conjunto dos números naturais e um subconjunto próprio do conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais, mas não há uma correspondência 1–1 entre o conjunto dos números naturais e o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais. Portanto, *o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais tem número cardinal maior que o conjunto dos números naturais* (cf. a definição de *ter um número cardinal maior que* em §9).

Ao usar uma forma geral e abstrata do argumento da diagonal, Cantor mostrou que *o conjunto potência de um conjunto sempre tem uma cardinalidade maior que o próprio conjunto*. Isso é conhecido como *o Teorema de Cantor*. Uma prova dele é dada em letras pequenas abaixo; abaixo disso há um exemplo que pode ajudar em seu entendimento.

Dada a existência de qualquer conjunto infinito, a verdade do axioma do Conjunto Potência e o Teorema de Cantor, segue-se que há uma sucessão inacabável de diferentes e cada vez maiores conjuntos infinitos – 'o paraíso que Cantor criou para nós' (Hilbert, 1925).

A seguinte prova do Teorema de Cantor pode ser pulada em uma primeira leitura:

Teorema de Cantor: O conjunto potencia de um conjunto tem número cardinal maior que o próprio conjunto

Prova

1. Seja A qualquer conjunto. Considere *qualquer* pareamento de membros de A com os membros do conjunto potência de A que atribua cada membro distinto de A a um subconjunto distinto de A. Seja S o conjunto de todos os membros de A que não são membros do subconjunto

atribuído a eles. S é um subconjunto de A. Mas S não é atribuído a qualquer membro de A. Pois, suponha que ele fosse atribuído a um membro, digamos, x, de A. Então x seria um membro de S se e somente se ele não fosse um membro de S. Isso é uma contradição. Então, qualquer pareamento de membros distintos de A com membros distintos do conjunto potência de A deixa algum membro do conjunto potência despareado. Então não há uma correspondência 1–1 entre A e seu conjunto potência.

2. Resta mostrar que há uma correspondência 1–1 entre A e um subconjunto próprio do conjunto potência de A. Isso é fácil. Tome como subconjunto próprio o conjunto de todos os conjuntos que têm como único membro um membro de A.

Exemplo. Seja A o conjunto $\{1, 2, 3\}$. Então, o conjunto potência de A é o conjunto

$$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

A tem três membros. O conjunto potência de A tem oito membros. Não há uma correspondência 1–1 entre A e seu conjunto potência; mas há uma correspondência 1–1 entre A e um subconjunto próprio de seu conjunto potência: tome, por exemplo, o subconjunto $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

O Teorema de Cantor é mais ou menos óbvio para conjuntos finitos. O que Cantor fez foi mostrar que ele vale para conjuntos infinitos também.

12 Sequências. Enumerações. Enumerações efetivas

Na matemática, uma sequência é uma função de um certo tipo. Mas nós usaremos esta palavra de maneira intuitiva. Uma *sequência* é um ordenamento de objetos, chamados *termos* da sequência. A mesma coisa pode ocorrer mais de uma vez no ordenamento; por exemplo, $\langle 1, 2, 3, 1\rangle$ é uma sequência de quatro termos com o número 1 ocorrendo como primeiro e quarto termo. Uma sequência s é a mesma que uma sequência s' sse s e s' têm exatamente o mesmo número de termos e o primeiro termo de s é o mesmo que o primeiro termo de s', o segundo termo de s é o mesmo que o segundo termo de s', e assim por diante. Então, por exemplo, $\langle 1, 2, 1\rangle \neq \langle 1, 2\rangle$, e $\langle 1, 2, 3\rangle \neq \langle 3, 2, 1\rangle$.

Uma sequência de n termos é também chamada de n-upla.

Uma sequência pode ser finita ou infinita. Uma sequência enumerável é uma sequência com termos enumeráveis, e pode ser simbolizada ao colocar os primeiros termos e então reticências; por exemplo, $\langle 1, 2, 3, ...\rangle$ e $\langle 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...\rangle$ e $\langle 4, 9, 13, 5, 5, 5, ..., 5, ...\rangle$ são sequências enumeráveis. Na última, todo termo a partir do quarto é o número 5.

Nos exemplos dados acima, todos os termos em todas as sequências são números. Mas, assim como há conjuntos com coisas além de números como membros, também há sequências com coisas além de números como membros.

Uma *enumeração* de um conjunto A é uma sequência finita ou enumerável da qual todo membro de A é um termo e todo termo é um membro de A. Por exemplo, as sequências $\langle 3, 1, 2\rangle$ e $\langle 1, 2, 3, 1\rangle$ são ambas enumerações do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Uma *enumeração efetiva* é uma enumeração que é finita ou para a qual há um método efetivo de se dizer qual é o n-ésimo termo, para todo número positivo inteiro n. (Toda enumeração finita é efetiva, porque há um método efetivo – lembre-se que ele não precisa ser conhecido por alguém –

para enumerar os membros de qualquer conjunto finito.)

Exercícios

1. 'Se há uma enumeração com repetições de um conjunto A, então há uma enumeração sem repetições do conjunto A'. Verdadeiro ou falso?
2. a) Se no exercício 1 acima 'enumeração efetiva' for substituída por 'enumeração' em ambos os casos, o enunciado resultante seria verdadeiro?

   b) Se fosse, descreva um método para calcular o n-ésimo termo da nova enumeração. Se não, diga o porquê.

Resposta

1. Verdadeiro. Simplesmente delete repetições.
2. a) Sim.

   b) Calcule o primeiro termo da sequência antiga. Coloque-o como o primeiro termo da nova. Calcule o segundo termo da antiga. Coloque-o como o segundo termo da nova *a menos que* ele seja idêntico a algum termo anterior na sequência nova. Após cada adição à nova sequência, verifique quantos termos você adicionou a ela. Cedo ou tarde você obterá o n-ésimo termo da nova sequência (se houver um n-ésimo termo), e você saberá que ele é o n-ésimo.

13 Alguns teoremas sobre conjuntos infinitos

13.1 *Qualquer subconjunto de um conjunto contável é contável*

Prova. Seja A um conjunto contável arbitrário e B um subconjunto arbitrário de A.

(a) Se A é finito, então obviamente B é finito e então contável.

(b) Se A é enumerável, então (por definição) há uma correspondência 1–1 entre ele e o conjunto dos números naturais, e então há uma sequência enumerável que enumera A sem repetições. Delete dessa sequência todos os termos que não são membros de B e o resultado é uma sequência finita ou enumerável que enumera B sem repetições. Então B é contável.

A *união* de dois conjuntos A e B [escrito: $A \cup B$] é o conjunto que tem como membros todos os membros de A e todos os membros de B.

13.2 *A união de um conjunto enumerável e um conjunto finito é enumerável*

Prova. Seja A qualquer conjunto enumerável e B qualquer conjunto B. Deixe B ter exatamente n membros. Então, os membros de B podem ser pareados com os primeiros n números naturais (a saber, 0, 1, ..., n-1), e os membros de A com os números naturais de n em diante, primeiro deletando todos os membros de A que são também membros de B.

13.3 *A união de um conjunto enumerável e um conjunto enumerável é um conjunto enumerável*

Prova. Tome membros de cada conjunto alternadamente, deletando qualquer repetição. Exemplo: Seja A o conjunto dos números primos, $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$, e B o conjunto dos números ímpares, $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...\}$. Então, a união de A e B pode ser enumerada da seguinte maneira:

$\langle 2, 1, 3, \cancel{3}, 5, \cancel{5}, 7, \cancel{7}, 11, 9, 13, \cancel{11}, 17, \cancel{13}, 19, 15 \rangle$

Dadas as provas de 13.2 e 13.3, as provas dos dois seguintes teoremas são fáceis, e serão deixadas para o leitor:

13.4 *A união de um conjunto contável e um conjunto finito é contável*

13.5 *A união de um conjunto contável e um conjunto contável é contável*

A – B é o conjunto que tem como membros todos aqueles que são membros de A e não são membros de B.

13.6 *A remoção de um conjunto incontável de um conjunto com membros contáveis resulta em um conjunto incontável restante*

Prova

(a) [O caso onde finitos membros são subtraídos.] Seja A qualquer conjunto incontável e B qualquer conjunto finito de membros de A. Suponha que A – B fosse contável. Então, por 13.4, a união de A – B com B seria contável. Mas a união de A – B com B é o próprio A, e por hipótese, A é incontável. Então A – B deve ser incontável.

(b) [O caso onde enumeráveis membros são subtraídos.] Seja A qualquer conjunto incontável, e B qualquer conjunto enumerável de membros de A. Suponha que A – B fosse contável. Então, por 13.5, a união de A – B com B seria contável. Mas a união de A – B com B é o próprio A, e por hipótese, A é incontável. Então, A – B deve ser incontável.

14 Prova informal da incompletude de qualquer sistema formal finitário da teoria dos números naturais completa

Por 'sistema formal infinitário' queremos significar um alfabeto enumerável de símbolos, fbfs com tamanho finito, e regras de inferência (se houver) usando apenas premissas finitas. (Nos últimos anos, lógicos trabalharam em sistemas com alfabetos incontáveis, com infinitas fbfs, com regras de inferência tendo infinitas premissas, etc.)

Um sistema formal da teoria completa dos números naturais é um sistema formal cujos teoremas (alguns ou todos) podem ser interpretados como expressando verdades da teoria completa dos números naturais. Um tal sistema será dito *incompleto* se houver verdades da teoria completa dos números naturais que não são teoremas do sistema [i.e verdades que não são expressadas por qualquer teorema do sistema, em sua interpretação pretendida].

A teoria completa dos números naturais é aqui tomada como incluindo, entre outras coisas, todas as verdades no sentido de que um determinado número natural é um membro de algum conjunto particular de números naturais. Lembre-se que um conjunto A é idêntico ao conjunto B se e somente se A tem exatamente os membros que B, e que essa identidade não é afetada por mudanças radicais nas especificações de A e B. [Por exemplo, se o único número em que eu estou agora pensando é o número 17, então o conjunto dos números-em-que-eu-estou-pensando é idêntico ao conjunto cujo único membro é o número 17]

14.1 *Qualquer sistema formal finitário tem apenas finitas fbfs e portanto apenas finitos teoremas*

Prova

Estágio 1. Um alfabeto enumerável não tem maiores poderes de expressão que um alfabeto finito, ou mesmo que um alfabeto de dois símbolos. Pois, suponha que tenhamos um alfabeto enumerável com símbolos $a_1, a_2, a_3, \dots$ Então, há uma correspondência 1–1 entre ele e o conjunto $\{10, 100, 1000\}$ de cadeias de símbolos do alfabeto cujos únicos símbolos são 0 e 1; e essas cadeias do alfabeto finito podem ser usadas para fazer o que quer que possa ser feito com os símbolos do alfabeto enumerável.

Estágio 2. O conjunto de fbfs distintas finitas que podem ser obtidas a partir de um alfabeto finito é contável. *Prova.* Substitua cada símbolo do alfabeto por um '1' seguido por uma cadeia de um ou mais zeros, como no estágio 1. Cada fbf então se torna um numeral composto exclusivamente de uns e zeros e começando com um.[1] A cada fbf distinta corresponde um número distinto. Cada um desses números representa um número distinto. Há apenas enumeráveis números naturais, então há no máximo enumeráveis fbfs. Então, o conjunto de fbfs de qualquer sistema formal finitário é contável. Em qualquer sistema formal, todo teorema é uma fbf. Então o conjunto de teoremas de qualquer sistema finitário formal também é contável.

14.2 *Há incontáveis verdades da teoria completa dos números naturais*

Prova. A cada um dos incontáveis subconjuntos do conjunto dos números naturais [ver 11.2] corresponde uma verdade distinta da teoria dos números naturais, a saber, a

[1] Por exemplo, suponha que o alfabeto consista dos quatro símbolos

$$\mathrm{p} \supset (\ )$$

Substitua esses em qualquer fbf por

$$10\ 100\ 1000\ 10000$$

respectivamente. Então, (por exemplo) a fbf

$$(p \supset p)$$

se torna

$$1000101001010000.$$

verdade que zero[2] é (ou que não é, conforme o caso) é um membro desse subconjunto. Portanto, há pelo menos tantas verdades da teoria completa dos números naturais quanto há subconjuntos do conjunto dos números naturais, e então há incontáveis tais verdades.

14.3 *Qualquer sistema formal finitário da teoria completa dos números naturais é incompleto, no sentido explicado [veja o parágrafo 2 dessa seção]*

Prova. Por 14.1, qualquer sistema formal finitário da teoria completa dos números naturais tem apenas contáveis teoremas (formais). Na interpretação pretendida, cada teorema formal terá apenas um significado definido não ambíguo e, se ele for verdadeiro na interpretação pretendida, expressará apenas uma verdade. Pela simplicidade, assumiremos que na interpretação pretendida, cada teorema distinto expressa uma verdade distinta da teoria completa dos números naturais. [Há outras possibilidades: por exemplo, dois teoremas distintos podem expressar a mesma verdade, ou alguns teoremas podem expressar falsidades, ou alguns podem expressar verdades que não são verdades da teoria completa dos números naturais. Uma prova completa cobriria essas possibilidades, usando o teorema 13.1 de que qualquer subconjunto de um conjunto contável é contável.] Também pela simplicidade, identificaremos teoremas interpretados com as verdades que eles expressam. Então nós temos: Qualquer sistema finitário formal da teoria completa dos números naturais incluirá entre seus teoremas interpretados apenas verdades contáveis da teoria completa dos números naturais. Mas, por 14.2, há incontáveis tais verdades. Então, por 13.6, qualquer sistema finitário formal falhará em incluir entre seus teoremas interpretados incontáveis tais verdades.

[2] Não há nada de especial sobre o zero aqui; qualquer outro número natural serviria

Portanto, qualquer sistema finitário formal da teoria completa dos números naturais é incompleto.

Q.E.D.

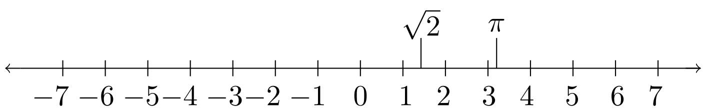
Apêndice 1: Teoria infuitiva dos conjuntos infinitos e números cardinais transfinitos

Provas informais a seguir. Alguns teoremas são deixados sem prova. O material não é essencial para o resto do livro.

Números reais. Considere uma linha reta infinita marcada em unidades, como na figura da página 40. A cada número racional (i.e, número que pode ser expresso pela razão de dois inteiros) corresponde um ponto na linha. Mas há muitos pontos na linha para os quais nenhum número racional corresponde, por exemplo os pontos marcados $\sqrt{2}$ e π. Nem $\sqrt{2}$ nem π podem ser expressos pela razão de dois inteiros, mas ainda assim $\sqrt{2}$ e π correspondem a pontos na linha. Números que correspondem dessa forma a pontos em uma linha mas que não são expressíveis pela razão de dois inteiros são chamados de *números irracionais.* O conjunto dos *números reais* é a união do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais, e pode ser pensado como sendo o conjunto dos números correspondendo aos pontos em uma linha infinita.

O *continuum* (real) é o conjunto dos números reais, em sua ordem natural.

O *continuum linear* é o conjunto de todos os pontos em uma linha infinita.



Teorema A1. O número cardinal do continuum (real) é o mesmo que o número cardinal do continuum linear

Então, a partir de agora nós podemos falar simplesmente de 'o número cardinal do continuum'.

Notação. O número cardinal do continuum é $\mathfrak{c}$ [a letra alemã minúscula 'c']

Nós faremos um bom uso dos dois seguintes teoremas, que enunciamos sem prova:

Teorema A1. A adição a, ou subtração de, um conjunto infinito de infinitas coisas produz um conjunto com o mesmo número cardinal que o original

Esta é uma extensão de 13.2, que cobria apenas conjuntos enumeráveis. A2 cobre também conjunto incontáveis, e sua prova envolve o axioma da escolha, que está além do escopo deste livro.

Teorema A3. A subtração de um conjunto enumerável de um conjunto incontável produz um conjunto com o mesmo número cardinal que o conjunto incontável

Teorema A4. O conjunto dos números reais é incontável [Cantor, 1873]

Prova. Três estágios:

1. Todo número real pode ser representado unicamente por um número decimal sem terminação. Aqueles que seria natural representar por decimais com terminação serão representados por naturais sem terminação equivalentes: por exemplo, o número real $3\frac{1}{4}$ por 3.24999999..., não por 3.25; o número 1 por 0.999999....

2. Nós nos concentramos primeiro no conjunto dos números reais maiores que 0 e menores que ou iguais a 1. Este conjunto claramente não é finito. Agora, suponha

que cada número natural distinto é pareado com um número real distinto, representado por um decimal sem terminação. É fácil mostrar por um argumento da diagonal que qualquer tal pareamento deixa algum número real despareado. Pois qualquer pareamento começa assim:

$$\begin{array}{ll} 0 & 0.ddddddd... \\ 1 & 0.ddddddd... \\ 2 & 0.ddddddd... \end{array}$$

onde cada d é algum dígito (i.e um numeral de 0 a 9), possivelmente todos o mesmo, possivelmente não. E é claro que qualquer numeral que começa pelo zero, então um ponto decimal, então, um dígito diferente do primeiro d na diagonal (mas não 0), então um dígito diferente do segundo d na diagonal (mas não 0), e assim por diante, representará um número real maior que 0 e menor ou igual a 1 que não está pareado com qualquer número natural. Então o conjunto dos números reais maiores que 0 e menores que ou iguais a 1 é incontável.

3. Pelo teorema A2, o conjunto dos números reais maiores que 0 e menores ou iguais a 1 deve ter o mesmo número cardinal que o conjunto dos números reais maiores que 0 e menores que 1, que tem o mesmo número cardinal que o conjunto de pontos, além das extremidades, de uma linha com uma unidade de comprimento. A figura na página 48 mostra que há uma correspondência 1–1 entre este último conjunto e o conjunto de pontos em uma linha infinita, e, consequentemente, entre ele e o conjunto de todos os números reais. Então, o conjunto dos números reais é incontável.

Q.E.D.

Uma vez que o conjunto dos números naturais é um subconjunto próprio do conjunto dos números reais, temos como corolário do Teorema A4:

Teorema A5. $\mathfrak{c} > \aleph_0$

Teorema A5. Cada um dos seguintes conjuntos tem o número cardinal do continuum:

A. *O conjunto dos números reais x tal que* $0 \leqslant x \leqslant 1$

B. *O conjunto dos números reais x tal que* $0 < x \leqslant 1$

C. *O conjunto dos números reais x tal que* $0 \leqslant x < 1$

D. *O conjunto dos números reais x tal que* $0 < x < 1$

E. *O conjunto dos números reais não negativos*

Prova

(Conjuntos A, B, C, D) A é B com uma coisa extra, a saber, o número 0. C é A com um membro a menos, a saber, o número 1. D é C com um membro a menos, a saber, o número 0. Nós já provamos que B tem o número cardinal do continuum [durante a prova do Teorema A4]. O mesmo ocorreu com A, pelo Teorema A2. Então, C tem, pelo Teorema A2 aplicado ao resultado para A. Então D tem, por A2 aplicado ao resultado para C.

(Conjunto E) E tem D como um subconjunto próprio. Então, se não há uma correspondência 1–1 entre E e D, $\overline{\overline{D}} < \overline{\overline{E}}$ (pela definição de $<$ para cardinais transfinitos); e se há uma correspondência 1–1, $\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{E}}$. Mas ou há ou não há uma correspondência 1–1 entre E e D. Então $\overline{\overline{D}} \leqslant \overline{\overline{E}}$. Similarmente, $\overline{\overline{E}} \leqslant \overline{\overline{R}}$, onde R é o conjunto de todos os números reais. Mas $\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{R}} = \mathfrak{c}$. Então nós temos:

$$\mathfrak{c} = \overline{\overline{D}} \leqslant \overline{\overline{E}} \leqslant \overline{\overline{R}} = \mathfrak{c}.$$

Então, $$\mathfrak{c} \leqslant \overline{\overline{E}} \leqslant \mathfrak{c}.$$

Então, $$\overline{\overline{E}} = \mathfrak{c}.$$

(Uma prova geométrica do mesmo resultado é fornecida abaixo: Teorema A8H.)

Teorema A7. O conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais (o conjunto potência do conjunto dos números naturais) tem o número cardinal do continuum

Prova

Todo conjunto de números naturais pode ser unicamente representado por uma cadeia enumerável de 'Sim's e 'Não's, como nas tabelas em §11. Por exemplo, a cadeia que começa com

Sim Sim Não Não Sim Não

e segue em diante apenas com 'Não' representa o conjunto $\{0, 1, 4\}$. Então, há uma correspondência 1–1 entre o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números naturais e o conjunto de cadeias enumeráveis de 'Sim's e 'Não's. E há umaa correspondência 1–1 entre este último conjunto e o conjunto de cadeias enumeráveis de '1's e '0's. Por exemplo, a cadeia de 'Sim's e 'Não's mencionada acima corresponde à cadeia que começa com

1 1 0 0 1 0

e segue em diante apenas com '0's.

Coloque o equivalente binário de um ponto decimal na frente de uma cadeia enumerável de '1's e '0's e você obtem uma expressão que, no sistema binário, denota um número real $\geqslant 0$ e $\leqslant 1$. Por exemplo, a expressão que começa com

. 1 1 0 0 1 0

e segue em diante apenas com '0's denota o número real

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{0}{16} + \frac{1}{32} + \frac{0}{64} + 0$$

i.e. o número real $\frac{25}{32}$. Cada cadeia enumerável de '1's e '0's, precedida por um ponto binário, representa um número real $\geqslant 0$ e $\leqslant 1$, e cada número real $\geqslant 0$ e $\leqslant 1$ é representado por alguma cadeia. Mas não há uma correspondência 1–1, uma vez que alguns números são representados por mais de uma cadeia. Por exemplo, o número $\frac{1}{4}$ é representado tanto por

. 0 1 0 0 0 0 0 ...

quanto por

. 0 0 1 1 1 1 1 ...

Contudo, se tirarmos do conjnto de cadeias o conjunto de todas as cadeias que a partir de algum ponto consistem inteiramente de '0's, *haveria* uma correspondência 1–1 entre o conjunto de cadeias que restou e o conjunto de números reais > 0 e $leqslant 1$. Mas o conjunto de todas as cadeias enumeráveis de '1's e '0's que a partir de algum ponto consistem inteiramente de '0's pode ser *enumerado* (deixamos isso como um exercício para o leitor). E a subtração de um conjunto enumerável de um conjunto incontável produz um conjunto com a mesma cardinalidade que o conjunto incontável [Teorema A3]. Então nós temos, usando $\sim eq$ para 'tem uma correspondência 1–1 com':

> O conjunto de subconjuntos do conjunto dos números naturais $\sim eq$ O conjunto das cadeias enumeráveis de 'sim's e 'não's $\sim eq$ O conjunto de cadeias enumeráveis de '1's e '0's $\sim eq$ O conjunto de cadeias enumeráveis de '1's e '0's além daquelas cadeias que a partir de algum ponto consistem inteiramente de '0's $\sim eq$ O conjunto de númeroas reais $\geqslant 0$ e $\leqslant 1 \sim eq$ O conjunto dos números reais.

Então, o conjunto dos subconjuntos do conjunto dos números naturais tem o número cardinal do continuum.

Q.E.D.

Teorema A8. Cada um dos seguintes conjuntos tem o número cardinal do continuum:

F. *O conjunto dos pontos em uma linha com uma unidade arbitrária de comprimento.*

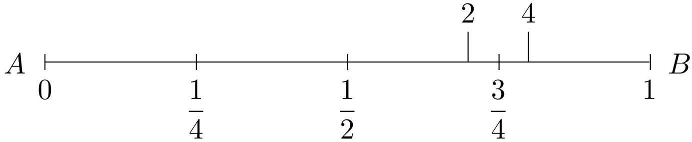
G. *O conjunto dos pontos em uma linha com duas unidades arbitrárias de comprimento.*

H. *O conjunto de pontos da semi-reta (infinita)*

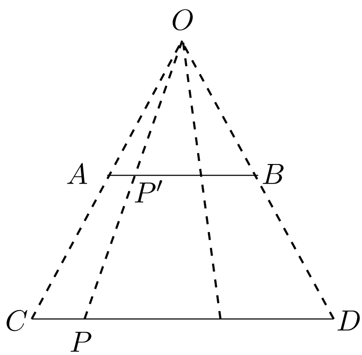
I. *O conjunto de pontos na reta (infinita)*

Prova.

F. Use o Teorema A6A e a correspondência 1–1 familiar ilustrada pela figura (seja AB uma unidade arbitrária de comprimento):

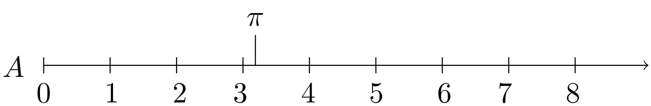


G. Uma prova ocorre ao se deixar alinha AB na prova de F ter duas unidades de comprimento. A seguinte prova geométrica é mais intuitiva:

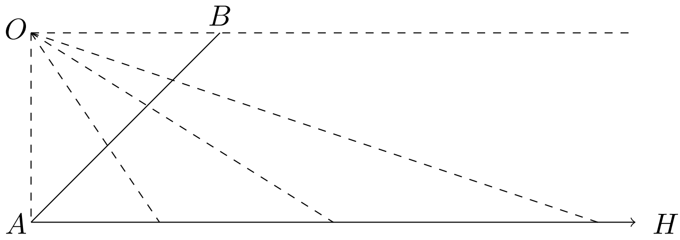


A cada ponto na linha de duas unidades de comprimento CD corresponde um único ponto na linha de uma unidade AB, e vice-versa. Por exemplo, ao ponto P em CD corresponde o ponto P' em AB e vice-versa.

H. Uma prova é pela correspondência 1–1 familiar entre o conjunto de pontos na semi-reta (infinita) e o conjunto de números reais não negativos (que já foi mostrado ter cardinalidade $\mathfrak{c}$: Teorema A6E):

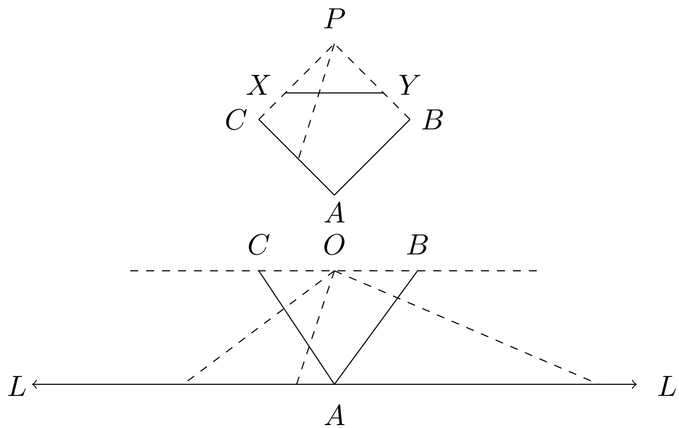


Outra é geométrica:



Há uma correspondência 1–1 entre os pontos na semi-reta infinita AH e os pontos em AB além de B (nenhum ponto em AG corresponde ao ponto B, pois OB é paralelo a AH). Pelo teorema A2, o número de pontos em AB é o mesmo que o número de pontos em AB além de B. Então, há o mesmo número de pontos na semi-reta infinita e em uma reta finita.

I. Teorema A1 (já provado). Ele poderia também ser provado pelas duas seguintes figuras, com a ajuda do Teorema A8F, por exemplo [tendo XY uma unidade de comprimento], e A2 [o número de pontos na linha angulada CAB é o mesmo número de pontos em CAB além dos pontos B e C]:



Há o mesmo número de pontos na linha XY com uma unidade de comprimento e na linha angulada CAB, e o mesmo número em CAB e em L [usando o Teorema A2].

Teorema A9. Cada um dos seguintes conjuntos tem o número cardinal do continuum:

J. *O conjunto de todos os pontos de um quadrado* [Cantor, 1877]

K. *O conjunto de todos os pontos em um cubo*

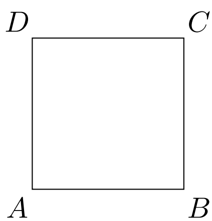
L. *O conjunto de todos os pontos em um plano infinito*

M. *O conjunto de todos os pontos em um espaço tridimensional euclidiano infinito*

Prova

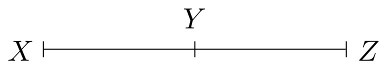
J. Quatro estágios:

1. Seja $ABCD$ um quadrado com lados com uma unidade arbitrária de comprimento:



Nós nos concentramos nos pontos do quadrado além daqueles nos lados AB e AD. Se pudermos mostrar que o conjunto dos pontos restantes do quadrado tem o número cardinal $\mathfrak{c}$, então a união desse conjunto com o conjunto de todos os pontos de AB também terá o número cardinal $\mathfrak{c}$. Pois a união de dois conjuntos tendo o mesmo número cardinal que o continuum tem o número cardinal do continuum.

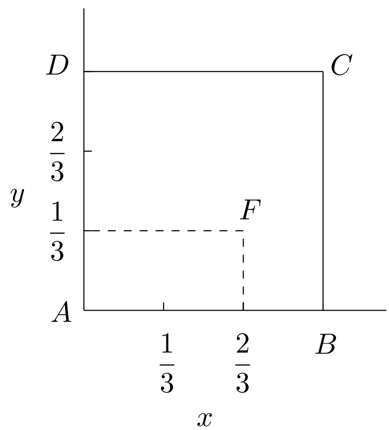
[Como uma ilustração, considere uma linha com duas unidades de comprimento:



O conjunto de pontos em XY tem o número cardinal $\mathfrak{c}$. O conjunto de pontos em YZ tem o número cardinal $\mathfrak{c}$. A união desses conjuntos é o conjunto de todos os pontos em XZ, que também tem o número cardinal $\mathfrak{c}$. Então, $\mathfrak{c}+\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.]

Em 2, 3 e na maioria do 4 abaixo nós escreveremos, pela brevidade, 'ponto do quadrado' significando 'ponto do quadrado não em AB ou AD'.

2. A primeira ideia básica da prova é que qualquer ponto do quadrado $ABCD$ corresponde a um par de decimais sem terminação denotando números reais > 0 e $\leqslant 1$, a saber, os números que são as coordenadas cartesianas do ponto quando por eixos nós escolhemos AB e AD:



Em nossa ilustração, as coordenadas de F são $x = 0.6666..., y = 0.3333...$

3. A segunda ideia básica é reduzir estes decimais sem terminação a um único decimal sem terminação ao entrelaçar seus dígitos. Em nossa ilustração, o novo decimal será 0.63636363... Então, a cada ponto distinto do quadrado corresponde um decimal sem terminação distinto denotando um número real > 0 e $\leqslant 1$.

4. Mas há alguns decimais sem terminação que não se dividem em dois decimais sem terminação, a saber, aqueles decimais em que o dígito 0 ocorre de maneira alternada e infinitas vezes a partir de algum ponto: por exemplo 0.63606060606060..., que se divide em 0.6666... e 0.3. Decimais com terminação não foram permitidos na correspondência que estabelecemos no estágio 2. Então nós ainda não temos uma correspondência 1–1 entre os pontos do quadrado e os decimais sem terminação denotando números reais > 0 e $\leqslant 1$: a cada ponto distinto do quadrado corresponde um decimal sem terminação distinto denotando um número real > 0 e $\leqslant 1$, mas não vice-versa. Para lidar com essa complicação, precisamos da terceira ideia básica da prova. Ao retroceder do número decimal para os pares de decimais nós tomamos os dígitos de maneira alternada como antes *a menos que* o dígito seja um zero: se ele for um zero, nós tomamos o *grupo* de dígitos que começam com zero e terminam com o primeiro dígito que não é zero. Então,

$$0.6|3|6|06|06|06|06|...$$

se divide em

$$0.660606...$$

e

$$0.30606...$$

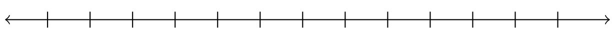
Então, decimais com terminação são evitados e nós obtemos nossa correspondência 1–1 entre o conjunto de pontos do quadrado (com exceção dos pontos em AB ou AD) e o conjunto de todos os decimais sem terminação denotando números reais > 0 e $\leqslant 1$. Nós já sabemos que esse último conjunto tem o número cardinal $\mathfrak{c}$. Em vista das observações no estágio 1, segue-se que o conjunto de *todos* os pontos do quadrado tem o número cardinal $\mathfrak{c}$.

Q.E.D

(Para observações sobre o problema que Cantor teve ao obter este resultado, veja Fraenkel (1961, p. 103))

K. Assim como para J, mas entrelaçando *três* decimais sem terminação, os decimais denotando as coordenadas do ponto no cubo (tridimensional).

L. Pense no plano como o tabuleiro de xadrez infinito de §10, exercício 3, que nós mostramos ter apenas quadrados enumeráveis de uma polegada. Nós já vimos que a união de dois conjuntos que têm o número cardinal $\mathfrak{c}$ tem o número cardinal $\mathfrak{c}$ [Prova do teorema A9J, estágio 1]. Então, a união de n conjuntos, cada um dos quais tem o número cardinal $\mathfrak{c}$, também terá o número cardinal $\mathfrak{c}$. Mas o mesmo é verdadeiro para a união de enumeráveis conjuntos, cada um dos quais tem o número cardinal $\mathfrak{c}$. [Como uma ilustração, considere a linha infinita dividida em segmentos de unidade:



Há enumeráveis segmentos, cada um tendo $\mathfrak{c}$ pontos. Então, a linha tem $\aleph_0.\mathfrak{c}$ pontos. Então $\aleph_0.\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.] O plano consiste nos enumeráveis quadrados de uma polegada, e o número de pontos nele é, portanto, $\aleph_0.\mathfrak{c}$, que é $\mathfrak{c}$. Então há tantos pontos em um plano quanto há em (por exemplo) uma linha de uma polegada.

M. Assim como para L, mas dessa vez com cubos de uma polegada, e em vez de um simples caminho espiral bidimensional nós tomamos um caminho tridimensional mais complicado.

Outras provas podem ser abreviadas ao se usar os seguintes teoremas da aritmética dos cardinais transfinitos:

Teorema A10. $\aleph_0.\aleph_0 = \aleph_0$

Prova. Cf. §10, resposta do exercício 5.

Teorema A11. $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}.\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}.\mathfrak{c}.\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^3 = ... = \mathfrak{c}^n$, *onde n é qualquer inteiro positivo*

Prova. Para $\mathfrak{c}^2$, considere o resultado A9J. [O número do conjunto de todos os pontos em um quadrado é o produto do número de pontos em um lado e o número de pontos no lado adjacente $= \mathfrak{c}.\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$] Para $\mathfrak{c}^3 = \mathfrak{c}$, considere A9K. E assim por diante.

Teorema A12. Se um conjunto tem o número cardinal finito n, então seu conjunto potência tem o número cardinal finito 2^n

Ilustração:

Subconjuntos do conjunto ($2^3 = 8$)	Membros do conjunto		
	1	2	3
1. $\{1, 2, 3\}$	Sim	Sim	Sim
2. $\{2, 3\}$	Não	Sim	Sim
3. $\{1, 3\}$	Sim	Não	Sim
4. $\{3\}$	Não	Não	Sim
5. $\{1, 2\}$	Sim	Sim	Não
6. $\{2\}$	Não	Sim	Não
7. $\{1\}$	Sim	Não	Não
8. O conjunto vazio, $\emptyset$	Não	Não	Não

Teorema A13. (Generalização de A12 para cardinais transfinitos.)[3] *Se um conjunto tem um número cardinal transfinito α, então seu conjunto potência tem o número cardinal transfinito 2^α.*

Teorema A14. $2^\alpha > \alpha$, para cada número cardinal transfinito α

Prova. A partir do teorema de Cantor (provado em §11) e teorema A13.

Teorema A15. O conjunto potência do conjunto dos números naturais tem número cardinal $2^{\aleph_0}$

Prova. De A13 e da dedinição de $\aleph_0$.

Teorema A16. $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$

Prova. De A7 e A15.

Teorema A17. O conjunto de todos os pontos em um espaço $\aleph_0$-dimensional tem o número cardinal do continuum

Prova. O conjunto de todos pontos em um espaço tri-

[3] A justificação do Teorema A13 é mais complicada que esta observação sugere: ver, por exemplo, Fraenkel (1961, cap. II, §7)

dimensional (por exemplo) tem o número $\mathfrak{c}^3$. O conjunto de todos os pontos em um espaço $\aleph_0$-dimensional tem o número $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$. Então, 'com alguns rabiscos de caneta' (Cantor), obtemos:

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \text{ [A16]} = n^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} \text{ [A10]} = \mathfrak{c}.$$

Em outras palavras: O número de pontos em um espaço infinito de $\aleph_0$ dimensões é o mesmo número de pontos em uma linha de um bilionésimo de uma polegada de comprimento.

Cantor conjecturou que não há um número cardinal α tal que $\aleph_0 < \alpha < \mathfrak{c}$. Esta conjectura é conhecida como

A Hipótese do Continuum. Não há um número cardinal maior que $\aleph_0$ *e menor que* $\mathfrak{c}[2^{\aleph_0}]$

Em 1938, Kurt Gödel mostrou que a Hipótese do Continuum não pode ser desprovada a partir dos axiomas usuais da teoria dos conjuntos, e em 1963, Paul Cohen mostrou que ela não poderia ser provado a partir deles também. A Hipótese do Continuum é, então, *independente* dos axiomas usuais da teoria dos conjuntos. (Estes resultados são sob a hipótese de que os axiomas usuais da teoria dos conjuntos são consistentes. Até então, ninguém provou que eles são, mas a maioria das pessoas que trabalham na área acha que eles são.)

A Hipótese do Continuum generalizada (que implica a Hipótese do Continuum). *Para cada número cardinal* α*, não há um número cardinal maior que* α *e menor que* 2^α.

Exercício

Há conjuntos com números cardinais maiores que $\mathfrak{c}$?

Resposta

Sim, assumindo o Axioma do Conjunto Potência [i.e. o axioma de que para qualquer conjunto há o seu conjunto potência]. Por exemplo, o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto dos números reais tem número cardinal $2^{\mathfrak{c}}$. O conjunto potência desse conjunto terá um número cardinal ainda maior, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$, e assim por diante.

Parte II.

Parte Dois: Lógica Proposicional Vero-funcional

15 Funções

Uma função é uma *relação* que satisfaz certas condições. (Uma função é uma coisa abstrata. Ela não deve ser identificada com qualquer expressão linguística. Há, por exemplo, incontáveis funções e apenas contáveis expressões linguísticas atuais ou possíveis.)

Pela simplicidade, nós nos confinaremos no momento a *funções de um argumento* e *relações binárias.*

O *domínio* de uma relação binária é o conjunto de todas as coisas que têm a relação com alguma coisa. O *contra-domínio [range]* de uma relação binária é o conjunto de todas as coisas com as quais alguma coisa tem a relação.

> Exemplo 1. O domínio da relação *ser marido de* é o conjunto de todos os maridos; o contra-domínio é o conjunto de todas as esposas.

Definição. Uma *função de um argumento* é uma relação binária que atribui a cada membro de seu domínio *um e apenas um* membro de seu contra-domínio.

Exemplos:

2 A relação binária *ser marido de* não é uma função, pois em alguns países um marido pode ter mais de uma esposa. Por outro lado, a relação *ser monogamicamente casado com* é uma função.[1]

3 A relação f que tem como seu domínio o conjunto de todos os inteiros positivos e como seu contra-domínio

[1] NT: considerando-se que o domínio da relação é o conjunto de todos que são casados. Esta relação não é uma função se houver alguém que não é casado no domínio.

o conjunto de todos os números pares e é definida pela regra

$$f(x) = 2x$$

é uma função. (Cada inteiro positivo é atribuído a um e apenas um número que é o produto do dado inteiro e 2.)

4 A relação de *ter como pai* (onde pai = pai biológico) é uma função. Cada coisa que tem um pai tem um e apenas um pai. Duas ou mais coisas podem ter o mesmo pai, mas isso não faz com que a relação deixe de ser uma função. O que importa é que nenhum membro do domínio seja atribuído a mais de um membro do contra-domínio.

Nós damos exemplos para mostrar o que significamos com 'uma função de n argumentos'.

5 A função g definida pela regra

$$g(x, y) = x + y$$

é uma função de *dois argumentos.*

6 A função h definida pela regra

$$h(x, y, z) = (x.y) + z$$

é uma função de *três argumentos.*

7 A função j definida pela regra

$$J(x, y) = (x^2 + y)^x$$

é uma função de *dois* argumentos.

Então, uma *função de n argumentos* ($n > 1$) é uma função cujo domínio é um conjunto de *sequências de n termos* ou n-uplas. Ao identificar uma coisa com a sequência da qual ela é o único termo, podemos falar também, como estivemos fazendo, de uma função de *um* argumento.

8 A função k definida pela regra

$$k(x) = x + 1$$

é uma função de *um* argumento.

'Argumentos' e 'valores' de uma função

'Argumentos' e 'valores' são usados como se segue:

Considere a função m definida pela regra

$$m(x, y) = x.y$$

e tendo como seu domínio o conjunto de pares ordenados (sequências de dois termos) de números naturais e como contra-domínio o conjunto dos números naturais. Para os argumentos $x = 3$ e $y = 4$, a função retorna o valor 12. Para os argumentos $x = 15$ e $y = 0$, a função retorna o valor 0. Então, o conjunto de *valores* de uma função é simplesmente a extensão [*range*] da função. Então, o conjunto de argumentos de uma função não coincide com o domínio da função exceto no caso de funções de um argumento.

Uma função cujos argumentos e valores são números naturais é dita ser uma função dos números naturais para os números naturais.

Definição. f é a mesma função que g

Assim como o conjunto A é o mesmo conjunto que o conjunto B se e somente se ele tem exatamente os mesmos elementos de B, não importa como os membros são descritos ou especificados, *uma função f é a mesma função que uma função g se e somente se*

(1) f e g têm o mesmo domínio
e

(2) f e g têm o mesmo valor para a mesma n-upla de argumentos, para cada n-upla no domínio.

16 Funções de verdade

Chamamos verdade e falsidade de *valores de verdade* (e neste livro nós não permitimos que nada mais seja um valor de verdade). 'V' denota o valor verdade verdadeiro; 'F' denota o valor verdade falso.

Definição. Uma função verdade é uma função cujo domínio é um conjunto de sequências de valores verdade e cujo contra-domínio é um subconjunto do conjunto de valores verdade, i.e., o conjunto $\{V, F\}$. Ou, em outras palavras:

Uma função verdade é uma função cujos argumentos e valores são valores de verdade.

Exemplos:

1. A função q tem como seu domínio o conjunto de todas as sequências de dois termos cujos termos são da forma do conjunto $\{V, F\}$ e cujo contra-domínio é o conjunto $\{V, F\}$, e isso é definidoo pela regra

$$\begin{cases} q(V,V) = V \\ q(F,V) = F \\ q(V,F) = F \\ q(F,F) = F \end{cases}$$

é uma função de verdade, a saber, a *conjunção.*

2. A função r que tem valores de verdade como argumentos e valores e é definida pela regra

$$\begin{cases} r(V,V) = V \\ r(F,V) = V \\ r(V,F) = F \\ r(F,F) = V \end{cases}$$

é uma função de verdade, a saber, a *implicação material.*

3. A função s que tem valores de verdade como argumentos e valores e é definida pela regra

$$\begin{cases} s(V) = F \\ s(F) = V \end{cases}$$

é uma função de verdade, a saber, a *negação.*

4. A função t que tem valores de verdade como argumentos e valores e é definida pela regra

$$\begin{cases} r(V,V,V) = V \\ r(F,V,V) = F \\ r(V,F,V) = F \\ r(F,F,V) = F \\ r(V,V,F) = F \\ r(F,V,F) = F \\ r(V,F,F) = F \\ r(F,F,F) = F \end{cases}$$

é uma função de verdade, a saber, a conjunção novamente, mas dessa vez a conjunção de *três* itens.

O ponto central a se compreender sobre funções de verdade é que elas são relações entre *sequências de valores de verdade* e *valores de verdade. Nada mais importa.* Então, por exemplo, relações verofuncionais entre proposições são relações *simplesmente entre o valor verdade das proposições* *em questão*. Os significados das proposições entram apenas nesse sentido, que uma proposição deve ter algum significado para ser verdadeira ou falsa. Mas, para determinar se uma proposição tem uma certa relação verofuncional com outra, você não precisa saber *o que* essas proposições significam: é suficiente saber quais são seus valores de verdade (e às vezes você nem mesmo precisa saber quais são seus valores de verdade: pode ser suficiente sabet *que* elas têm um valor verdade, i.e. que elas são proposições, no sentido definido).

Definição. Um *conectivo proposicional verofuncional* é uma expressão significativa ou símbolo que pode ser combinado com proposições (ou fórmulas) para formar proposições (ou fórmulas) e que pode ser completamente definido por uma tabela verdade padrão completa (i.e. uma em que para cada linha da tabela, a coluna final tem um único valor de verdade definido).[1]

Exemplo: O símbolo '$\supset$' é um conectivo proposicional verofuncional. Ele pode ser completamente definido pela seguinte tabela verdade:

A	B	$A \supset B$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

(A ordem em que as quatro linhas são escritas não é importante.)

Cada conectivo proposicional verofuncional corresponde

[1] Ver exercício 2 no fim da seção para exemplos de conectivos que podem e conectivos que não podem ser assim definidos.

a uma única função de verdade, da maneira ilustrada a seguir:

Ao conectivo '$\supset$' corresponde a função

$$\begin{cases} q(V,V) = V \\ q(F,V) = V \\ q(V,F) = F \\ q(F,F) = V \end{cases}$$

i.e., a implicação material.

(A ordem em que as quatro linhas são escritas não é importante.)

Um conectivo monádico é um conectivo que combina com *uma* proposição ou fórmula para formar uma nova; um conectivo diádico ou binário combina com *duas* proposições (fórmulas) para formar uma nova; e assim por diante. '$\sim$' é um conectivo monádico; '$\supset$' e '$\wedge$' e '$\vee$' são conectivos diádicos (binários)[2]. Não há conectivos triádicos familiares, uma vez que (como mostraremos) tudo que pode ser expresso por meio de conectivos triádicos ou mais complicados pode ser expresso usando-se apenas conectivos diádicos.

Há $2^2 = 4$ funções de verdade totais[3] de um argumento, a saber,

[2]'$\wedge$' é um símbolo para a conjunção, '$\vee$' para a disjunção [inclusiva]

[3]Uma função de verdade total de n argumentos é uma função verdade cujo domínio é o conjunto de todas as sequências de n termos cujos termos são do conjunto $\{V, F\}$. No que se segue, 'função de verdade' deve ser entendido como uma abreviação de 'função de verdade total'.

$$\begin{cases} f_1(V) = V \\ f_1(F) = V \quad \text{[Sem nome]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(V) = V \\ f_2(F) = F \quad \text{[Identidade]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3(V) = F \\ f_3(F) = V \quad \text{[Negação]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_4(V) = F \\ f_4(F) = F \quad \text{[Sem nome]} \end{cases}$$

Há $(2^2)^2 = 16$ funções de verdade de dois argumentos, por exemplo

$$\begin{cases} g_1(V, V) = V \\ g_1(F, V) = V \\ g_1(V, F) = V \\ g_1(F, F) = V \end{cases}$$
$$\begin{cases} g_2(V, V) = V \\ g_2(F, V) = V \\ g_2(V, F) = V \\ g_2(F, F) = F \end{cases}$$

etc.

Há $((2^2)^2)^2 = 16^2 = 256$ funções de verdade de três argumentos. Há 2^{2m} funções de verdade com m argumentos.

Para cada inteiro positivo n há um número finito de funções de verdade distintas com n argumentos. Então, o conjunto de todas as funções de verdade é enumerável.

Nós precisamos de enumeráveis conectivos para expressar as enumeráveis funções de verdade? Veremos posteriormente que a resposta é 'Não'. Eles podem todos ser expressos por meios de um único conectivo diádico.

Exercícios

1. Dê uma regra que defina a função verdade de três argumentos que tem o valor verdade quando o segundo argumento tem o valor verdadeiro, e o valor falso caso contrário.
2. Qual dos seguintes são (em seu contexto) conectivos proposicionais verofuncionais?
   a) 'Não é o caso que' na sentenã 'não é o caso que Napoleão ganhou a batalha de Waterloo'.
   b) 'E' em '$2 + 2 = 4$ e Napoleão ganhou a batalha de Waterloo'
   c) 'E então' em 'Ele tirou suas roupas e então ele pulou na água'
   d) 'Hunter acredita que' em 'Hunter acredita que Napoleão ganhou a batalha de Waterloo'
   e) 'Se' em 'Se Tom casar com Mary, Susan ficará infeliz'
   f) 'Ou...' em '$2 + 2 = 4$, então $2 + 2 = 4$ ou há vida em Marte'
   g) 'Ou' em 'Ele pegou o ônibus ou ele teve que andar'
   h) 'Se' em 'Se ele é um milionário, eu sou um holandês'

Respostas

1. Seja a função g. Então, a regra é

$$
\begin{cases}
r(V,V,V) = V \\
r(F,V,V) = V \\
r(V,F,V) = F \\
r(F,F,V) = F \\
r(V,V,F) = V \\
r(F,V,F) = V \\
r(V,F,F) = F \\
r(F,F,F) = F
\end{cases}
$$

2. Os conectivos em (a), (b) e (f) são conectivos proposicionais verofuncionais. Os outros não são.

(a) 'Não é o caso que' pode ser definido completamente pela tabela verdade

A	Não é o caso que A
V	F
F	V

(b) Esse 'e' pode ser completamente definido pela tabela verdade

A	B	A e B
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

(c) Se quisermos construir a tabela verdade para 'e então', veremos que o valor verdade para uma linha é deixado indeterminado:

A	B	A e então B
V	V	?
F	V	F
V	F	F
F	F	F

(d) Aqui o valor de ambas as linhas é deixado indeterminado:

A	Hunter acredita que A
V	?
F	?

(e) Valores para três linhas são deixados indeterminados:

A	B	Se A , então B
V	V	?
F	V	?
V	F	F
F	F	?

(f) Este uso verofuncional (ou 'extensional') de 'ou...' pode ser completamente definido pela tabela verdade

A	B	A ou B
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

(g) Este é um uso não verofuncional (ou 'intensional') de 'ou...'. A sentença inteira é equivalente a 'Se ele não pegar o ônibus, então ele tem que andar', e, assim como no caso (e), os valores para três linhas são deixados indeterminados:

A	B	A ou B	$=$	Se não A , então B
V	V	?		?
F	V	?		?
V	F	?		?
F	F	F		F

Veja mais em Strawson (1952, p. 90)

(h) Assim como para (e). Cf. Strawson (1952, p. 89).

17 Uma linguagem formal para a lógica proposicional vero-funcional: a linguagem formal P

Definiremos agora uma linguagem formal que em sua interpretação pretendida será capaz de expressar verdades da lógica proposicional verofuncional. Mas nossa definição não fará qualquer referência essencial a essa ou a qualquer interpretação. Os termos 'símbolo propsicional', 'conectivo', 'parêntese', usados ao descrever a linguagem *devem, portanto, ser tomados puramente como etiquetas úteis*, concebidas com um olho na interpretação pretendida, certamente, mas substituível no contexto por um conglomerado arbitrário de letras, como 'schlumpf', 'snodgrass' ou 'zbolg'. Chamaremos a linguagem de 'P' (para 'lógica proposicional').

A linguagem formal P

Símbolos de P

P tem exatamente seis símbolos, a saber,

$$p$$
$$\prime$$

$\sim$
$\supset$
(
)

Nomes para esses síbolos:

O símbolo p
O traço
O til
A ferradura
O parêntese esquerdo
O parêntese direito

Chamaremos o til e a ferradura de *conectivos* de P.

Diremos que o símbolo p seguido por um ou mais traços é um *símbolo proposicional* de P. Então, cada um dos seguintes é um símbolo proposicional de P:

$$p$$
$$p'$$
$$p''$$
$$p'''$$
$$p''''$$

Fórmulas (fbfs) de P

1. Qualquer símbolo proposicional é uma fbf de P.
2. Se A é uma fbf de P, então a cadeia de símbolos de P consistindo no til seguido pela fórmula A é uma fbf de P. (Abreviaremos isso para: Se A é uma fbf de P, então $\sim A$ é uma fbf de P.)

3. Se A e B são fbfs de P, então a cadeia de símbolos de P consistindo no parêntese esquerdo, a fórmula A, a ferradura, a fórmula B, e o parêntese direito, nessa ordem, é uma fbf de P. (Abreviado para: Se A e B são fbfs de P, então $(A \supset B)$ é uma fbf de P.)
4. Nada mais é uma fbf de P.

[Nessa descrição, as letras 'A' e 'B' são variáveis metalinguísticas.]

Exemplos: os seguintes são fbfs de P:

$$p'''''$$
$$\sim p''$$
$$(p''' \supset p')$$
$$\sim(p''' \supset p')$$
$$(\sim\sim(p''' \supset p') \supset \sim p'')$$

Os seguintes *não* são fbfs de P:

p	[Sem traço]
$\sim(p'')$	[Traço supérfluo]
$(\sim p'')$	[Traço supérfluo]
$p''' \supset p'$	[Sem parênteses]
q''	['q' não é um símbolo de P]
$(p \supset q)$	[Óbvio]
$(A \supset B)$	['A' e 'B' não são símbolo de P]

18 Convenções: 1. Sobre aspas; 2. Sobre o não uso de parênteses

Se fôssemos aderir estritamente aos nossos próprios requerimentos sobre o uso de aspas e parênteses, o resto desse livro seria ainda menos legível do que ele é agora.[1] Consequentemente, a partir de agora adotaremos as seguintes convenções:

1. *Sobre as aspas*

Cada símbolo ou fórmula deve ser considerada como um nome ou uma descrição de si mesmo, se o contexto assim requerir.

Por exemplo, em vez de escrever

$$\text{`}(p' \supset p')\text{'} \text{ é uma fórmula de P}$$

simplesmente escreveremos

$$(p' \supset p') \text{ é uma fórmula de P}$$

e em vez de escrevermos

$$\text{`}p\text{'} \text{ é um símbolo}$$

simplesmente escreveremos

$$p \text{ é um símbolo.}$$

2. *Sobre eliminar parênteses*

A partir de agora nós habitualmente eliminaremos o par de parênteses mais externo de uma fórmula. Por exemplo, em vez de escrever

[1] Cf. Hobbes: 'Seu Tratado do *Ângulo de Contato*, eu refutei antes em poucas folhas. E para aquilo de seu *Seções cônicas*, ele está tão coberto por uma crosta de símbolos que eu não tenho paciência para analisar se ele é bem ou mal demonstrado.' (*Six Lessons to the Professores of the Mathematiques... in the University of Oxford*, Lição V, p. 49 [1656]; em *The English Works of Thomas Hobbes*, ed. Sir William Molesworth, vol. VII (1845), ver p. 316.)

$$(p' \supset (p'' \supset p'))$$

nós escreveremos

$$p' \supset (p'' \supset p')$$

Nota. Seremos flexíveis em nosso uso dessas convenções, às vezes colocando todo o estoque de aspas ou parênteses, quando parecer a coisa natural a se fazer no contexto.

19 Semântica para P. Definições de *interpretação em P, verdadeiro/falso para uma interpretação de P, modelo de uma fórmula/conjunto de fórmulas de P, fórmulas logicamente válidas de P, fórmulas modelo-teoricamente consistentes de P, consequência semântica* (para fórmulas de P), *tautologia de P*

Esta seção é sobretudo apenas um enunciado abstrato do que é normalmente explicado por meio das tabelas de verdade usuais.

Definição. Uma *interpretação de P* é uma atribuição a cada símbolo proposicional de P a um outro (mas não ambos) valor de verdade, verdade ou falsidade, e uma atribuição aos conectivos de P a seus significados verofuncionais usuais (que definiremos mais precisamente nas cláusulas 2 e 3 da deifnição de *verdadeiro para uma interpretação de P*, abaixo.)

Para n símbolos proposicionais distintos há 2^n possíveis interpretações. Para o símbolo p', por exemplo, há $2^1 = 2$ possíveis interpretações, a saber,

(1) p' é atribuído a V
(2) p' é atribuído a F.

Para o par p', p'' há $2^2 = 4$ possíveis interpretações, a saber,

(1) ambos atribuídos a V
(2) p' atribuído a F, p'' atribuído a V
(3) p' atribuído a V, p'' atribuído a F
(4) ambos atribuídos a F

Uma vez que P tem $\aleph_0$ (i.e, enumeráveis) símbolos proposicionais, há $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (então, incontáveis) interpretações possíveis distintas de P. (Para $\aleph_0$, ver Apêndice 1.)

Definição de verdadeiro para uma interpretação de P

Seja I uma interpretação de P, A e B quaisquer fórmulas de P. Então:

1. Se A é um símbolo proposicional, então A é verdadeiro para I sse I atribui o valor verdade verdadeiro a A.
2. $\sim A$ é verdadeiro para I sse A não é verdadeiro para I.
3. $(A \supset B)$ é verdadeiro para I sse A não é verdadeiro para I ou B é verdadeiro para I.[1]

Definição de *falso para uma interpretação de P*

A é falso para I sse A não é verdadeiro para I.

Quando uma fórmula é verdadeira/falsa para uma dada interpretação, diremos que ela tem o valor verdade verdadeiro/falso para essa interpretação.

Definição. Uma interpretação I é um *modelo* de uma fórmula (alternativamente: conjunto de fórmulas) de P sse a fórmula (alternativamente: cada fórmula no conjunto) é verdadeira para I.

[1] O 'ou...' nessa sentença deve ser compreendido como puramente verofuncional. A clausula 3 poderia ser posta na forma '... sse não é o caso que A é verdadeiro para I e B não é verdadeiro para I'.

Até um novo aviso, no que se segue, A, B, C, etc. são fórmulas arbitrárias de P.

Definição. A é uma fórmula *logicamente válida* de P [$\models_P A$] sse A é verdadeira para toda interpretação de P.

Exemplos: As seguintes fbfs são fórmulas logicamente válidas de P (lembre-se da convenção sobre a eliminação de parênteses):

$$
\begin{array}{l}
p' \supset p' \\
p' \supset (p'' \supset p') \\
(p' \supset (p'' \supset p''')) \supset ((p' \supset p'') \supset (p' \supset p''')) \\
(\sim p' \supset \sim p'') \supset (p'' \supset p')
\end{array}
$$

As seguintes *não* são fbfs logicamente válidas de P.

$$
\begin{array}{l}
p' \\
\sim p' \\
\sim(p' \supset p')
\end{array}
$$

'$\models_P$' é um símbolo da metalinguagem, não da própria linguagem objeto P. Então,

$$\models_P p'$$

é uma abreviação para

'p'' é uma fórmula logicamente válida de P.

Com ambos os símbolos '$\models$' e $\vdash$ [§22 abaixo], é convenção omitir quaisquer aspas que seria natural fornecer. Por exemplo, escrevemos

$$\models_P p'$$

e não

$$\models_P `p'$$

Não é comum colocar um subscrito em '$\models$', como fizemos. Geralmente há apenas uma linguagem formal sendo discutida. Contudo, uma vez que discutiremos várias linguagens formais diferentes, para evitar confusçoes nós colocaremos ocasionalmente subscritos em '$\models$' para indicar a linguagem formal sobre a qual estamos falando.

Definição. Uma fórmula, ou conjunto de fórmulas, de P *modelo-teoricamente consistente (m-consistente)* é uma fórmula, ou conjunto de fórmulas, que tem um modelo.

Uma fórmula, ou conjunto de fórmulas, de P *modelo-teoricamente inconsistente (m-inconsistente)* é uma fórmula, ou conjunto de fórmulas, que não tem modelo.

Definiremos posteriormente as noções de fórmula ou conjunto de fórmulas *prova-teoricamente consistente / inconsistente* de um sistema formal PS. Deve-se provar que uma fórmula ou conjunto de fórmulas de P é modelo-teoricamente consistente sse ela é uma fórmula ou conjunto de fórmulas prova-teoricamente consistente de PS. Nós fazemos isso por meio da prova de Henkin da completude semântica de PS, §32. [Para o sistema PS, ver §22].

Definição. Uma fórmula B de P é uma consequência semântica de uma fórmula A de P [$A \models_P B$] sse não há uma interpretação de P em que A é verdadeira e B é falsa.[2].

(Então, se não houver uma interpretação de P em que A é verdadeiro, i.e, se A é uma fórmula m-inconsistente, então qualquer fórmula de P que você quiser escolher é uma consequência de A.)

[2]A definição de consequência semântica para linguagens adequadas para a lógica de predicados é mais complicadas. Ver Parte 3, §39

Definição. *B é uma consequência semântica de um conjunto de fórmulas* Γ *de* P $[\Gamma \models_P B]$ sse não houver uma interpretação de P para a qual toda fórmula em γ é verdadeira e B é falsa.[3]

O conjunto vazio: $\emptyset$

Nós adotamos a convenção usual de que toda interpretação de P é um modelo do conjunto vazio. Então:

19.1 $\emptyset \models_P A$ sse $\models_P A$

i.e. A é uma consequência semântica do conjunto vazio sse A é logicamente válido.

Consequências dessas definições

19.2 *Para qualquer dada interpretação, uma dada fórmula é verdadeira ou falsa*

19.3 *Nenhuma fórmula é simultaneamente verdadeira e falsa para a mesma interpretação.*

19.4 *A é falsa para uma dada interpretação sse* $\sim A$ *é verdadeira para essa interpretação; e A é verdadeira para uma interpretação sse* $\sim A$ *é falsa para essa interpretação*

19.5 *Se A e* $A \supset B$ *são ambos verdadeiros para uma dada interpretação, então B é verdadeiro para essa interpretação*

19.6 *Se* $\models_P A$ *e* $\models_P A \supset B$*, então* $\models_P B$

19.7 *B é uma consequência semântica de A sse* $A \supset B$ *é logicamente válido: i.e.* $A \models_P B$ *sse* $\models_P A \supset B$

Provas de 19.5 e 19.6:

19.5 *Se A e* $A \supset B$ *são ambos verdadeiros para uma dada interpretação, então B é verdadeiro para essa interpretação*

Prova. Assuma que A e $A \supset B$ são logicamente válidos

[3] Ver nota anterior

enquanto A não é. Então, para alguma interpretação, B não é verdadeiro. Para essa interpretação, A será verdadeiro e $A \supset B$ falso. Mas isso contradiz nossa assunção de que $A \supset B$ é logicamente válido. Portanto, se A e $A \supset B$ são ambos logicamente válidos, assim também é B.

Definição. A é uma *tautologia de* P sse A é verdadeiro para toda atribuição de valores de verdade a seus símbolos proposicionais quando os conectivos carregam seus conectivos usuais da tabela verdade: i.e., sse A é verdadeiro para toda interpretação de P: i.e., quando A é uma fórmula logicamente válida de P.

(No caso da linguagem P nós não precisamos, e na verdade não podemos, distinguir tautologias de P de fórmulas logicamente válidas de P. Mais tarde, quando estivermos na linguagem Q, adequada para a lógica de predicados, veremos que as tautologias de Q são um subconjunto próprio das fórmulas logicamente válidas de Q. Aqui nós estamos apenas preparando o terreno.)

Intuitivamente, uma tautologia é uma fórmula que pode ser verificada sendo verdadeira em todas as interpretações pelo método usual (finito) de tabelas de verdade. Algumas fórmulas logicamente válidas da linguagem de predicados Q não podem ser verificadas assim.

20 Algumas verdades sobre $\models_P$. O Teorema da Interpolação para P

Onde A e B são fórmulas arbitrárias de P e Γ, Δ são conjuntos arbitrários de fórmulas de P:

20.1 $A \models_P A$

20.2 *Se* $\Gamma \models_P A$, *então* $\Gamma \cup \Delta \models_P A$

20.3 *Se* $\Gamma \models_P A$ *e* $A \models_P B$*, então* $\Gamma \models_P B$

20.4 *Se* $\Gamma \models_P A$ *e* $\Gamma \models_P A \supset B$*, então* $\Gamma \models_P B$

20.5 *Se* $\models_P A$*, então* $\Gamma \models_P A$

Esses são todos consequências mais ou menos imediatas das dedinições.

Por conveniência ou referência, repetiremos aqui 19.6 e 19.7:

19.6 *Se* $\models_P A$ *e* $\models_P A \supset B$*, então* $\models_P B$

19.7 $A \models_P B$ *sse* $\models_P A \supset B$

20.6 (*O teorema da Interpolação para P* Se $\models_P A \supset B$ e A e B têm oa menos um símbolo proposicional em comum, então há uma fórmula C de P cujos símbolos proposicionais ocorrem todos tanto em A quanto em B, tal que $\models_P A \supset C$ e $\models_P C \supset B$)

Prova informal

1. Suponha que todo símbolo proposicional em A também ocorre em B. Então deixamos C ser o próprio A, porque obviamente se $\models_P A \supset B$, então $\models_P A \supset A$ e $\models_P A \supset B$.

2. Agora suponha que há apenas um símbolo proposicional que ocorre em A mas não ocorre em B. Chame-o de 'p'. Uma vez que, por hipótese, $A \supset B$ é logicamente válido, $A \supset B$ toma o valor V quando a p é atribuído o V, e também toma o valor V quando a p é atribuído o F. Seja q qualquer símbolo proposicional que ocorretanto em A quando em B. Seja A_1 a fórmula que resulta de A quando p é substituído por $(q \supset q)$ em A, e seja A_2 a fórmula que resulta de A quando p é substituído por $\sim(q \supset q)$ em A. Então, $A_1 \supset B$ e $A_2 \supset B$ são ambos logicamente válidos (A_1 é equivalente a substituir p por T em A; A_2 a substituir p por F em A). Um raciocínio padrão de tabela de verdade nos mostrará que, dadas as definições de A_1 e A_2,

$A \supset (A_1 \vee A_2)$ é uma tautologia de tabela verdade, e então, uma vez que $A_1 \supset B$ e $A_2 \supset B$ são ambas tautologias de P (ver abaixo), $(A_1 \vee A_2) \supset B$ também é uma tautologia de tabela verdade. Agora, '$\vee$' não é um símbolo de P. Mas para quaisquer fórmulas A e B,

$$(A \vee B) \equiv ({\sim}A \supset B).$$

Então, podemos re-escrever $A_1 \vee A_2$ como ${\sim}A_1 \supset A_2$. Então, nós temos:

Se $\models_P A \supset B$, então $\models_P A \supset ({\sim}A_1 \supset A_2)$ e $\models_P ({\sim}A_1 \supset A_2) \supset B$.

Então nós temos nosso C, a saber, $({\sim}A_1 \supset A_2)$.

3. Se há mais de um símbolo proposicional que ocorre em A mas não em B, fazemos com que A_1/A_2 seja a fórmula obtida a partir de B ao substituir *cada um deles* por $(q \supset q)/{\sim}(q \supset q)$. Então, o resto do argumento se segue como antes.

Uma prova rigorosa desse teorema, por indução matemática no número de símbolos proposicionais em A mas não em B é dada como resposta ao exercício em §27.

21 Poderes de expressão de P. Conjuntos adequados de conectivos

Provaremos (Teorema 21.1) que a linguagem P é capaz de expressar qualquer função de verdade, no seguinte sentido:

> A cada função de verdade corresponde uma tabela verdade de uma maneira natural. A cada tabela verdade completa corresponde (não necessariamente de maneira unívoca) uma fórmula

de P ('corresponde' no sentido de ter essa tabela verdade como sua tabela verdade).

Exemplos:

1. À função de verdade *implicação material* corresponde a tabela

$$\begin{array}{lcl} \langle V, V \rangle & = & \mathrm{V} \\ \langle F, V \rangle & = & \mathrm{V} \\ \langle V, F \rangle & = & \mathrm{F} \\ \langle F, F \rangle & = & \mathrm{V} \end{array}$$

À essa tabela corresponde a fórmula $p' \supset p''$, entre outros:

p'	p''	$p' \supset p''$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

2. À função de verdade sem nome à qual corresponde a tabela

$$\begin{array}{lcl} \langle V, V, V \rangle & = & \mathrm{V} \\ \langle F, V, V \rangle & = & \mathrm{V} \\ \langle V, F, V \rangle & = & \mathrm{V} \\ \langle F, F, V \rangle & = & \mathrm{V} \\ \langle V, V, F \rangle & = & \mathrm{V} \\ \langle F, V, F \rangle & = & \mathrm{F} \\ \langle V, F, F \rangle & = & \mathrm{V} \\ \langle F, F, F \rangle & = & \mathrm{V} \end{array}$$

corresponde (entre outras) a fórmula

$$\sim(\sim(\sim p' \supset \sim p'') \supset \sim\sim p''')$$

Então:

p'	p''	p'''	$\sim(\sim(\sim p' \supset \sim p'') \supset \sim\sim p''')$
V	V	V	F
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	F
V	V	F	F
F	V	F	V
V	F	F	F
F	F	F	F

Em vez de dizer que P é capaz de expressar qualquer função de verdade, nós diremos que o conjunto de conectivos $\{\sim, \supset\}$ é adequado para a expressão de qualquer função de verdade, uma vez que os únicos conectivos em P são $\sim$ e $\supset$. Alguns outros conjuntos de conectivos são também adequados; i.e., algumas linguagen, que diferem de P apenas por ter diferentes conectivos, também são capazes de expressar qualquer função de verdade. ('Diferentes conectivos' aqui significa conectivos que diferem em sua definição na tabela verdade, não meramente no formato físico do seus *tokens*.)

Teorema 21.1 (que ainda precisamos provar) é nosso primeiro meta-teorema importante:

21.1 *O conjunto* $\{\sim, \supset\}$ *é adequado para a expressão de qualquer função de verdade [então P pode expressar qualquer função de verdade]*

A prova do meta-teorema 21.1 se dá em dois estágios. Nós provamos primeiro que o conjunto $\{\sim, \vee, \wedge\}$ é adequado (meta-teorema 21.2); e então que se o conjunto $\{\sim, \vee, \wedge\}$ é adequado, então o conjunto $\{\sim, \supset\}$ também é.

21.2 *O conjunto* $\{\sim, \vee, \wedge\}$ *é adequado*

Prova. Intuitivamente, a prova consiste em mostrar que, dada qualquer tabela verdade completa, podemos construir uma fórmula[1] em forma normal disjuntiva que tem essa tabela verdade como sua tabela.

Uma fórmula está na *forma normal disjuntiva* (FND) sse ela é uma disjunção de conjunções de símbolos proposicionais sozinhos ou de suas negações; contando como casos degenerados de disjunções / conjunções os casos com símbolos proposicionais apenas e suas negações, e permitindo disjunções / conjunções de mais de dois disjuntos / conjuntos.

Exemplos (neles, incluiremos parênteses apenas conforme necessário para evitar ambiguidade):

1. $(p' \wedge \sim p'' \wedge p''') \vee (p'' \wedge \sim p') \vee (\sim p'''' \wedge p''')$
2. . $(p' \wedge \sim p'' \wedge p''') \vee (p'' \wedge \sim p') \vee \sim p''''$ [$\sim p''''$ conta como uma conjunção degenerada com apenas um conjunto.]
3. $p' \vee p''$ [Tanto p' quando p'' contam como uma conjunção degenerada.]
4. $p' \wedge p''$ [Isso conta como uma disjunção degenerada com apenas um disjunto, a saber, toda a fórmula.]
5. $\sim p'$ [Isso conta como uma disjunção degenerada de uma conjunção degenerada.]

Note que a fórmula está na FND apenas se

(1) os únicos conectivos que ocorrem nela são conectivos para negação, conjunção e disjunçõa (não necessariamente todos), e

[1] Daqui até o fim da seção, 'fórmula' é usada para cobrir não apenas fórmulas de P, mas também fórmulas de linguagens com conectivos proposicionais verofuncionais adicionais àqueles de P.

(2) a negação ocorre sobre símbolos proposicionais apenas, não sobre qualquer outra expressão mais complicada (por exemplo, não sobre conjunções ou disjunções).

Agora a prova pode ir de maneira bem simples:

Seja f qualquer função arbitrária de qualquer número arbitrário n de argumentos. Escreva a tabela verdade completa correspondente a f. Ela terá $n+1$ colunas e 2^n linhas. Olhe para os V's e F's na última coluna (i.e., a coluna que dá os valores da função para os conjuntos de argumentos nas linhas correspondentes). Há três possibilidades:

1. A última coluna é toda de F's.
2. Há exatamente um V na última coluna.
3. Há mais que um V na última coluna.

Nós mostramos em cada caso como construir uma fórmula na FND tendo n símbolos proposicionais distintos e o mesma tabela verdade que f.

Caso 1 (a última coluna é toda de F's)

Então,

$$p' \wedge \sim p' \wedge p'' \wedge p''' \wedge ... \wedge p^n$$

[onde p^n é uma abreviação para p seguido de n traços] é uma fórmula na FND que tem a mesma tabela verdade que f. Pois $p' \wedge \sim p'$ sempre obtém F, e o mesmo ocorre com qualquer coisa que a toma como um conjunto.

Caso 2 (a última coluna tem apenas um V)

Vá para a linha que tem o V em sua coluna final. Se a primeira entrada na linha for V, escreva p'; se a primeira entrada for F, escreva $\sim p'$. Se a segunda entrada for V, escreva p''; se for F, escreva $\sim p''$. E assim por diante, até incluir a enésima entrada. Forme a *conjunção* do que você escreveu (i.e., insira $n-1$ símbolos de conjunções nos lugares apropriados). A fórmula resultante estará na FND e terá a mesma tabela verdade que a função f.

Exemplo: Seja f a função de três argumentos que tem a tabela

$$\begin{array}{cccccc} V & V & V & = & F \\ F & V & V & = & F \\ V & F & V & = & V \\ F & F & V & = & F \\ V & V & F & = & F \\ F & V & F & = & F \\ V & F & F & = & F \\ F & F & F & = & F \end{array}$$

Entãom a fórmula

$$p' \wedge \sim p'' \wedge p'''$$

está na FND e tem a mesma tabela verdade que f. Ela tem o valor V sse p' tem V, p'' tem F, e p''' tem V; em todos os outros casos ela tem o valor F.

Caso 3. (mais que um V)

Para cada linha que termina em V, construa uma fórmula como no caso 2. Forme a *disjunção* de todas essas fórmulas. A fórmula resultante estará na FND e terá a mesma tabela verdade que f.

Exemplo: Seja f a função de três argumentos que tem a tabela

V	V	V	=	F
F	V	V	=	F
V	F	V	=	V
F	F	V	=	F
V	V	F	=	F
F	V	F	=	V
V	F	F	=	F
F	F	F	=	V

Então, a fórmula

$$(p' \wedge {\sim}p'' \wedge p''') \vee ({\sim}p' \wedge p'' \wedge {\sim}p''') \vee ({\sim}p' \wedge {\sim}p'' \wedge {\sim}p''')$$

está na FND e tem o mesmo valor verdade que f. Ela tem o valor V em cada um dos três casos

(1) p' V, p'' F, p''' V

(2) p' F, p'' V, p''' F

(3) p', p'', p''' todos F

e F caso contrário.

Isso completa a nossa prova do meta-teorema 21.2.

Prova do meta-teorema 21.1 (O conjunto $\{\sim, \supset\}$ *é adequado)*

1. Qualquer *conjunção* de duas fórmulas A e B tem a mesma tabela verdade que a fórmula em que A e B estão relacionados por $\sim$ e $\supset$ em vez de $\wedge$. Então:

$$(A \wedge B) \equiv {\sim}(A \wedge {\sim}B).$$

Seja C qualquer fórmula em que $\wedge$ ocorra. Então, ao substituir cada subfórmula de C que tem a forma $(A \wedge B)$ por uma subfórmula que tem a forma ${\sim}(A \supset {\sim}B)$, obtemos uma fórmula em que $\wedge$ não ocorre e que tem a mesma tabela verdade que C.

2. Similarmente para $\vee$. Qualquer *disjunção* entre duas fórmulas A e B tem a mesma tabela verdade que uma fórmula em que A e B estão relacionados por $\sim$ e $\supset$ em vez de $\vee$, assim:

$$(A \wedge B) \equiv (\sim A \supset B) \text{ [i.e. } ([\sim A] \supset B)].$$

3. Seja W qualquer fórmula em que $\wedge$ ou $\vee$ ocorra, ou ambos. Ao se aplicar sucessivamente as operações de substituições descritas acima em (1) e (2), obtemos uma fórmula W' em que nenhum conectivo além de $\sim$ e $\supset$ ocorre e que tem a mesma tabela verdade que W.

4. Então, uma vez que o conjunto $\{\sim, \wedge\vee\}$ é adequado para a expressão de qualquer função de verdade [21.2], o mesmo vale para o conjunto $\{\sim, \supset\}$.

Q.E.D.

Por argumentos similares, outros conjuntos de conectivos podem ser mostrados adequados.

21.3 *O conjunto* $\{\sim, \vee\}$ *é adequado* [Emil L. Post, 1920]

Prova. Use o metateorema 21.2 e o esquema tautológico

$$(A \wedge B) \equiv \sim(\sim A \vee \sim B)$$

21.4 *O conjunto* $\{\sim, \wedge\}$

Prova. Use o metateorema 21.2 e o esquema tautológico

$$(A \vee B) \equiv \sim(\sim A \wedge \sim B)$$

C.S. Peirce, em um artigo de cerca de 1880 que ele não publicou ('A Boolean Algebra with One Constant', *Collected Papers*, iv, §§12 – –20 [pp. 13 – –18]) apresentou uma linguagem para a álgebra booleana com apenas uma constante 'que serve ao mesmo tempo como o único signo para compor termos e que torna os sinais especiais de negação, para "o que é" e para "nada" desnecessários'. Para nosso propósito presente, podemos tomá-lo como um conectivo diádico significando 'Nem A nem B'. Peirce afirmou que ele era adequado, mas ele não deu uma prova rigorosa de sua adequação. Posteriormente, em outro artigo não publicado, escrito em 1902 (*Collected Papers*, iv, §265 [p. 216]), ele mostrou que o que quer que puder ser expresso pelo conectivo significando 'Nem A nem B' poderia igualmente ser expresso usando apenas um conectivo significando 'Ou não A ou não B'. Henry M. Sheffer, sem conhecer o resultado de Peirce, mostrou (1912) que todas as funções de verdade expressíveis por meio dos conectivos $(\sim, \vee)$ de *Principia Mathematica* poderiam ser expressas por qualquer um dos dois conectivos de Peirce. Emil L. Post foi o primeiro a dar uma prova completamente geral da adequação (para $\{\sim, \vee\}$, em sua dissertação de doutorado para a Universidade de Columbia, completo em 1920 e publicado no ano seguinte: cf. Post, 1920).

21.5 *O conjunto* $\{\downarrow\}$ *é adequado* [C. S. Peirce, *c.* 1880; H. M. Sheffer, 1912. Mas veja os comentários abaixo]

$A \downarrow B$ tem o valor V sse A e B tem ambos o valor F. Então, $p \downarrow q$ pode ser lido como 'Nem p nem q'.

Prova. Use o metateorema 21.4 e o esquema tautológico

$$\sim A \equiv A \downarrow A,\ (A \wedge B) \equiv (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B).$$

21.6 *O conjunto* $\{|\}$ *é adequado* [C.S. Peirce, 1902; H.M. Sheffer, 1912. Mas veja os comentários precedendo 21.5.]

O símbolo $|$ expressa o que é usualmente chamado de 'a função *Sheffer stroke*' (sobre ela, veja o comentário precedendo 21.5). $A|B$ tem o valor F sse A e B têm ambos o valor V. Então, $p|q$ pode ser lido como 'Não ambos p e q' ou como 'não p ou não q, ou não p e não q'.

Prova. Use o metateorema 21.3 e o esquema tautológico

$$\sim A \equiv A|A,\ (A \wedge B) \equiv (A|A)|(B|B).$$

Há outros conjuntos adequados, e alguns inadequados.

21.7 *O conjunto* $\{\wedge, \vee\}$ *é inadequado*

A prova (que aqui apenas indicaremos) se dá ao mostrar que a negação de uma fórmula não pode ser expressa por qualquer combinação de símbolos proposicionais, $\wedge$ e $\vee$. Seja P' uma linguagem assim como P, exceto por ela conter os conectivos $\wedge$ e $\vee$ no lugar dos conectivos $\sim$ e $\supset$. Foi mostrado que (1) nenhuma fórmula de P' que consiste de apenas um [uma ocorrência de um] símbolo pode ter o valor V quando todos os seus símbolos componentes proposicionais têm o valor F. Então, mostra-se que (2) *se* isso é verdadeiro para *toda* fórmula de P' com menos de m [ocorrências de] símbolos, *então* também isso também é verdadeiro para toda fórmula de P com exatamente m símbolos. Segue-se que *nenhuma* fórmula de P' pode ter o valor V quando todos os seus símbolos componentes proposicionais têm o valor F, e, portanto, que P' não pode expressar a negação. [Este tipo de prova é conhecida como prova por indução matemática (forte), sobre a qual falaremos mais tarde.]

21.8 *O conjunto* $\wedge, \supset$ *é inadequado*

Prova similar a de 21.7.

21.9 *O conjunto* $\supset, \vee$ *é inadequado*

Prova similar a de 21.7.

Nem todo conjunto que tem $\sim$ como membro é adequado, e nem todo conjunto que não o contém é inadequado:

21.10 *O conjunto* $\{\sim, \equiv\}$ *é inadequado*

A prova é similar a de 21.7, mas nesse caso nós mostramos que a implicação material, por exemplo (poderíamos igualmente tomar a conjunção, ou a disjunção), não pode ser expressa por qualquer combinação de símbolos proposicionais, $\sim$, e $\equiv$. Pois, a tabela verdade da implicação material tem quatro linhas e uma coluna final com três V's e um F; enquanto que qualquer tabela verdade com quatro linhas para qualquer fórmula com nenhum conectivo além de $\sim$ e $\equiv$ deve ter ou todos V's em sua coluna final, ou todos F's, ou dois V's e dois F's. (Isso é rigorosamente provado por indução matemática na resposta ao exercício 2 de §27, p. 119).

21.22 *A implicação material e a disjunção exclusiva são, juntas, adequadas*

[Não há um consenso para símbolo para a disjunção exclusiva. Sua tabela verdade é

A	B	A disj. excl. B
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Pode ser visto que a disjunção exclusiva tem a mesma tabela verdade que a negação de uma equivalência material. Então, podemos usar o símbolo $\not\equiv$ para a disjunção exclusiva].

Prova. Use 21.1 e o esquema tautológico

$\sim A \equiv (A \not\equiv (A \supset A))$.

21.12 *Os únicos conectivos diádicos que são adequados por si próprios são* $|$ *e* $\downarrow$ [Żyliński, 1924]

Prova. Suponha que houvesse algum outro conectivo. Chame-o de $*$. Calculamos qual deveria ser sua tabela verdade, linha por linha:

A	B	A$*$ B
V	V	?
F	V	?
V	F	?
F	F	?

Se a entrada da primeira linha fosse V, então qualquer fórmula construída usando-se apenas $*$ teria o valor V quando todos os seus símbolos proposicionais tomassem o valor V. Então, nenhuma combinação poderia expressar a negação de A. Então, a entrada para a primeira linha deve ser F. Similarmente, a entrada para a última linha deve ser V.

Isso nos dá:

A	B	A$*$ B
V	V	F
F	V	?
V	F	?
F	F	V

Se a segunda e terceira entradas fossem ambas F, $*$ teria a mesma tabela verdade que $|$ (e então seria o mesmo conectivo que $|$, em tudo, exceto o formato físico de seu símbolo, que não é importante de um ponto de vista teórico)[2]. Se fossem ambas V, $*$ seria o mesmo que $\downarrow$. Isso deixa apenas duas possibilidades a se considerar, a saber, (1) a segunda entrada é V e a terceira é F, e (2) a segunda entrada é F e

[2]Um conectivo proposicional vero-funcional é um símbolo *significativo*, não um símbolo meramente formal

a terceira é V. No primeiro caso, teríamos

$$A * B \equiv \sim A.$$

No segundo caso, teríamos

$$A * B \equiv \sim B.$$

Em ambos os casos, $*$ seria definível em termos de $\sim$. Mas $\sim$ não é adequado por si mesmo, porque as únicas funções de um argumento definíveis a partir dela são a negçãoa e a identidade. I.e., iniciando-se a partir de uma fórmula A e usando apenas a negação, podemos chegar a fórmulas que são vero-funcionalmente equivalentes a A, e a fórmulas que são vero-funcionalmente equivalentes a $\sim A$, mas nada mais:

$$\begin{array}{l} A \\ \sim A \\ \sim\sim A \\ \sim\sim\sim A \\ \sim\sim\sim\sim A \\ \ldots \end{array}$$

Não podeos definir em termos de $\sim$ sozinho qualquer uma das outras duas funções de verdade de um argumento (§16, pp. 50, 51 acima), a saber

$$\begin{cases} f_1(V) = V \\ f_1(F) = V \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} f_2(V) = F \\ f_2(F) = F \end{cases}$$

Então, qualquer conectivo diádico que não for o mesmo que $|$ ou $\downarrow$ é inadequado por si só.

Q.E.D.

22 Um aparato dedutivo para P: o sistema formal PS. Definições de *prova em TS, teorema de PS, derivação em PS, consequência sintática em PS, conjunto prova-teoricamente consistente de PS*

Trate esta seção como se ela continuasse diretamente do final de §18. Finja que você não sabe de nada do conteúdo de §§19 − −21, i.e., nada sobre qualquer interpretação de P.

Agora nós especificamos um aparato dedutivo para a linguagem formal P, a saber, um conjunto de axiomas de uma regra de inferência. Nós chamamos o sistema formal resultante de sistema PS (*propositional system*).

O sistema formal PS

Axiomas de PS

Se A, B e C são quaisquer fbfs de P (não necessariamente distintas), então os seguintes são axiomas de PS (lembre-se da convenção de se eliminar parênteses):

[PS 1] $A \supset (B \supset A)$

[PS 2] $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

[PS 3] $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$

Nada mais é um axioma de PS.

Comentários

1. As expressões '$A \supset (B \supset A)$', etc. pertencem à metalinguagem ('A' e 'B' não são símbolos de P). Então, PS 1, PS 2 e PS3 não são axiomas de PS, mas *esquemas* de axiomas. Qualquer fbf de P da forma de PS 1, PS 2 ou PS 3 é um axioma de PS em virtude desses três esquemas.

Exemplos: As seguintes fórmulas são axiomas de PS:

$p' \supset (p'' \supset p')$	[por PS 1]
$p' \supset (p' \supset p')$	[por PS 1]
$\sim p' \supset (p' \supset \sim p')$	[por PS 1]
$(\sim\sim p' \supset \sim p') \supset (p' \supset \sim p')$	[por PS 3]
$(p' \supset p'') \supset (p' \supset (p' \supset p''))$	[por PS 1]

As seguintes fórmulas não são axiomas de PS:

$A \supset (B \supset A)$	[não é uma fórmula de P]
$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$	[idem]
$(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$	[idem]
$(p' \supset p'') \supset (\sim p'' \supset \sim p')$	[*não* permitido por PS 3]

2. Não está em questão se esses axiomas são verdades auto-evidentes ou qualquer coisa do tipo. Eles são meramente cadeias de símbolos do alfabeto de P, capazes de ser interpretados, certamente, mas *definidos* sem referência a qualquer interpretação.

Regras de inferência de PS

Se A e B são quaisquer fórmulas de P, então B é uma consequência imediata em PS do par de fórmulas A e $(A \supset B)$.

Informalmente: Dado ambos A e $(A \supset B)$, pode-se inferir B.

Comentário. Ao dizer que B é uma consequência imediata do *par* de fórmulas A e $(A \supset B)$, queremos dizer que precisamos de *ambas* as fórmulas para obter B como consequência imediata. B não é uma consequência imediata de A sozinha ou de $(A \supset B)$ sozinha. A ordem em que as fórmulas A e $(A \supset B)$ ocorrem não importa.

Chamamos esta regra de 'Modus Ponens para $\supset$', ou 'MP', abreviado.

Exemplos:

1. p' é uma consequência imediata em PS de p'' e $(p'' \supset p')$.
2. p' é uma consequência imediata em PS de p' e $(p' \supset p')$, mas *não* de p' sozinho.
3. $(p' \supset p')$ é uma consequência imediata em PS de $(p'' \supset (p' \supset p'))$ e p''.
4. $\sim\sim p'$ é uma consequência imediata em PS de $(\sim p' \supset \sim\sim p')$ e $\sim p'$.

Nota. Ao enunciarmos a regra de inferência e darmos estes exemplos, nós não eliminamos quaisquer parênteses.

Definição. Uma *prova* em Ps é uma sequência finita (mas não vazia) de fórmulas de P, cada uma das quais é um axioma de PS ou uma consequência imediata, pela regra de inferência de PS, de duas fórmulas precedendo-a na cadeia.

Exemplos: A seguir estão algumas provas em PS (lembre-se da convenção sobre parênteses):

1.

[1] $p' \supset ((p' \supset p') \supset p')$ [Axioma, por PS 1]
[2] $(p' \supset ((p' \supset p') \supset p')) \supset ((p' \supset (p' \supset p')) \supset (p' \supset p'))$
[Axioma, por PS 2]
[3] $((p' \supset (p' \supset p')) \supset (p' \supset p'))$
[Consequência imediata em PS, por Modus Ponens, das fbfs numeradas [1] e [2]]
[4] $p' \supset (p' \supset p')$ [Axioma, por PS 1]
[5] $p' \supset p'$ [Consequência imediata, por MP, de [3] e [4]]

Comentário. O material em colchetes não faz parte da prova, mas é meramente um comentário explanatório. A prova propriamente dita consiste simplesmente na cadeia de cinco fórmulas.

2.

[1] $p' \supset (p' \supset p')$ [Axioma, por PS 1. Esta única fbf é uma prova completa em PS.]

3.

[1] $(\sim p'' \supset \sim p') \supset (p' \supset p'')$ [PS 3]
[2] $((\sim p'') \supset (p' \supset p'')) \supset$
$(\sim p' \supset ((\sim p'' \supset \sim p') \supset (p' \supset p'')))$ [PS 1]
[3] $\sim p' \supset ((\sim p'' \supset \sim p') \supset (p' \supset p''))$ [MP, 1,2]
[4] $(\sim p' \supset ((\sim p'' \supset \sim p') \supset (p' \supset p''))) \supset$
$((\sim p' \supset (\sim p'' \supset \sim p')) \supset (\sim p' \supset (p' \supset p'')))$ [PS 2]
[5] $(\sim p' \supset (\sim p'' \supset \sim p')) \supset (\sim p' \supset (p' \supset p''))$
[MP, 3,4]
[6] $\sim p' \supset (\sim p'' \supset \sim p')$ [PS 1]
[7] $\sim p' \supset (p' \supset p'')$ [MP, 6,5]

Comentários

1. As fórmulas mencionadas na definição de *prova em PS* devem ser fórmulas completas, não meramente subfórmulas de fórmulas. Por exemplo, a prova no exemplo 1 é uma cadeia de exatamente *cinco* fórmulas, e a prova no exemplo 2 é uma cadeia de exatamente *uma* fórmula.

2. De acordo com a definição, uma prova é uma sequência, e a sequência poderia ser escrita sem qualquer espaço entre as fórmulas. Por exemplo, a prova no exemplo 1 poderia começar assim [utilizando todo o suprimento de parênteses]:

$$(p' \supset ((p' \supset p') \supset p'))((p' \supset ((p' \supset p')) \supset ...$$

   Os espaços estão ali simplesmente para tornar as coisas mais fáceis.

Definição. Uma fórmula A é um *teorema de PS* [$\vdash_{PS} A$] sse há alguma prova em PS cuja última fórmula é A.

Exemplo: $(p' \supset p')$ é um teorema de PS, uma vez que há uma prova em PS em que essa é a última fórmula: cf. exemplo 1 na página 95.

'$\vdash$' é um símbolo da metalinguagem, não da linguagem objeto. A mesma convenção sobre aspas se aplica a ele, bem como ao '$\models$'.

Comentário. Pela nossa definição, todo *axioma* de PS também será um *teorema* de PS. Mas o inverso não é verdade.

Definição. Uma cadeia de fórmulas é uma *derivação em PS de uma fbf A a partir de um conjunto Γ de fbfs de P* sse

(1) ela é uma cadeia finita (mas não vazia) de fórmulas de P, e

(2) a última fórmula na cadeia é A, e

(3) cada fórmula na cadeia é

   (i) um axioma de PS

   (ii) ou uma consequência imediata pela regra de inferência de PS de duas fórmulas precedentes na cadeia

(iii) ou um membro do conjunto Γ.

O conjunto Γ pode ter infinitos membros, finitos membros, ou nenhum membro.

Exemplos: A cadeia

$$p'$$
$$p' \supset p''$$
$$p''$$

é uma derivação em PS da fórmula p'' do conjunto de fórmulas de P cujos únicos membros são p' e $p' \supset p''$; i.e., do conjunto $\{p', p' \supset p''\}$ [aspas não utilizadas].

Comentário. A diferença entre uma *derivação em PS* e uma *prova em PS* é a seguinte:

Em uma *prova em PS, toda* fórmula é um *teorema* de PS.

Em uma *derivação em PS*, algumas fórmulas que ocorrem na cadeia podem *não* ser teoremas de PS; por exemplo, fórmulas de Γ, se Γ é um conjunto de fórmulas que não são teoremas em PS. Em nosso exemplo, nenhuma fórmula na derivação é um teorema de PS.

Toda *prova em PS* é também uma *derivação em PS* da última fórmula na prova (o teorema que ela prova) *a partir do conjunto vazio*, e também a partir de qualquer outro conjunto de fórmulas de P que você queira tomar. Isso se segue das definições de *prova em PS* e *derivação em PS.*

Definição. Uma fórmula A é uma *consequência sintática em PS* de um conjunto Γ de fórmulas de P [$\Gamma \vdash_{PS} A$] sse há uma derivação em PS de A do conjunto Γ.

Exemplo: p''' é uma consequência sintática em PS do conjunto $\{p', p' \supset p'', p'' \supset p'''\}$, porque há uma derivação de

p''' a partir desse conjunto, por exemplo, a derivação

$$
\begin{array}{l}
p' \\
p' \supset p'' \\
p'' \\
p'' \supset p''' \\
p'''
\end{array}
$$

Note que esta cadeia não é uma prova em PS.

Comentário. Uma *derivação* é uma cadeia de fórmulas. Uma *consequência sintática* é uma fórmula que está em uma certa relação com um conjunto de fórmulas.

Se há apenas uma fórmula em Γ, é comum escrever $A \vdash_{PS} B$ em vez de $\{A\} \vdash_{PS} B$.

Definição. Um conjunto Γ de fórmulas de P é um *conjunto prova-teoricamente consistente de PS* sse para nenhuma fórmula A de P é o caso que ambos $\Gamma \vdash_{PS} A$ e $\Gamma \vdash_{PS} {\sim}A$.

As noções de uma *fórmula* de PS prova-teoricamente consistente/inconsistente são definidas de maneira similar.

O que chamamos de conjunto prova-teoricamente consistente é geralmente chamado simplesmente de conjunto consistente. Mas, uma vez que já temos o conceito de conjunto modelo-teoricamente consistente e queremos distinguir os dois tipos de consistência, usaremos o termo mais natural para isso. Abreviaremos 'prova-teoricamente consistente' para 'p-consistente'. Posteriormente, mostraremos que um conjunto de fórmulas é um conjunto prova-teoricamente consistente de PS sse ele é um conjunto modelo-teoricamente consistente de P. Mas isso requer uma prova bem mais elaborada (§32).

Comentários.

1. Um conjunto Γ de fórmulas de P pode ser um conjunto p-inconsistente de PS mesmo se para nenhuma fórmula A, tanto A quanto $\sim A$ são *membros* de Γ. Conjuntos p-consistentes e p-inconsistentes são definidos em termos do que pode ser *derivado* deles com a ajuda dos axiomas e/ou regras de inferência de PS, e uma fórmula pode ser derivável em PS a partir de um conjunto de fórmulas sem ser um membro do conjunto.

2. A definição de conjunto p-consistente de PS faz uma referência essencial ao *aparato dedutivo* de PS. Contraste com a definição de conjunto m-consistente, que não faz.

3. A noção de um conjunto p-consistente pode ser similarmente definida para outros sistemas formais. Um conjunto de fórmulas que é um conjunto p-consistente de um sistema formal S pode ser um conjunto -inconsistente de outro sistema formal S' com a mesma linguagem formal de S. *Tudo depende dos aparatos dedutivos de S e S'.* Por outro lado, um conjunto m-consistente de fórmulas de uma linguagem formal L continua um conjunto m-consistente de fórmulas de L[1] *independentemente do aparato dedutivo que for adicionado a L.*

23 Algumas verdades sobre $\vdash_{ps}$

Onde A e B são fórmulas arbitrárias de P e Γ e Δ são conjuntos arbitrários de fórmulas de P:

23.1 $A \vdash_{PS} A$

23.2 *Se* $\Gamma \vdash_{PS} A$, *então* $\Gamma \cup \Delta \vdash_{PS} A$

[1] Assumindo que as noções de *intepretação de L* e *verdade para uma interpretação de L* são mantidas constantes.

23.3 *Se* $\Gamma \vdash_{PS} A$ *e* $A \vdash_{PS} B$*, então* $\Gamma \vdash_{PS} B$

23.4 *Se* $\Gamma \vdash_{PS} A$ *e* $\Gamma \vdash_{PS} A \supset B$*, então* $\Gamma \vdash_{PS} B$

23.5 *Se* $\vdash_{PS}$*, então* $\Gamma \vdash_{PS} A$

23.6 $\vdash_{PS} A$ *sse* $\emptyset \vdash_{PS} A$

Esses são análogos exatos das verdades sobre $\models_P$ 20.1–−20.5 e 19.1, e novamente eles são mais ou menos consequências diretas das definições.

23.7 $\Gamma \vdash_{PS} A$ *sse há um subconjunto finito* Δ *de* Γ *tal que* $\Delta \models_{PS} A$

Este meta-teorema segue nosso requerimento de que uma derivação deve ser uma cadeia *finita de fórmulas*.

O meta-teorema 23.7 tem um análogo modelo-teórico exato, a saber,

[32.18] $\Gamma \models_P A$ sse há um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \models_P A$

Mas, apesar de podermos provar agora que se há um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \models_P A$, então $\Gamma \models_P A$[1], a prova do inverso não será dada até ser dada a prova da completude semântica de PS.

Posteriormente, depois de provarmos o Teorema da Dedução para PS (§26), teremos:

[26.2] $A \vdash_{PS} B$ *iff* $\vdash_{PS} A \supset B$

Este é o análogo prova-teórico de 19.7.

Seguindo o costume, escreveremos $\Gamma, \Delta \vdash_{PS} A$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \vdash_{PS}$. Similarmente, escreveremos $\Gamma, A \vdash_{PS} B$ em

[1]Então: Uma vez que Δ é um subconjunto de Γ, $\Gamma - \Gamma \cup \Delta$. Então, tudo o que precisamos mostrar é que se $\Delta \models_P A$, então $\Gamma \cup \Delta \models_P A$. Mas isso é simplesmente uma variação notacional de 20.2 ['Se $\Gamma \models_P A$, então $\Gamma \cup \Delta \models_P A$'].

vez de $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{PS} B$, e $\Gamma, A, B \vdash_{PS} C$ em vez de $\Gamma \cup \{A\} \cup \{B\} \vdash_{PS} C$.

24 Conceitos de consistência

Alonzo Church (1956, p. 108) escreve:

> A noção de *consistência* em um sistema lógico é semântica em motivação, surgindo do requerimento de que nada que é logicamente absurdo ou auto-contraditório em significado pode ser um teorema, ou que não devem haver dois teoremas tais que um é a negação do outro. Mas nós buscamos modificar essa noção originalmente semântica de tal maneira a torná-la sintática em característica (e, portanto, aplicável a sistemas lógicos independentemente da interpretação adotada para eles)..

[Seguem-se uma abordagem mais cuidadosa de vários conceitos de consistência]

Consistência simples

Um sistema S é *simplesmente consistente* sse para nenhuma fórmula A de S, tanto A quanto a negação de A são teoremas de S.

> (Para sistemas particulares, esta definição pode ser transformada em uma definição puramente sintática (prova-teórica) ao enquadrá-la em termos do simbolismo usado no sistema para expressar negação, mas sem se referir à interpretação pretendida)

Consistência absoluta

Um sistema S é *absolutamente consistente* sse pelo menos uma fórmula de S não é um teorema de S.

24.1. *Se S é um sistema formal em que para cada fórmula A de S há uma fórmula A' de S que, na interpretação pretendida, expressa a negação de A, então se S é simplesmente consistente, então ele é absolutamente consistente.*

Prova. Seja S qualquer sistema arbitrário formal que satisfaz a hipótese do teorema. Suponha que S é simplesmente consistente. Então, não há uma fórmula A de S tal que tanto A quanto A' são teoremas de S. Então, para alguma fórmula particular B de S, ou B não é um teorema de S ou B' não é um teorema de S. Mas tanto B quando B' são fórmulas de S. Então S é absolutamente consistente.

24.2 *Se S é um sistema formal para o qual há uma metalinguagem que $A, A' \vdash_S B$ (onde A e B são fórmulas de S, e A' é como em 24.1), então se S é absolutamente consistente, então ele é simplesmente consistente*

Prova. Seja S qualquer sistema formal arbitrário que satisfaz a hipótese do teorema. Suponha que S não é simplesmente consistente. Então $\vdash_S A$ e $\vdash_S A'$ para alguma fórmula A. Então, em virtude do meta-teorema mencionado na hipótese, $\vdash_P B$ para *qualquer* fórmula arbitrária B; i.e., toda fórmula de S é um teorema de S. Então, S não é absolutamente consistente. Portanto, se S é absolutamente consistente, então ele não é simplesmente consistente.

Nota. Há sistemas formais da lógica proposicional verofuncional clássica para os quais não é um teorema que $A, A' \vdash B$ para fórmulas arbitrárias A e B. Por exemplo, não é um meta-teorema da formalização de Hiż do cálculo proposicional clássico, descrito na página 158 abaixo, e poderíamos adicionar a seu sistema alguma fórmula e sua negação como axiomas sem necessariamente tornar toda fórmula um teorema. Ou seja, poderíamos construir um sistema que contém todo o cálculo proposicional clássico (no sentido de ter todos os teoremas apropriados) e que é absolutamente consistente sem ser simplesmente consistente.

25 Prova da consistência de PS

(a) Prova da consistência absoluta de PS por meios modelo-teóricos

Esboço da prova. Nós forencemos uma interpretação para P, e mostramos que nela, todos os teoremas de PS são verdadeiros. Então, nós temos: Se uma fórmula A é um teorema de PS, então ela é verdadeira para a interpretação, e, portanto, pela cláusula 2 da nossa definição de *verdadeiro para uma interpretação de P*, $\sim A$ não é verdadeira para a interpretação, e, portanto, $\sim A$ não é um teorema de PS. Ou seja, para qualquer fórmula A de P, se A é um teorema de PS, então $\sim A$ não é um teorema; i.e., PS é simplesmente consistente. Para provar a consistência absoluta de PS, tudo o que precisamos fazer é exibir uma fórmula de P que não é verdadeira para as interpretações e, portanto, que não é um teorema de de PS.

Detalhes

1. Nossa intepretação de P é essa: A cada símbolo proposicional nós atribuímos o valor verdade V. [$\sim$ e $\supset$ são interpretados como nas cláusulas 2 e 3 da definição de *verdadeiro para uma interpretação de P* em §19].

2. *Todo axioma de Ps é verdadeiro para essa interpretação.*

Esboço de prova: Segue-se das nossas definições anteriores que qualquer fórmula arbitrária de P é ou verdadeira para nossa interpretação ou falsa para ela. Então, apesar de cada um dos três esquemas de axiomas de PS representarem um conjunto infinito de axiomas, os A's, B's e C's nesses esquemas significam fórmulas que podem apenas ser verdadeiras ou falsas em nossa interpretação, e então, para verificar se algum dos [infinitos] axiomas pode ser falso em nossa interpretação, tudo o que precisamos considerar é um número finito de possibilidades para cada esquema de axioma, a saber, todas as possíveis combinações de verdadeiro e falso para suas letras esquemáticas constituintes. Por exemplo, no caso do esquema de axioma PS 1 [$A \supset (B \supset A)$], precisamos considerar apenas quatro possibilidades, a saber, os casos

(1) onde A é verdadeiro e B é verdadeiro;

(2) onde A é falso e B é verdadeiro;

(3) onde A é verdadeiro e B é falso;

(4) onde A é falso e B é falso.

Uma referência à cláusula 3 da definição de *verdadeiro para uma interpretação de P* nos mostrará que em cada um desses quatro casos $A \supset (B \supset A)$ é verdadeiro; i.e., qualquer fórmula de P que é um axioma de PS em cirtude do esquema de axioma PS 1 será verdadeiro para nossa interpretação. Deixamos para o leitor verificar que o mesmo é verdadeiro para os esquemas PS 2 [oito casos a serem considerados] e PS 3 [quatro casos].

3. *A (única) regra de inferência de PS preserva verdade-para-nossa-interpretação* [i.e., para qualquer par arbitrário de fórmulas A e B, se A e $A \supset B$ são ambos verdadeiros para nossa interpretação, então B também é verdadeiro para nossa interpretação].

Prova. Por 19.5.

4. *Todo teorema de PS é verdadeiro para nossa interpretação.*

Prova. Diretamente de 2 e 3.

5. *PS é simplesmente consistente*: i.e., para nenhuma fórmula A de P são ambas A e $\sim A$ teoremas de PS.

Prova. Como no *esboço*, usando 4.

6. *PS é absolutamente consistente.*

Prova. A fórmula $\sim p'$ (por exemplo) não é verdadeira para nossa interpretação. Portanto, por 4, ela não é um teorema de PS.

Sumário dessa prova

1. Todo axioma de PS é verdadeiro para a interpretação.

2. A regra de inferência de PS preservam verdade-para-a-interpretação.

3. Portanto, todo teorema de PS é verdadeiro para a interpretação.

4. Para nenhuma fórmula A de P, são ambas A e $\sim A$ verdadeiras para a interpretação.

5. Portanto, para nenhuma fórmula A de P, são ambas A e $\sim A$ teoremas de PS: i.e., PS é simplesmente consistente.

6. Há pelo menos uma fórmula de P que não é verdadeira para a interpretação: por exemplo, $\sim p'$.

7. Portanto, há pelo menos uma fórmula de P que não é um teorema de PS: i.e., PS é absolutamente consistente.

Uma prova diferente mas muito similar da consistência simples e absoluta de PS é dada em §28: cf. o comentário depois de 28.3.

(b) Prova da consistência simples e absoluta de PS por meios prova-teóricos

Esboço de prova. Nós definimos prova-teoricamente (em termos puramente sintáticos) uma certa propriedade, X, que, se pertence a uma fórmula A, não pertence a $\sim A$. Nós então mostramos que todo teorema de PS tem a propriedade de X. Isso é suficiente para mostrar que PS é simplesmente consistente [se A é um teorema, então $\sim A$ não é]. Para provar a consistência absoluta, nós exibimos uma fórmula de P que não tem a propriedade X e, portanto, não é um teorema de X.

Detalhes

1. Para a propriedade X, nós tomamos a propriedade que chamaremos de 'tautologicidade sintática' [*syntactic tautologyhood*]. A noção lógica normal de tautologia é uma noção semântica, não tendo a ver com verdade e falsidade e então com a intepretação de fórmulas. Para construir a noção de uma tautologia sintática, nós tomamos a noção normal de tautologia e removemos seus elementos semânticos. Então, em vez de falarmos sobre os valores de verdade V e F, nós falamos sobre os símbolos (não interpretados) '1' e '0' (ou quaisquer outros símbolos que você quiser escolher). Por exemplo, em vez de dizer que $p' \supset p'$ é uma tautologia porque sua tabela verdade tem apenas V's em sua coluna final, nós dizemos que ela é uma tautologia sintática porque ela tem a propriedade (sintática) que sua tabela 0-1 associada [o análogo sintático de uma tabela verdade] não tem qualquer coisa além de '1's em sua coluna final.

A partir do último parágrafo, pode-se verificar que para nossa prova sintática, nós precisamos dar análogos sintáticos de tabelas verdade para os conectivos de P. Aqui estão eles:

Tabela para $\sim$:

A	$\sim A$
1	0
0	1

Tabela para $\supset$:

A	B	$A \supset B$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Nós agora definimos uma *associação a P* [este é apenas um termo inventado, não usado em outro lugar] como uma associação de cada símbolo proposicional de P a um ou outro (mas não a ambos) dos símbolos '1' e '0', junto com uma associação de cada outra fórmula de P a '1' e '0' de acordo com as tabelas para $\sim$ e $\supset$ dadas acima. Finalmente, nós definimos uma *tautologia sintática* como uma fórmula que é associada a '1' em *toda* associação de P.

2. *Todo axioma de PS é uma tautologia sintática.*

Prova. Para qualquer associação de P, toda fórmula de P será associada a um ou outro, mas não ambos, dos símbolos '1' e '0'. Então, para cada esquema de axioma de PS nós precisamos considerar apenas um número finito de possibilidades [compare o argumento similar do estágio 2 da prova por meios modelo-teóricos]. Por exemplo, para o esquema de axioma PS 1 [$A \supset (B \supset A)$] nós temos apenas que considerar as quatro possibilidades:

(1) A é associado a '1' e B é associado a '1';

(2) A é associado a '0' e B é associado a '1';

(3) A é associado a '1' e B é associado a '0';

(4) A é associado a '0' e B é associado a '0'.

Em cada caso, $A \supset (B \supset A)$ é associado ao símbolo '1'. Então, qualquer fórmula de P que é um axioma por PS 1 será associada a '1' em *toda* associação para P; i.e., será uma tautologia sintática. Similarmente para os dois outros esquemas de axioma.

3. *A (única) regra de inferência de PS preserva a tautologicidade sintática*

Prova. Suponha que, para duas fórmulas A e B, A e $A \supset B$ são ambas tautologias sintáticas enquanto B não é. Haverá uma tabela 1-0 mostrando as associações de 1 e 0 a A, a B e a $A \supset B$ para cada combinação possível de 1 e 0 a seus símbolos proposicionais constituintes. Para pelo menos uma linha nessa tabela, B será associado a '0' por hipótese. Mas, nessa linha, A será associado a '1', uma vez que ela é sempre associada a '1' por hipótese. Então, nessa linha, $A \supset B$ será associado a '0', pela tabela para $\supset$ dada em 1 acima. Mas isso contradiz nossa suposição de que $A \supset B$ é uma tautologia sintática. Então, se A e $A \supset B$ são ambos tautologias sintáticas, B deve ser também.

4. *Todo teorema de PS é uma tautologia sintática.*

Prova. Diretamente de 2 e 3.

5. *PS é simplesmente consistente.*

Prova. A partir da tabela para $\sim$ dada em 1, pode-se ver que para qualquer fórmula A, se A é uma tautologia sintática, então $\sim A$ não é. Então (a partir de 4), se A é um teorema de PS, $\sim A$ não é.

6. *PS é absolutamente consistente.*

Prova. A fórmula p' (por exemplo) não é uma tautologia sintática. Portanto, por 4, ela não é um teorema de PS.

Nota histórica

Emil Post (1920) foi o primeiro a dar uma prova da consistência do cálculo proposicional clássico. Sua prova foi semântica em caráter: ele mostrou que todos os teoremas do sistema com o qual ele estava lidando (o sistema proposicional de *Principia Mathematica*) são tautologias. Jan Łukasiewicz parece ter sido o primeiro a encontrar uma prova puramente sintática, do tipo esboçado em (b) acima. A ideia chave comum a ambas as provas de consistencia (a saber, a ideia de mostrar que há uma propriedade que pertence a todos os axiomas, que é preservada pela(s) regra(s) de inferência e que não pertence a nenhuma fórmula contraditória) remonta a David Hilbert: cf. Hilbert (1904).

26 O Teorema da Dedução para PS

O Teorema da Dedução é um meta-teorema que é útli para provar outros meta-teoremas. Ele parece ter sido provado pela primeira vez por Alfred Tarski em 1921 [cf. Tarski, 1923-38, p. 32], mas a a prova mais antiga publicada (para um sistema de lógica de predicados: o resultado inclui aquele para um sistema de lógica proposicional) foi por Jacques Herbrand em 1930 [cf. Herbrand, 1929, pub. 1930]. Herbrand, que fez contribuições excepcionais para a lógica matemática, morreu em um acidente de alpinismo em 1931, na idade de 23 anos.

26.1 *(O Teorema da Dedução para PS) Se* $\Gamma, A \vdash_{PS} B$*, então* $\Gamma \vdash_{PS} A \supset B$

Em outras palavras: Se B é uma consequência sintática em PS do conjunto $\Gamma \cup \{A\}$, então $A \supset B$ é uma consequência sintática, em PS, do conjunto Γ sozinho.

Isso, por sua vez, significa: Se há uma derivação em PS de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$, então há uma derivação em PS de $A \supset B$ a partir de Γ sozinho.

Exemplos: O Teorema da Dedução implica que:

1. Se há uma derivação em PS de p' a partir de $\Gamma \cup \{p''\}$, então há uma derivação em PS de $p'' \supset p'$ a partir de Γ sozinho.

2. Se há uma derivação em PS de p' a partir de $\emptyset \cup \{p''\}$, então há uma derivação em PS de $p'' \supset p'$ a partir de $\emptyset$ [o conjunto vazio].

A partir do exemplo 2 pode-se verificar que o Teorema da Dedução implica que se $A \vdash_{PS} B$, então $\vdash_{PS} A \supset B$ (o caso em que Γ é vazio).

Esboço de prova. A ideia da prova é essa: Nós supomos que, para um conjunto arbitrário Γ de fórmulas de P e uma fórmula arbitrária A de P, há uma derivação em PS de uma fórmula B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$. Nós, então, mostramos como, dada uma tal derivação, construir uma derivação em PS de $A \supset B$ a partir de Γ sozinho. Concluímos que *se* há *qualquer* dedrivação em PS de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$, *então* há uma derivação em PS de $A \supset B$ a partir de Γ sozinho.

A prova deve mostrar que, dada *qualquer* derivação arbitrária de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$, há uma derivação de $A \supset B$ a partir de Γ sozinho. Então o que nós fazemos é, *primeiro*, considerar todas as derivações de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ que tem *exatamente uma* fórmula de tamanho, e mostrar como construir, em qualquer tal caso, uma derivação de $A \supset B$ a partir de Γ (uma derivação que não precisa ter apenas uma fórmula de tamanho). *Então*, nós mostramos que *se* o Teorema da Dedução vale para *todas* as derivações de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ que têm *menos que* k fórmulas de tamanho (onde k é um número inteiro positivo arbitrário), ele também valerá para *todas* as derivações de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ que têm *exatamente* k fórmulas de tamanho. E a partir desses resultados, e do fato de que por definição, qualqer derivação em PS tem tamanho finito apenas, segue-se que o Teorema da Dedução vale para *todas* as derivações de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$.

A forma da prova descrita no último parágrafo é conhecida como *prova por indução matemática (forte).* Seus dois estágios são conhecidos como o *caso base* e o *caso indutivo.* Na base de uma prova por indução matemática, nós estabelecemos que o teorema (qualquer que seja) vale para o caso mínimo (na prova presente, o caso em que a derivação tem uma fórmula de tamanho: não pode haver um caso menor que esse; uma derivação tem que ter no mínimo uma fórmula de tamanho). No passo indutivo, nós provamos que *se* o teorema vale para todos os casos até um dado ponto arbitrário, *então* ele também vale para todos os casos no próximo ponto mais alto. (Essa será uma indução *forte.* Uma indução *fraca* é uma em que o passo indutivo mostra que se o teorema vale para todos os casos *em* um dado ponto arbitrário, então ele vale também para todos os casos no próximo ponto mais alto.)

Prova adequada

Seja Γ um conjunto arbitrário de fórmulas de P. Seja A uma fórmula arbitrária de P. Seja D uma derivação em PS de uma fórmula B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$. D é uma cadeia finita de fórmulas. Se há n fórmulas em D, sejam elas $D_1, ..., D_n$, na ordem em que elas ocorrem em D; em tal caso, diremos que D tem o *tamanho* n.

Base: $n = 1$

Seja D uma derivação em PS de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ que tem exatamente uma fórmula de tamanho. Nós mostraremos como, dado D, podemos construir uma derivação, que chamaremos de D' (e que não precisa ter o tamanho 1), de $A \supset B$ a partir de Γ sozinho.

Uma vez que D é uma derivação de B e tem exatamente uma fórmula de tamanho, D deve nesse caso consistir simplesmente da própria fórmula B. Isto é:

$$D = D_n = D_1 = B.$$

Uma vez que não há fórmulas em D precedendo B, B não pode ser uma consequência imediata em PS de fórmulas precedentes. Então, pela definição de *derivação em PS* [§22] B deve ser ou um axioma ou estar no conjunto $\Gamma \cup \{A\}$. Isso nos dá três casos a serem considerados:

1. B é um axioma.
2. B está no [i.e., é um membro do] conjunto Γ.
3. B é o próprio A.

Nós mostramos, em cada um desses casos, como construir uma derivação D' com $A \supset B$ como sua última fórmula e satisfazendo a condição de que ela é uma derivação de Γ sozinho.

Caso 1. B é um axioma. Então D' é a derivação (de tamanho 3)

[1]	B	[Axioma, *ex hypothesi*]
[2]	$B \supset (A \supset B)$	[Axioma, por PS 1]
[3]	$A \supset B$	[MP, 1, 2]

Aqui, D' é (não meramente uma derivação, mas) uma prova em PS, e também uma derivação em PS de sua última fórmla a partir de *qualquer* conjunto de fórmulas de P [cf. 23.5]. [O que nós fizemos aqui foi descrever na metalinguagem uma sequência de fórmulas que é uma prova em PS. 'A' e 'B' certamente não são símbolos de P.]

Caso 2. B está no conjunto Γ. Então, D' é

[1]	B	[Dado como um membro de Γ]
[2]	$B \supset (A \supset B)$	[Axioma, por PS 1]
[3]	$A \supset B$	[MP, 1, 2]

Caso 3. B é o próprio A. Então $A \supset B$ é $A \supset A$ e D' é

[1]	$A \supset ((A \supset A) \supset A)$	[Axioma, por PS 1]
[2]	$(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset$ $((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)))$	[Axioma, por PS 2]
[3]	$(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$	[MP, 1, 2]
[4]	$A \supset (A \supset A)$	[Axioma, por PS 1]
[5]	$A \supset A$	[MP, 4, 3]

Esta é uma prova de $A \supset A$ em PS, e, portanto, automaticamente uma derivação em PS de $A \supset A$ a partir de qualquer conjunto de fórmulas que você quiser tomar.

Passo indutivo

Assuma: O Teorema da Dedução vale para toda derivação com tamanho menor que k.

Para provar, sob essa assunção, que: Ele vale para toda derivação de tamanho k.

Seja D qualquer derivação de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ de tamanho k. Há quatro casos a serem considerados:

1. B é um axioma.
2. B está no conjunto Γ.

3. B é o próprio A.

4. B é uma consequência imediata por MP de duas fórmulas precedentes em D.

Casos $1-3$ são exatamente como no passo base.

Caso 4. B é uma consequência imediata por MP de duas fórmulas precedentes em D.

Sejam essas duas fórmulas D_i e D_j, onde $i < k$ e $j < k$ (uma vez que ambas, D_i e D_j, precedem B, e B é D_k). Então ou D_i é $D_j \supset B$, ou D_j é $D_i \supset B$, uma vez que de outro modo, B não seria uma consequência imediata por MP de D_i e D_j. Não importa qual alternativa escolhemos, então vamos agora supor que D_j é $D_i \supset B$.

O tamanho da derivação de D_i a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ é menor que k. Então, pela assunção do passo indutivo, nós temos

1. $\Gamma \vdash_{PS} A \supset D_i$ [De $\Gamma, A \vdash_{PS} D_i$, pela hipótese de indução]

Similarmente, nós temos

2. $\Gamma \vdash_{PS} A \supset D_j$; i.e., $\Gamma \vdash_{PS} A \supset (D_i \supset B)$

Mas

3. $\vdash_{PS} (A \supset (D_i \supset B)) \supset ((A \supset D_i) \supset (A \supset B))$ [Axioma, por PS 2]

Portanto, usando 23.4 e 23.5 em 2 e 3,

4. $\Gamma \vdash_{PS} (A \supset D_i) \supset (A \supset B)$

e, novamente, usando 23.4 e 23.5 em 1 e 4,

5. $\Gamma \vdash_{PS} A \supset B$,

que é o que queremos.

Isso completa o passo indutivo, e com isso a prova do

Teorema da Dedução para PS.

[Nós mostramos (no passo base) que o Teorema da Dedução vale para todas as derivações de tamanho 1, e nós também mostramos (no passo indutivo) que *se* ele vale para todas as derivações de tamanho menor que k (onde k é qualquer número arbitrário), *então* ele vale para todas as derivações de tamanho k. E isso significa que nós mostramos que o teorema vale para derivações em PS de *qualquer* tamanho finito, i.e., para *todas* as derivações em PS.]

Uma análise desta prova do Teorema da Dedução mostrará que as únicas propriedades especiais de PS às quais nós apelamos foram estas:

1. Qualquer fbf da forma $A \supset (B \supset A)$ é um teorema.

2. Qualquer fbf da forma $(A \supset (B \supset C) \supset) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ é um teorema.

3. Modus ponens para $\supset$ é a *única* regra de inferência.

Então, nossa prova mostra que o Teorema da Dedução valerá para qualuqer outro sistema formal tendo essas três propriedades (usaremos este comentário mais tarde).

É claro que se $\vdash_{PS} A \supset B$, então $A \vdash_{PS} B$. A partir dessa verdade e do Teorema da Dedução, nós obtemos o útil meta-teorema:

26.2 $A \vdash_{PS} B$ *sse* $\vdash_{PS} A \supset B$

27 Nota sobre provas por indução matemática

É importante obter o valor correto de n no passo base. O que queremos provar em um argumento indutivo é algo que vale para *todos os casos possíveis*. Nós provamos isso ao mostrar (a) que isso vale para o menor caso possível, e (b) que, para qualquer caso arbitrário, se ele vale para esse caso, então ele vale para o próximo caso maior. Para fazermos isso adequadamente, nosso caso base deve provar a proposição para o menor caso possível. Com o Teorema da Dedução, o menor caso possível foi o caso em que $n = 1$ [estávamos lidando com derivações, e cadeias de fórmulas de tamanho menor que 1 não são derivações]. Mas as coisas nem sempre são assim. Em provas posteriores por indução matemática, teremos casos base em que o menor caso possível é o caso em que $n = 0$. Então, por exemplo, o menor caso possível quando estamos lidando com o número de conectivos em uma fórmula de P é o caso em que a fórmula *não* tem conectivos [nesse caso, ela é um símbolo proposicional sozinho não negado]. Se tomarmos $n = 1$ no caso base, quando, na verdade, precisaríamos de $n = 0$, nossa 'prova' não provará o que queremos que ela prove: teremos deixado de fora um caso possível.

Exercícios.

1. Dê uma prova por indução matemática do Teorema da Interpolação [20.6]:

Se $\models_P A \supset B$ *e* A *e* B *têm pelo menos um símbolo proposicional em comum, então há uma fórmula* C *de* P *tal que todos os seus símbolos proposicionais ocorrem tanto em* A *quanto em* B*, de maneira que* $\models_P A \supset C$ *e* $\models_P C \supset B$

[Dica: Use indução matemática no número, n, de símbolos proposicionais em A mas não em B.]

2. Prove por indução matemática que qualquer tabela verdade com quatro linhas para qualquer fórmula A com apenas os conectivos $\sim$ e $\equiv$ deve ter como sua coluna final ou tudo V, ou tudo F, ou dois V's e dois F's. [Dica: Use indução matemática no número, n, de ocorrências de conectivos em A.]

Respostas.

1. *Prova*

Base: $n = 0$

Então C é o próprio A.

Passo indutivo

Assuma que o teorema vale para todos os casos em que $n < k$. Para mostrar que ele vale para todos os casos em que $n = k$.

Seja A a fórmula tal que $\models_P A \supset B$ e A contêm exatamente k símbolos proposicionais que não ocorrem em B. Seja p um desses símbolos. Seja q um símbolo proposicional arbitrário que ocorre tanto em A quanto em B. Sejam A_1 e A_2 as fórmulas resultantes de substituir p por $(q \supset q)$ e $\sim(q \supset q)$, respectivamente, em A. Então, $\models_P A_1 \supset B$ e $\models_P A_2 \supset B$. Então, (pelo raciocínio padrão da tabela verdade) $\models_P (\sim A_1 \supset A_2) \supset B$. Mas $\models_P (\sim A_1 \supset A_2) \supset B$ tem exatamente $k - 1$ símbolos proposicionais em A mas não em B. Então, podemos aplicar a hipótese indutiva a ela. Então, há alguma fórmula C, contendo apenas símbolos proposicionais em comum com $(\sim A_1 \supset A_2)$ e B, de maneira que $\models_P (\sim A_1 \supset A_2) \supset C$ e $\models_P C \supset B$. Então, dadas as definições de A_1 e A_2, segue-se pelo raciocínio padrão de tabelas verdade que $\models_P A \supset C$. [Pense em $\sim A_1 \supset A_2$ como sendo $A_1 \vee A_2$].

[Este último estágio do argumento consiste em mostrar que

$$(((\sim A_1 \supset A_2) \supset C) \wedge (C \supset B)) \supset (A \supset C)$$

é uma tautologia. Cálculos padrões mostram que isso pode apenas *falhar* em ser uma tautologia se A puder tomar o valor V enquanto A_1 e A_2 tomam ambos o valor F. Mas, pelas nossas definições de A_1 e A_2, se A tem o valor V, um ou outro de A_1 e A_2 deve ter também o valor V.]

2. *Prova*

Base: $n = 1$ (Se $n = 0$, a tabela verdade tem apenas duas linhas)

Então, A tem que ser da forma $B \equiv C$, onde B e C são símbolos proposicionais distintos (se eles não forem distintos, a tabela tem apenas duas linhas) (A não pode ser da forma $\sim B$, onde B não tem conectivos, pois assim, novamente, A teria umma tabela de apenas duas linhas). A tabela, então, é

B	C	$B \equiv C$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

o que satisfaz o teorema.

Passo indutivo

Assuma que o teorema vale para todas as fórmulas com menos de k ocorrências de conectivos. Para mostrar que ele vale para todas as fórmulas com exatametne k ocorrências.

2 casos:

1. A é $\sim B$.
2. A é $B \equiv C$.

Caso 1: A é $\sim B$.

Óbvio

Caso 2: A é $B \equiv C$.

9 subcasos, a saber:

1. B tem tudo V, C tem tudo V.
2. B tem tudo V, C tem tudo F.
3. B tem tudo V, C tem 2 V's e 2 F's.
4. B tem tudo F, C tem tudo V.
5. B tem tudo F, C tem tudo F.
6. B tem tudo F, C tem 2 V's e 2 F's.
7. B tem 2 V's e 2 F's, C tem tudo V.
8. B tem 2 V's e 2 F's, C tem tudo F.
9. B tem 2 V's e 2 F's, C tem 2 V's e 2 F's.

Os subcasos $1 - 8$ são óbvios. O subcaso 9 pode ser provado ao se ir entre todas as finitas possíveis combinações.

28 Alguns meta-teoremas modelo-teóricos sobre PS

28.1 *Todo axioma de PS é logicamente válido*

Prova. Para qualquer interpretação I, qualquer fórmula A é verdadeira ou falsa. Então, apesar de os três esquemas de axiomas de PS representarem um conjunto infinito de axiomas, os A's, B's e C's nesses esquemas representam fórmulas que podem apenas ser verdadeiras ou falsas para qualquer interpretação dada. Para cada esquema de axioma, nós temos apenas que considerar um número finito de possibilidades; por exemplo, para o esquema PS 1, as quatro possibilidades

(1) onde A é verdadeiro e B é verdadeiro;

(2) onde A é falso e B é verdadeiro;

(3) onde A é verdadeiro e B é falso;

(4) onde A é falso e B é falso;

Em cada caso, $A \supset (B \supset A)$ é verdadeiro: i.e., qualquer fórmula de P que é um axioma de PS por PS 1 será verdadeiro para qualquer interpretação. Similarmente para os esquemas PS 2 e PS 3.

28.2 *A regra de inferência de PS preserva a validade lógica*

[i.e., qualquer coisa que é uma consequência imediata, por ela, de duas fórmulas, ambas logicamente válidas, é logicamente válida]

Prova. Diretamente de 19.6 [se $\models_P A$ e $\models_P A \supset B$, então $\models_P B$]

28.3 *Todo teorema de PS é logicamente válido [i.e., se* $\vdash_{PS} A$*, então* $\models_{PS} A$*]*

Prova. Diretamente de 28.1 e 28.2.

A prova desse metateorema é, com efeito, uma nova prova da consistência simples e absoluta de PS. Absoluta, porque há pelo menos uma fórmula de P que não é logicamente válida e, portanto, por 28.3, não é um teorema de PS. Simples, porque para nenhum par de fórmulas A e $\sim A$ são ambas A e $\sim A$ logicamente válidas; então, por 28.3, para nenhum par de fórmulas A e $\sim A$ são ambos A e $\sim A$ teoremas de PS.

28.4 *Se* A *é uma consequência sintática em PS de um conjunto* Γ *de fórmulas de P, então* A *é uma consequência semântica do conjunto* Γ *de fórmulas de P [i.e., se* $\Gamma \vdash_{PS} A$*, então* $\Gamma \models_P A$*]*

Prova. Suponha que $\Gamma \vdash_{PS} A$. Então, por 23.7, há um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Gamma \vdash_{PS} A$.

(i) Se Δ é vazio, então $\vdash_{PS} A$ e, portanto, por 28.3, $\models_P A$, e, portanto, $\Gamma \models_{PS} A$ (por 20.5).

(ii) Se Δ não for vazio, sejam $A_1, ..., A_n$ ($n \geqslant 1$) os membros de Δ. Então, $A_1, ..., A_n \vdash_{PS} A$. Portanto, pelo Teorema da Dedução, aplicado quantas vezes forem necessárias, $\vdash_{PS} A_1 \supset (A_2 \supset (...(A_n \supset A)))$ [certamente, se $n = 1$, isso será $\vdash_{PS} A_1 \supset A$]. Portanto, por 28.3, $\models_{PS} A_1 \supset (A_2 \supset (...(A_n \supset A)))$. Portanto, pela cláusula 3 da definição de *verdade para uma interpretação de P*, não há um modelo de $\{A_1, ..., A_n\}$, i.e., de Δ, que não é também um modelo de A. Portanto, uma vez que Δ é um subconjunto de Γ, não há um modelo de Γ que não é também um modelo de A; i.e., ou Γ não tem modelo ou todo modelo de Γ é também um modelo de A: i.e., $\Gamma \models_{PS} A$.

Para uma prova do inverso de 28.4 [i.e., uma prova de que *se* $\Gamma \models_{P} A$, *então* $\Gamma \vdash_{PS} A$], veja 32.14 abaixo.

28.5 *Modus Ponens para* $\supset$ *preserva verdade-para-uma-interpretação I* [i.e., se I é um modelo de ambos A e $A \supset B$, então ele é um modelo de B: i.e., Modus Ponens preserva 'modelicidade' (*modelhood*)].

Prova. Suponha que não. Então, para alguma interpretação I, A e $A \supset B$ são ambos verdadeiros, enquanto A não é verdadeiro. Mas isso é impossível. [Ou, poderíamos simplesmente ter apelado para 19.5]

Faremos uso deste meta-teorema posteriormente, especialmente em §35.

29 Conceitos da completude semântica. Importância para a lógica de uma prova da adequação e completude semântica de um sistema formal de lógica proposicional vero-funcional

Completude, em geral

De maneira bem grosseira, um sistema é completo se tudo que você quer como um teorema é um teorema. 'Como no caso da consistência, a noção de *completude* de um sistema lógico tem uma motivação semântica, consistindo grosseiramente na intenção de que o sistema tenha todos os possíveis teoremas fora de conflito com a interpretação. ... Isso leva a várias definições puramente sintáticas de completude...' (Church, 1956, p.109). Deixaremos fora de consideração as noções sintáticas de completude até §33 e nos concentraremos aqui e nas próximas seções nas noções semânticas de completude.

O que os lógicos querem? O Santo Graal da lógica seria um sistema ou um conjunto de sistemas que contêm *todas* as verdades da lógica pura. Isso não foi encontrado por ninguém. Todas as verdades da lógica proposicional, então? Mas isso inclui verdades lógicas não-verofuncionais, e a tarefa de sistematizá-las ainda não foi terminada (dificilmente começou). Então, nós perguntamos: 'O que nós queremos e temos alguma esperança de conseguir?' Aqui, uma resposta é: 'Todas as verdades da lógica proposicional vero-funcional pura'. Nós mostraremos que há um sentido em que PS não capta todas as verdades da lógica proposicional vero-funcional pura, e nós agora tentamos deixar claro que sentido é esse.

Em primeiro lugar, a linguagem P de PS é adequada para a expressão de qualquer função de verdade [21.1]. Isso não significa que P é capaz de expressar qualquer verdade sobre funções de verdade: ela não pode, por exemplo, expressar a verdade de que há enumeráveis funções de verdade distintas. E isso não significa que toda tautologia vero-funcional (sentido intuitivo) pertence a P: pois P tem apenas os dois conectivos $\sim$ e $\supset$, e então a tautologia $\sim(p' \wedge \sim p')$, por exemplo, não pertence a P. Mas o que podemos obter das provas dos meta-teoremas 21.1 e 21.2 é isso: Primeiro, qualquer fórmula vero-funcional F com conectivos arbitrários seria correlacionada a uma única fórmula em fórma normal disjuntiva tendo o mesmo valor verdade. [Para obter unicidade, nós deveríamos adicionar regras, problemáticas de enunciar mas sem oferecerem dificuldades a princípio, sobre a ordem em que várias coisas e passos são tomados.] Segundo, qualquer tal fórmula em FND pode ser correlacionada a uma única fórmula de P tendo o mesmo valor verdade. Nada que dissermos aqui assegura que há uma relação $1--1$ entre F e a fórmula de P: duas ou mais fórmulas distintas, digamos, F e F', podem ambas ser relacionadas com a mesma fórmula de P. Mesmo assim, a qualquer fórmula F estaria correlacionada, de uma maneira que acreditamos que o autor permita ser uma maneira razoavelmente natural, uma única fórmula de P tendo a mesma tabela verdade. Então (afirmamos):

Toda fórmula vero-funcional é (pode ser) representada em uma maneira natural por alguma fórmula de P.

Segundo, nós mostraremos (em §31) que toda tautologia de P é um teorema de PS. Tomado em conjunção com o que nós acabamos de ver, isso nos dá:

Toda tautologia vero-funcional é (pode ser) representada em uma maneira natural por algum teorema de PS.

Esse é um resultado que teria satisfeito os lógicos estóicos, que foram os primeiros a trabalhar sistematicamente na lógica proposicional vero-funcional, e que afirmavam a completude para o seu trabalho.[1]

Consequentemente, definimos a seguinte noção de completude para sistemas formais arbitrários da lógica proposicional vero-funcional:

[1]Por vários motivos, é difícil saber se a afirmação deles é correta ou não: cf. Benson Mates, *Stoic Logic*, pp. 81-2.

Definição. Um sistema formal S com linguagem L é *completo com respeito à classe de todas as tautologias vero-funcionais* sse (1) L é adequado para a expressão de qualquer função de verdade e (2) toda tautologia de L é um teorema de S.

Similarmente para PS:

Definição. PS é *completo com respeito à classe de todas as tautologias vero-funcionais* sse (1) P é adequado para a expressão de qualquer função de verdade e (2) toda tautologia de P é um teorema de PS.

Usualmente, provas de completude na literatura assumem tacitamente resultados conhecidos sobre adequação [para a expressão de qualquer função de verdade] e elas concentram simplesmente em mostrar que toda tautologia expressível na linguagem do sistema é um teorema. Seguiremo-os nisso, e, então, levando em consideração o fato de que para P, o conjunto de tautologias é o mesmo que o conjunto de todas as fórmulas logicamente válidas, construímos a seguinte definição:

Definição. PS é *semanticamente completo* sse toda fórmula logicamente válida de P é um teorema de PS [i.e., sse se $\models_P A$, então $\vdash_{PS} A$].

Comentário sobre a terminologia

Não há um acordo sobre a teminologia, e a frase 'completude semântica' não necessariamente será entendida da mesma maneira por todos que trabalham na área. A maioria dos trabalhadores simplesmente escreve 'completo' e então dão uma breve explicação, ou eles deixam isso para o contexto revelar que sentido de 'completo' eles usam.

Sobre provas da completude semântica de sistemas formais da lógica proposicional vero-funcional

Todas as provas da *consistência* de sistemas formais da lógica vero-funcional são basicamente as mesmas que a de Post. Mas, provas da sua *completude semântica* são mais complicadas e mais variadas. Sem contar provas usando topologia ou álgebra[2], que estão fora do escopo deste livro, há pelo menos sete provas diferentes na literatura: por exemplo, as de Post (1920), Łukasiewicz (por exemplo, 1929), László Kalmár (1935), W. V. Quine (1937), Leon Henkin (1947), Kurt Schütte (1954), e Alan Ross Anderson e Nuel Belnap (1959).

30 Esboço da prova de Post da completude semântica de um sistema formal da lógica proposicional vero-funcional

A primeira prova de completude semântica (a menos que os estóicos as tenham obtido primeiro: veja a última seção) foi dada por Emil Post em 1920 para o sistema proposicional de *Principia Mathematica*. Ela é simples a princípio, mas trabalhosa para executar em detalhes. O próprio Post, em seu artigo de 1921, toma uma página e meia nela. Mas sua apresentação envolve esboços de quatro induções matemáticas e a aceitação de várias tautologias como teoremas. [Post poderia levar em conta as provas desses teoremas do sistema, pois eles estavam todos no *Principia Mathematica*]. Se fôssemos dar provas em PS de todos os teoremas correspondentes e apresentar o mesmo tipo de detalhes que apresentamos em §26, nossa prova seria muito maior. Então, uma vez que forneceremos três provas completas depois, estaremos contentes com um mero esboço da prova de post.

[2] Por exemplo, a de Jerzy Łoś (1951). Veja também as referências em fn. 223, p. 285, de Kleene (1967). Stoll (1963, cap. 6, §§8-9) dá um tratamento algébrico booleano da meta-teoria da lógica proposicional vero-funcional.

Esboço da prova de Post

Para a formulação de Russell-Whitehead do cálculo proposicional (chame-o de 'PM'):

(1) Post dá um método efetivo para encontrar para qualquer fórmula A de PM uma fórmula A_D que está em forma normal disjuntiva [FND] e para a qual $\vdash_{PM} A_D \equiv A$.

(2) Post dá um método efetivo para provar em PM qualquer tautologia em PM que estiver em FND.

Agora, suponha que A é uma tautologia de PM. Se ela já estiver na FND, então, por (2), há uma receita para prová-la em PM. Se ela não estiver, então, por (1), há uma receita para encontrar uam fórmula A_D em FND tal que $\vdash_{PM} A_D \equiv A$, e por (2), há uma receita para provar A_D em PM. Então, nós temos:

$$\vdash_{PM} A_D$$
$$\vdash_{PM} A_D \equiv A$$

Do que obtemos

$$\vdash_{PM} A$$

Mas A era *qualquer* tautologia de PM. Então, nós temos:

Se A é qualquer tautologia de PM, então A é um teorema de PM, i.e., PM é semanticamente completo.

Nota. A prova de Post não apenas nos diz *que* $\vdash_{PM} A$ (quando A é uma tautologia de PM); ela nos dá uma receita para construir uma prova em PM de A.

31 Prova da completude semântica de PS pelo método de Kalmár

Esta prova, para um sistema com conectivos adicionais e alguns axiomas diferentes, foi dada primeira por László Kalmár em 1935.

Para a prova, nós precisamos saber que para fórmulas arbitrárias A, B, C de P, as seguintes fórmulas são teoremas de PS:

Item 1 $A \supset A$

Item 2 $A \supset (B \supset A)$

Item 3 $A \supset (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

Item 4 $\sim A \supset (A \supset B)$

Item 5 $A \supset \sim\sim A$

Item 6 $A \supset (\sim B \supset \sim(A \supset B))$

Item 7 $(A \supset B) \supset ((\sim A \supset B) \supset B)$

Uma prova do tipo da de Kalmár funcionará para qualquer sistema para o qual todas as fórmulas de qualquer um desses sete padrões forem teoremas e MP for a regra de inferência. Mostrar que todas as fórmulas de P de qualquer um desses sete padrões são teoremas é um exercício um tanto doloroso envolvendo nenhuma nova ideia fundamental, e o leitor que quiser apenas as ideias básicas da prova deve pular as próximas páginas e ir diretamente ao enunciado do lema que é o coração da prova, i.e., o meta-teorema 31.14 na página 134.

Já provamos o item 1 no curso da prova do Teorema da

Dedução em §26 (veja o caso 3 da base: p.114).[1] Itens 2 e 3 são apenas os esquemas de axiomas PS 1 e PS 2. Isso deixa os itens $4-7$ a serem provados. Provar primeiro o meta-teorema 31.1 ajudará em provar esses quatro meta-teoremas.

As provas dos itens $4-7$ são provas na metalinguagem de que certas fórmulas são teoremas de PS.

Através do que se segue, A, B e C serão fórmulas arbitrárias de P, e para econonmizar tinta, omitiremos o subscrito PS em $\vdash$.

31.1 $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$

Prova. A cadeia consistindo das fórmulas especificadas acima é uma derivação em PS de C a partir de $\{A \supset B, B \supset C, A\}$:

1	A	[Assunção]
2	$A \supset B$	[Assunção]
3	B	[MP, 1,2]
4	$B \supset C$	[Assunção]
5	C	[MP, 3,4]

Portanto, $A \supset B, B \supset C, A \vdash C$. Portanto, pelo Teorema da Dedução, $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$

Abreviação

'TD' para 'o Teorema da Dedução'

31.2 [item 4] $\vdash A \supset (A \supset B)$

Prova.	1	$\vdash \sim A \supset (\sim B \supset \sim A)$	[PS 1]
	2	$\vdash (\sim B \supset \sim A) \supset (A \supset B)$	[PS 3]
Portanto	3	$\vdash \sim A \supset (A \supset B)$	[31.1, 1,2]

[1] Isso leva a usar a prova *formal* de $p' \supset p'$ dada no exemplo 1, p.95, de §22, para fornecer a base para a prova *na metalinguagem* de que $\vdash_{PS} A \supset A$ para uma fórmula arbitrária A.

Alternativamente, usamos a prova formal de $\sim p' \supset (p' \supset p'')$ dada no exemplo 3 na página 95, §22, para fornecer a base para uma prova na metalinguagem de que $\vdash \sim A \supset (A \supset B)$

31.3 $\vdash \sim\sim A \supset A$

Prova.	1	$\vdash \sim\sim A \supset (\sim A \supset \sim\sim\sim A)$	[31.2 = Item 4]
	2	$\vdash (\sim A \supset \sim\sim\sim A) \supset (\sim\sim A \supset A)$	[PS 3]
Portanto	3	$\vdash \sim\sim A \supset (\sim\sim A \supset A)$	[31.1, 1,2]
	4	$\vdash (\sim\sim A \supset (\sim\sim A \supset A)) \supset$ $((\sim\sim A \supset \sim\sim A) \supset (\sim\sim A \supset A))$	[PS 2]
Portanto	5	$\vdash (\sim\sim A \supset \sim\sim A) \supset (\sim\sim A \supset A)$	[MP, 3,4]
	6	$\vdash (\sim\sim A \supset \sim\sim A)$	[Item 1]
Portanto	7	$\vdash \sim\sim A \supset A$	[MP, 5,6]

31.4 [Item 5] $\vdash A \supset \sim\sim A$

Prova.	1	$\vdash \sim\sim\sim A \supset \sim A$	[31.3]
	2	$\vdash (\sim\sim\sim A \supset \sim A) \supset (A \supset \sim\sim A)$	[PS 3]
Portanto	3	$\vdash A \supset \sim\sim A$	[MP, 1,2]

31.5 $\sim\sim A, A \supset B \vdash \sim\sim B$

Prova. $\sim\sim A \vdash \sim\sim A \supset A$, uma vez que $\vdash \sim\sim A \supset A$. Então, haverá uma derivação começando com $\sim\sim A$ e terminando com $\sim\sim A \supset A$, que representamos assim (passos 1 e 2):

1	$\sim\sim A$	[Assunção]
	. . .	[Espaço a ser preenchido por alguma prova de $\sim\sim A \supset A$, por exemplo como indicado na prova do meta-teorema 31.3]
2	$\sim\sim A \supset A$	[31.3]

Próximo:

3	A	[MP, 1,2]
4	$A \supset B$	[Assumption]
5	B	[MP, 3,4]
	$\ldots$	[Espaço a ser preenchido por alguma] prova de $B \supset \sim\sim B$, por exemplo como indicado na prova de 31.4]
6	$B \supset \sim\sim B$	[31.4]
7	$\sim\sim B$	[MP, 5,6]

Portanto, $\sim\sim A, A \supset B \vdash \sim\sim B$

31.6 $\vdash (A \supset B) \supset (\sim\sim A \supset \sim\sim B)$

Prova. Por 31.5 e duas aplicações do Teorema da Dedução.

31.7 $\vdash (A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$

Prova	1	$\vdash (A \supset B) \supset (\sim\sim A \supset \sim\sim B)$	[31.6]
	2	$\vdash (\sim\sim A \supset \sim\sim B) \supset (\sim B \supset \sim A)$	[PS 3]
Portanto	3	$\vdash (A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$	[31.1, 1,2]

31.8 [Item 6] $\vdash A \supset (\sim B \supset \sim(A \supset B))$

Prova. Por MP, $A, A \supset B \vdash B$. Portanto, por duas aplicações do TD:

	1	$\vdash A \supset ((A \supset B) \supset B)$	
	2	$\vdash ((A \supset B) \supset B) \supset (\sim B \supset \sim(A \supset B))$	[31.7]
Portanto	3	$\vdash A \supset (\sim B \supset \sim(A \supset B))$	[31.1, 1,2]

31.9 $\vdash (\sim A \supset A) \supset (B \supset A)$

Prova.	1	$\vdash \sim A \supset (A \supset \sim B)$	[Item 4=31.2]
	2	$\vdash (\sim A \supset (A \supset \sim B)) \supset ((\sim A \supset A) \supset (\sim A \supset \sim B))$	[PS 2]
Portanto	3	$\vdash (\sim A \supset A) \supset (\sim A \supset \sim B)$	[MP, 1,2]
	4	$\vdash (\sim A \supset B) \supset (B \supset A)$	[PS 3]
Portanto	5	$\vdash (\sim A \supset A) \supset (B \supset A)$	[31.1, 3,4]

31.10 $\vdash (\sim A \supset A) \supset A$

Prova.	1	$\vdash (\sim A \supset A) \supset ((\sim A \supset A) \supset A)$	[31.9]
	2	$\vdash ((\sim A \supset A) \supset ((\sim A \supset A) \supset A)) \supset$ $(((\sim A \supset A) \supset (\sim A \supset A)) \supset$ $((\sim A \supset A) \supset A))$	[PS 2]
Portanto	3	$\vdash ((\sim A \supset A) \supset (\sim A \supset A)) \supset$ $((\sim A \supset A) \supset A)$	[MP, 1,2]
	4	$\vdash (\sim A \supset A) \supset (\sim A \supset A)$	[Item 1]
Portanto	5	$\vdash (\sim A \supset A) \supset A$	[MP, 3,4]

31.11 $\vdash (\sim B \supset \sim A) \supset ((\sim A \supset B) \supset (\sim B \supset B))$

Prova. A sequência especificada abaixo é uma derivação em PS de B a partir de $\{\sim B \supset \sim A, \sim A \supset B, \sim B\}$:

1	$\sim B$	[Assunção]
2	$\sim B \supset \sim A$	[Assunção]
3	$\sim A$	[MP, 1,2]
4	$\sim A \supset B$	[Assunção]
5	B	[MP, 3,4]

Portanto, $\sim B \supset \sim A, \sim A \supset B, \sim B \vdash B$. Portanto, por três aplicações do TD, $\vdash (\sim B \supset \sim A) \supset ((\sim A \supset B) \supset (\sim B \supset B))$.

31.12 $A \supset B, \sim A \supset B \vdash B$

Prova. A cadeia especificada abaixo é uma derivação de B a partir de $\{A \supset B, \sim A \supset B\}$:

1	$A \supset B$	[Assunção]
	$\ldots$	[Espaço a ser preenchido com alguma prova de $(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$, como indicado, por exemplo, na prova de 31.7]
2	$(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$	[31.7]
3	$\sim B \supset \sim A$	[MP, 1,2]
	$\ldots$	[Preencha com a prova de 31.11]
4	$(\sim B \supset \sim A) \supset ((\sim A \supset B) \supset (\sim B \supset B))$	[31.11]
5	$(\sim A \supset B) \supset (\sim B \supset B)$	[MP, 3,4]
6	$\sim A \supset B$	[Assunção]
7	$\sim B \supset B$	[MP, 5,6]
	$\ldots$	[Preencha com a prova de 31.10, com B no lugar de A]
8	$(\sim B \supset B) \supset B$	[31.10]
9	B	[MP, 7,8]

Portanto, $A \supset B, \sim A \supset B \vdash B$.

31.13 [Item 7] $\vdash (A \supset B) \supset ((\sim A \supset B) \supset B)$

Prova. De 31.12 por duas aplicações do Teorema da Dedução.

Isso completa a prova de que qualquer fórmula do padrão de qualquer um dos itens $1 - 7$ é um teorema de PS. Podemos agora continuar enunciando e provando o lema que é o coração da prova de Kalmár. A parte mais difícil de toda a prova é entender exatamente o que o lema afirma.

31.14 *(Lema para o teorema da completude semântica) Seja A qualquer fórmula de P cujos únicos símbolos proposicionais distintos sejam $B_1, ..., B_k$, $(k \geqslant 1)$. Seja I uma interpretação arbitrária de P. I atribui um conjunto de valores verdade aos símbolos proposicionais de A, i.e., a $B_1, ..., B_k$. Nós definimos B_i^I da seguinte maneira:*

Se I atribui V a B_i, B_i^I é o próprio B_i

Se I atirbui F a B_i, B_i^I, é $\sim B_i$

Similarmente, considere A^I sendo A ou $\sim A$, de acordo com A sendo verdadeiro ou falso para I. Então:

$B_i^I, ..., B_k^I \vdash_{PS} A^I$

Explicação. Intuitivamente, o que o lema diz é isso:

Seja A qualquer fórmula de P com k símbolos proposicionais distintos. Escreva a tabela verdade para A da maneira padrão. Então, para *cada linha* da tabela verdade, uma relação de consequência sintática distinta vale em PS. Para *cada linha*, a relação é essa: Se um símbolo proposicional é atribuído a V, então escreva-o à esquerda do sinal $\vdash$; se é atribuído a F, então escreva a sua negação à esquerda do sinal $\vdash$. Se a A é atribuído V, escreva A à direita do sinal $\vdash$. Se a A é atribuído F, escreva $\sim A$ à direita do sinal $\vdash$. *Exemplo.* Seja A $(p' \supset \sim p'') \supset \sim p'''$. Não importa qual de p', p'', p''' nós tomamos para ser B_1, B_2, B_3. Então, seja $B_1 = p'$, $B_2 = p''$, $B_3 = p'''$. Então, $A = (B_1 \supset \sim B_2) \supset \sim B_3$, e sua tabela é:

B_1	B_2	B_3	A
V	V	V	V
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	F
V	V	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
F	F	F	V

Então, o Lema nos diz que *oito* relações de consequência sintática valem no caso de A, a saber, [Linha 1] $p', p'', p''' \vdash_{PS} (p' \supset {\sim}p'') \supset {\sim}p'''$

[Linha 2] ${\sim}p', p'', p''' \vdash_{PS} {\sim}((p' \supset {\sim}p'') \supset {\sim}p''')$

[Linha 3] $p', {\sim}p'', p''' \vdash_{PS} {\sim}((p' \supset {\sim}p'') \supset {\sim}p''')$

[Linha 4] ${\sim}p', {\sim}p'', p''' \vdash_{PS} {\sim}((p' \supset {\sim}p'') \supset {\sim}p''')$

[Linha 5] $p', p'', {\sim}p''' \vdash_{PS} (p' \supset {\sim}p'') \supset {\sim}p'''$

[Linha 6] ${\sim}p', p'', {\sim}p''' \vdash_{PS} (p' \supset {\sim}p'') \supset {\sim}p'''$

[Linha 7] $p', {\sim}p'', {\sim}p''' \vdash_{PS} (p' \supset {\sim}p'') \supset {\sim}p'''$

[Linha 8] ${\sim}p', {\sim}p'', {\sim}p''' \vdash_{PS} (p' \supset {\sim}p'') \supset {\sim}p'''$

É vital ver o seguinte ponto: *Todas as relações de consequência sintática valem simplesmente em virtude das propriedades sintáticas de PS.* Ao *provar* o lema nós nos referimos a interpretações de P, mas toda relação de consequência sintática asserida pelo lema *vale independentemente de qualquer intepretação de P.* Então, por exemplo, as oito consequências sintáticas do exemplo pertencem à teoria da prova pura de PS, e ao enunciá-las, todas as referências a interpretações de P simplesmente somem. A presença, tanto no enunciado do lema e em sua prova, de referências a interpretações de P, tende a obscurecer esse ponto vital.

Prova do lema

A prova é por indução no número, n, de conectivos na fórmula A. [Omitiremos o subscrito em $\vdash$].

Base: $n = 0$

Seja A um único símbolo proposicional não negado, B_1. Então, o lema se reduz a $B_1 \vdash B_1$ ao caso onde I atribui V a B_1 [i.e., à linha da tabela verdade na qual B_1 obtém V] e ${\sim}B_1 \vdash {\sim}B_1$ para o caso onde I atribui F a B_1. Ambos valem para 23.1.

Isso completa a base.

Passo indutivo

Assuma que o lema vale para todas as fórmulas com menos de m conectivos [essa é a hipótese indutiva]. Para provar que isso vale para qualquer fórmula arbitrária A com m conectivos.

Há dois casos a serem considerados:

1. Para alguma fórmula C, A é $\sim C$, onde C tem menos de m conectivos.
2. Para algumas fórmulas C e D, A é $C \supset D$, onde cada um de C e D tem menos de m conectivos.

Caso 1: A é $\sim C$, onde C tem menos que m conectivos

2 subcasos:

1a. A é verdadeiro para I

2a. A é falso para I

Subcaso 1a: A é verdadeiro para I (então, A^I é A)

Então, C é falso para I (então, C^I é $\sim C$).

Então, C tem menos que m conectivos, nós temos, por hipótese indutiva

$$\begin{array}{lll} & B_1^I, ..., B_k^I \vdash C^I & \\ \text{i.e.} & B_1^I, ..., B_k^I \vdash \sim C & (\text{pois } C^I \text{ aqui é } \sim C) \\ \text{i.e.} & B_1^I, ..., B_k^I \vdash A^I & (\text{pois } A^I \text{ aqui é } = A = \sim C) \end{array}$$

Que é o que queremos.

Subcaso 1b: A é falso para I (então A^I é $\sim A$)

Então C é verdadeiro para I (então C^I é C).

Pela hipótese indutiva

$$B_1^I, ..., B_k^I \vdash C^I$$

i.e. $\quad B_1^I, ..., B_k^I \vdash \sim C \quad \ldots\ldots\ 1$

Mas, por 31.4 $\quad \vdash C \supset \sim\sim C \quad \ldots\ldots\ 2$

Portanto, por 1 e 2 e MP,

$$B_1^I, ..., B_k^I \vdash \sim\sim C$$

i.e. $\quad B_1^I, ..., B_k^I \vdash \sim A$

i.e. $\quad B_1^I, ..., B_k^I \vdash A^I$

Que é o que queremos.

Caso 2: A é $C \supset D$, onde cada um de C e D tem menos de m conectivos:

2a. C é falso para I

2b. D é verdadeiro para I

3c. C é verdadeiro para I e D é falso para I

Subcaso 2a: C é falso para I

Então, A é verdadeiro para I e $A^I = A = C \supset D$.

Pela hipótese indutiva,

$$B_1^I, ..., B_k^I \vdash C^I$$

i.e. $\quad B_1^I, ..., B_k^I \vdash \sim C^I$

Mas, por 31.2, $\vdash \sim C \supset (C \supset D)$. Então, por MP

$$B_1^I, ..., B_k^I \vdash C \supset D$$

i.e. $\quad B_1^I, B_k^I \vdash A^I$, que é o que queremos.

Subcaso 2b: D é verdadeiro para I.

Então, A é verdadeiro para I e $A^I = A = C \supset D$. Pela hipótese indutiva,

$$B_1^I, ..., B_k^I \vdash D$$

Mas, $\vdash D \supset (C \supset D)$ [PS 1]. Então, por MP,

$$B_1^I, ..., B_k^I \vdash C \supset D$$
i.e. $\quad B_1^I, ..., B_k^I \vdash A^I$, que é o que queremos.

Subcaso 2c: C é verdadeiro para I e D é falso para I.

Então, A é falso para I e $A^I = {\sim}A = {\sim}(C \supset D)$. Pela hipótese indutiva,

$$B_1^I, ..., B_k^I \vdash C \text{ e também } B_1^I, ..., B_k^I \vdash {\sim}D$$

Mas $\vdash C \supset ({\sim}D \supset {\sim}(C \supset D))$ [31.8]. Então, por duas aplicações de MP,

$$B_1^I, ..., B_k^I \vdash {\sim}(C \supset D)\text{: i.e., } B_1^I, ..., B_k^I \vdash A^I.$$

Isso completa o passo indutivo e com a prova do lema.

31.15 *(O teorema da completude semântica de PS) Cada fórmula logicamente válida de P é um teorema de PS [ou: Se* $\models_P A$*, então* $\vdash_{PS} A$*]*

Prova. Seja A uma fórmula lógica arbitrária de P com símbolos proposicionais distintos $B_1, ..., B_k$ $(k \geqslant 1)$.

Sejam I e J interpretações de P que diferem apenas no fato de I atribuir V a B_k, enquanto J atribui F a B_k. Então, pelo lema

(1) $B_1^I, ..., B_1^I \vdash A^I$

e

(2) $B_1^J, ..., B_1^J \vdash A^J$.

Agora, temos de nossas definições de I, J, etc.,

(3) $B_1^J = B_1^I, ..., B_{k-1}^J = B_{k-1}^I$

e

(4) $B_k^I = B_k$

e

(5) $B_k^J = \sim B_k$.

Também, uma vez que A é logicamente válido, ele é verdadeiro para I e para J. Então,

(6) $A^I = A^J = A$

De (1) e (4) e (6) nós obtemos

(7) $B_1^I, ..., B_{k-1}^I, B_k \vdash A$.

De (2) e (3) e (5) e (6) nós obtemos

(8) $B_1^I, ..., B_{k-1}^I, \sim B_k \vdash A$.

Ao aplicar o Teorema da Dedução a (7) e (8), nós obtemos

(9) $B_1^I, ..., B_{k-1}^I \vdash B_k \vdash A$

e

(10) $B_1^I, ..., B_{k-1}^I \vdash \sim B_k \supset A$.

Mas nós temos

(11) $\vdash (B_k \supset A) \supset ((\sim B_k \supset A) \supset A)$ [31.13 - Item 7]

Então, por duas aplicações de MP, nós obtemos

(12) $B_1^I, ..., B_{k-1}^I \vdash A$.

Agora nós eliminamos B_k do argumento. Se $k = 1$, temos imediatamente $\vdash_{PS} A$. Se $k > 1$, então seja L uma interpretação que difere de I apenas no valor verdade que é atribuído a B_{k-1} (i.e., se I atribui V a B_{k-1}, então L atribui F a B_{k-1}; e se I atribui F a B_{k-1}, então L atribui V a B_{k-1}). Ao repetir o conjunto de movimentos feitos acima, com mudanças óbvias, podemos eliminar B_{k-1} do argumento assim como eliminamos B_k. E assim por diante, até termos eliminado tudo à esquerda do sinal '$\vdash$' e restar simplesmente

$$\vdash_{PS} A$$

Mas, A era uma fórmula logicamente válida arbitrária de P. Então, se $\models_P A$, então $\vdash_{PS} A$.

Q.E.D.

Uma análise dessa prova da completude mostra que *qualquer* sistema formal com a linguagem P que tem modus ponens como regra de inferência e satisfaz as seguintes sete condições [Itens $1 - 7$] será semanticamente completo: Para fórmulas arbitrárias A, B, C:

1. $\vdash A \supset A$
2. $\vdash A \supset (B \supset A)$
3. $\vdash (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
4. $\vdash \sim A \supset (A \supset B)$
5. $\vdash A \supset \sim\sim A$
6. $\vdash A \supset (\sim B \supset \sim(A \supset B))$
7. $\vdash (A \supset B) \supset ((\sim A \supset B) \supset B)$

32 Prova da completude semântica de PS pelo método de Henkin

Nesta seção, provaremos a completude de semântica de PS por um método diferente. Faremos isso por vários motivos: (1) O método é essencialmente o mesmo que, mas mais simples que, o método usado na prova da completude semântica do sistema de lógica de predicados na parte 3, e familiaridade com ela tornará o padrão geral da prova bem mais complicada posterior mais fácil de ser entendido. (2)

A prova faz uso da nova noção, aquela de sistema maximal p-consistente, que é de utilidade geral. (3) No decorrer da prova, estabelecemos dois meta-teoremas muito úteis, um dos quais é o lema de Lindenbaum para PS, e o outro é o teorema de que todo sistema p-consistente de PS tem um modelo [32.13]. O segundo nos permite uma amarração completa entre a teoria da prova de PS e a teoria dos modelos de P, e nos permite provar entre outras coisas um teorema da completude 'forte' para PS. (4) Finalmente, uma vez que algumas partes da prova têm paralelos exatos na prova posterior da completude semântica do nosso sistema de lógica de predicados, podemos encurtar os enunciados da prova posterior ao citar as partes apropriadas dessa, sem entrar em todos os detalhes novamente.

A prova, para um sistema de lógica de predicados, foi primeiramente dado por Leon Henkin, em 1947 [Henking, 1947]. As subseções (a), (b), (c) e (d) estabelecem as preliminares essenciais para a parte principal da prova, que é apresentada na subseção (e).

(a) *Prova que certas fórmulas são teoremas de PS*

Na prova, usamos o fato de que para quaisquer fórmulas arbitrárias A, B, C de P, os seguintes são teoremas de PS:

1. $A \supset A$
2. $A \supset (B \supset A)$
3. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
4. $\sim A \supset (A \supset B)$
5. $A \supset (\sim B \supset \sim(A \supset B))$
6. $(A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$
7. $(\sim A \supset B) \supset ((\sim A \supset \sim B) \supset \sim A)$

Os primeiros cinco já foram provados [como itens 1, 2, 3, 4, 5 e 6 em §31]. Nós agora mostraremos que 6 e 7 também valem [meta-teoremas 32.4 e 32.5 abaixo]. Nós começamos enunciando um meta-teorema que pode ser visto como verdadeiro em virtude da definição de $\vdash_{PS}$ (de fato, ele vale para sistemas formais arbitrários).

32.1 *Se* $A, B \vdash_{PS} C$ *e* $A, C \vdash_{PS} D$*, então* $A, B \vdash_{PS} D$ [O subscrito para $\vdash$ será omitido no que se segue]

32.2 $\vdash (A \supset {\sim}B) \supset (B \supset {\sim}A)$

Prova.	1	${\sim}{\sim}A \supset A, A \supset {\sim}B \vdash {\sim}{\sim}A \supset {\sim}B$	[31.1]
	2	$\vdash ({\sim}{\sim}A \supset {\sim}B) \supset (B \supset {\sim}A)$	[PS 3]
Portanto	3	${\sim}{\sim}A \supset A, A \supset {\sim}B \vdash B \supset {\sim}A$	[MP, 1,2]
Portanto	4	$\vdash ({\sim}{\sim}A \supset A) \supset$ $((A \supset {\sim}B) \supset (B \supset {\sim}A))$	[3, TD duas vezes]
	5	$\vdash {\sim}{\sim}A \supset A$	[31.3]
Portanto	6	$\vdash (A \supset {\sim}B) \supset (B \supset {\sim}A)$	[MP, 5,4]

32.3 $\vdash (A \supset {\sim}A) \supset {\sim}A$

Prova.	1	$\vdash (A \supset {\sim}A) \supset ({\sim}{\sim}A \supset {\sim}A)$	[31.7]
	2	$\vdash ({\sim}{\sim}A \supset {\sim}A) \supset {\sim}A$	[31.10]
	3	$(A \supset {\sim}A) \supset ({\sim}{\sim}A \supset {\sim}A),$ $({\sim}{\sim}A \supset {\sim}A) \supset {\sim}A \vdash$ $(A \supset {\sim}A) \vdash {\sim}A$	[31.1]
Portanto	4	$\vdash ((A \supset {\sim}A) \supset ({\sim}{\sim}A \supset {\sim}A)) \supset$ $((({\sim}{\sim}A \supset {\sim}A) \supset {\sim}A) \supset$ $((A \supset {\sim}A) \supset {\sim}A))$	[3, TD duas vezes]
Portanto	5	$\vdash (({\sim}{\sim}A \supset {\sim}A) \supset {\sim}A) \supset$ $((A \supset {\sim}A) \supset {\sim}A)$	[MP, 1,4]
Portanto	6	$\vdash (A \supset {\sim}A) \supset {\sim}A$	[MP, 2,5]

32.4 $\vdash (A \supset B) \supset ((A \supset {\sim}B) \supset {\sim}A)$

Prova.	1	$A \supset B, B \supset {\sim}A \vdash A \supset {\sim}A$	[31.1]
	2	$\vdash (A \supset {\sim}A) \supset {\sim}A$	[32.3]
Portanto	3	$A \supset B, B \supset {\sim}A \vdash {\sim}A$	[MP, 1,2]
	4	$A \supset B, A \supset {\sim}B \vdash A \supset {\sim}B$	[Propriedade geral de $\vdash$: cf. 23.1 e 23.2]
	5	$\vdash (A \supset {\sim}B) \supset (B \supset {\sim}A)$	[32.2]
Portanto	6	$A \supset B, A \supset {\sim}B \vdash B \supset {\sim}A$	[MP, 4,5]
Portanto	7	$A \supset B, A \supset {\sim}B \vdash {\sim}A$	[32.1, 6, 3]
Portanto	8	$\vdash (A \supset B) \supset ((A \supset {\sim}B) \supset {\sim}A)$	[7, TD duas vezes]

32.5 $\vdash ({\sim}A \supset B) \supset (({\sim}A \supset {\sim}B) \supset A)$

Prova.	1	${\sim}A \supset B, {\sim}A \supset {\sim}B \vdash {\sim}{\sim}A$	[Passo 7 da prova de 32.4, com ${\sim}A$ para A]
	2	$\vdash {\sim}{\sim}A \supset A$	[31.3]
Portanto	3	${\sim}A \supset B, {\sim}A \supset {\sim}B \vdash A$	[MP, 1,2]
Portanto	4	$\vdash ({\sim}A \supset B) \supset (({\sim}A \supset {\sim}B) \supset A)$	[3, TD duas vezes]

(b) *Conjuntos p-consistentes, conjuntos maximais p-consistentes, e alguns teoremas sobre eles*

Lembramos o leitor de que um conjunto Γ de fórmulas de P é um conjunto p-consistente de PS sse para nenhuma fórmula A de P é o caso que ambos $\Gamma \vdash_{PS} A$ e $\Gamma \vdash_{PS} {\sim}A$.

32.6 *Se um conjunto de fórmulas de P tem um modelo, então ele é um conjunto p-consistente de PS*

Prova. Seja Γ um conjunto qualquer de fórmulas de P. Suponha que Γ tem um modelo mas não é um conjunto p-consistente de PS. Então, para alguma fórmula A de P, $\Gamma \vdash_{PS} A$ e $\Gamma \vdash_{PS} \sim A$. Então, por 28.4 [Se $\Gamma \vdash_{PS} A$, então $\Gamma \models_P A$], $\Gamma \models_{PA}$ e $\Gamma \models_P \sim A$; i.e., todo modelo de Γ é um modelo de A e todo modelo de Γ é um modelo de $\sim A$. Mas Γ tem um modelo, por hipótese. Então, nesse modelo, A é verdadeiro e $\sim A$ é verdadeiro. Mas isso é impossível. Portanto, se Γ tem um modelo, ele é um conjunto p-consistente de PS.

O inverso de 32.6 importante e bonito, mas muito mais difícil de se provar. Ele é o lema crucial para qualquer prova de completude como a de Henkin, e nos leva até 32.13 para prová-lo.

32.7 $\Gamma \cup \{\sim A\}$ *é um conjunto p-inconsistente de PS sse* $\Gamma \vdash_{PS} A$

Prova

(a) Suponha que $\Gamma \vdash_{PS} A$. Então, $\Gamma, \sim A \vdash_{PS} A$ [23.2]. Mas $\Gamma, \sim A \vdash_{PS} \sim A$ [23.1, 23.2]. Então, $\Gamma \cup \{\sim A\}$ é um conjunto p-inconsistente de PS.

(b) Suponha que $\Gamma \cup \{\sim A\}$ é um conjunto p-inconsistente de PS. Então, $\Gamma, \sim A \vdash_{PS} B$ e $\Gamma, \sim A \vdash_{PS} \sim B$ para alguma fórmula B. Portanto, pelo teorema da dedução, $\Gamma \vdash_{PS} \sim A \supset B$ e $\Gamma \vdash_{PS} \sim A \supset \sim B$. Mas $\vdash_{PS} (\sim A \supset B) \supset ((\sim A \supset \sim B) \supset A)$ [32.5]. Então, por Modus Ponens duas vezes, $\Gamma \vdash_{PS} A$.

32.8 $\Gamma \cup \{A\}$ *é um conjunto p-inconsistente de PS sse* $\Gamma \vdash_{PS} \sim A$

Prova. Como para 32.7, mas usando 32.4 [$\vdash_{PS} (A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$] em ($b$).

Definição. Γ *é um conjunto maximal p-consistente de*

PS sse Γ é um conjunto p-consistente de PS e se A é qualquer fórmula arbitrária de P, então A é um membro de Γ ou $\Gamma, A \vdash_{PS} B$ e $\Gamma, A \vdash_{PS} {\sim}B$, para alguma fórmula B de P.

Informalmente, um conjunto maximal p-consistente de PS é um conjunto p-consistente de PS ao qual nenhuma fórmula pode ser adicionada sem p-inconsistência: ele tem todas as fórmulas que pode ter.

32.9 *Para qualquer sistema maximal p-consistente* Γ *de PS e qualquer fórmula A de P, exatamente um de A e* ${\sim}A$ *está em* Γ

Prova. Obviamente, não podem ambas estar em Γ, uma vez que Γ é um conjunto p-consistente de PS. Suponha que nenhuma delas está. Então, nenhuma delas pode ser adicionada a Γ sem p-inconsistência; i.e., ambos $\Gamma \cup \{A\}$ e $\Gamma \cup \{{\sim}A\}$ são conjuntos p-inconsistentes de PS. Portanto, por 32.8, $\Gamma \vdash_{PS} {\sim}A$, e, por 32.7, $\Gamma \vdash_{PS} A$; i.e., Γ é um conjunto p-inconsistente de PS. Mas Γ era um conjunto p-consistente *ex hypothesi.* Então, exatamente um de A e ${\sim}A$ está em Γ.

32.10 *Para qualquer sistema maximal p-consistente* Γ *de PS e qualquer fórmula A de P, se* $\Gamma \vdash_{PS} A$*, então A é um membro de* Γ

Prova. Suponha $\Gamma \vdash_{PS} A$, mas que A não é um membro de Γ. Então, por 32.9, ${\sim}A$ é um membro de Γ. Portanto, $\Gamma \vdash_{PS} {\sim}A$. Portanto, Γ é um conjunto p-inconsistente de PS. Mas Γ era um conjunto p-consistente *ex hypothesi.* Então, se $\Gamma \vdash_{PS} A$, então A é um membro de Γ.

(*c*) *Teorema da Enumeração para P*

32.11 *(Teorema da Enumeração) As fórmulas de P são efetivamente enumeráveis*

Prova.	Atribua	ao	símbolo	p	o	númeral	10
	,,	,,	,,	'	,,	,,	100
	,,	,,	,,	$\sim$	,,	,,	1000
	,,	,,	,,	$\supset$	,,	,,	10000
	,,	,,	,,	(	,,	,,	100000
	,,	,,	,,	)	,,	,,	1000000

[Não importa, do ponto de vista teórico, se esses numeros estão em binário ou decimal, dado que continuemos com o mesmo sistema durante a prova].

Seja o número de uma *fórmula* o número denotal pelo numeral obtido pela justaposição, da esquerda para a direita, dos numerais dos símbolos na fórmula, como no exemplo a seguir.

Exemplo. O número da fórmula $\sim(p' \supset p'')$ é o número denotado pelo numeral

$$1000100000101001000010100100 1000000$$

Cada fórmula distinta de P terá, então, um inteiro positivo distinto associado a ela, e nós ordenamos as fórmulas na ordem de seus números associados. Isso nos dá uma enumeração das fórmulas.

Nós mostramos então que essa enumeração é *efetiva:*

Há um método efetivo para encontrar, para qualquer número inteiro positivo n, a n-ésima fórmula na enumeração

Prova. O menor número atribuído a uma fórmula de P é o número 10100, que é atribuído à fórmula p'. Escreva p' como a primeira fórmula na enumeração. Então, tome os números a partir de 10100 em sucessão, checando cada um para ver se ele é o número de uma fórmula [a definição de fórmula em §17 pode ser transformada em um método efetivo para discriminar fórmulas de não-fórmulas]. Se ele for, escreva essa fórmula em sua lista, mantendo o controle sobre quantas fórmulas você já escreveu. Se ele não for, vá para o próximo número. A n-ésima fórmula que você escrever é a que você quer.

Além disso: Dada qualquer fórmula, há um método efetivo para encontrar para qual número n ela é a n-ésima fórmula na enumeração. (*Prova.* Encontre o número da fórmula. Passe por todos os números de 10100 até esse número, listando quaisquer fórmulas das quais eles são números, como na prova acima. O número de fórmulas na lista até, e incluindo, a dada fórmula é o número que você quer.)

(d) *Lema de Lindenbaum para PS*

32.12 *(Lema de Lindenbaum para PS) Qualquer conjunto p-consistente de PS é um subconjunto de algum conjunto maximal p-consistente de PS*

['algum': i.e., algum ou outro]

Nota histórica. O teorema correspondente para um sistema de lógica de predicados foi primeiro provado por Adolf Lindenbaum, um matemático e lógico polonês que foi morto pelos nazistas no verão de 1941 [cf. Tarski, 1923-38, p.98, Teorema 56]

Prova. Seja Γ qualquer sistema p-consistente de PS. Nós definimos uma sequência infinita de conjuntos $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, ... \rangle$ como se segue:

Considere Γ_0 sendo Γ. Seja A_{n+1} a $(n+1)$-ésima fórmula em nossa enumeração [32.11]. Considere Γ_{n+1} como $\Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$ se esse for um conjunto p-consistente de PS; de outro modo, considere Γ_{n+1} ser Γ_n.

[Informalmente: Se a primeira fórmula em nossa enumeração puder ser consistentemente adicionada a Γ, então adicione-a a Γ para torná-lo Γ_1; se ela não puder, então seja

Γ_1 o próprio Γ. Se a segunda fórmula em nossa enumeração puder ser consistentemente adicionada a Γ_1, então adicione-a a Γ_1 para torná-lo Γ_2; se ela não puder, então seja Γ_2 o próprio Γ_1. E assim por diante.]

Nós agora provamos que o conjunto que é a união de todos os conjuntos $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, ...$ [i.e., o conjunto $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup ...$] é um conjunto maximal p-consistente de PS. Nós provamos primeiro que Γ' é um conjunto p-consistente de PS; então, que ele é um conjunto maximal p-consistente de PS.

(i) Γ' *é um conjunto p-consistente de PS*

Prova

(a) Cada um dos Γ_i é p-consistente; pois Γ_0 é p-consistente (*ex hypothesi*) e, da maneira que construímos os Γ_i, se Γ_n é p-consistente, então Γ_{n+1} também o é.

(b) Agora, suponha que Γ' é p-inconsistente. Então, para alguma fórmula A há uma derivação de A a partir de Γ' e também uma derivação de $\sim A$ a partir de Γ'. Cada uma dessas duas derivações consiste em um número finito de fórmulas. Seja A_n a fórmula com maior número em nossa enumeração [32.11] que ocorre em qualquer uma das derivações, e considere-a como a n-ésima fórmula na enumeração. Então, $\Gamma \vdash_{PS} A$ e $\Gamma \vdash_{PS} \sim A$; i.e., Γ_n é p-inconsistente. Mas isso contradiz (a). Então, Γ' deve ser p-consistente.

Comentário. Este simples fato, de que toda prova e toda derivação no sistema formal com o qual estamos lidando deve consistir de apenas um número *finito* de fórmulas, talvez fique atrás apenas da indução matemática em relação a sua utilidade para a meta-teoria [nós já usamos isso na prova de 28.4].

(ii) Γ' *é um sistema maximal p-consistente de PS*

Prova. Seja A_n qualquer fórmula de P, com n sendo o número de seu lugar em nossa enumeração. Suponha que A_n não é um membro de Γ'. Então, $\Gamma_{n-1} \cup \{A_n\}$ deve ser um conjunto p-inconsistente, uma vez que do contrário, A_n deveria ser adicionado a Γ_{n-1} para fazer Γ_n. Então, $\Gamma_{n-1}, A_n \vdash_{PS} B$ e $\Gamma_{n-1}, A_n \vdash_{PS} {\sim}B$ para alguma fórmula B. Portanto, $\Gamma', A_n \vdash_{PS} B$ e $\Gamma', A_n \vdash_{PS} {\sim}B$. Portanto, ou A_n está em Γ', ou ambos $\Gamma', A_n \vdash_{PS} B$ e $\Gamma', A_n \vdash_{PS} {\sim}B$ para alguma fórmula B. Isto é, Γ' é um conjunto maximal p-consistente de PS.

Isso completa a prova do lema de Lindenbaum, e com ela as preliminares para a parte principal da prova.

(*e*) *Todo conjunto p-consistente de PS tem um modelo*

Prova. Seja Γ qualquer conjunto p-consistente de PS. Pelo lema de Lindenbaum, há algum conjunto maximal p-consistente, Γ', que tem Γ como subconjunto. Se Γ' tem um modelo, então Γ também tem, uma vez que toda fórmula de Γ também está em Γ'. Mostraremos que Γ' tem um modelo. Dois estágios: (1) Nós damos uma interpretação I para P. (2) Nós mostramos que, para qualquer fórmula arbitrária A, se A está em Γ', então A é verdadeira para a interpretação I. [Na verdade, nós provamos algo mais forte: nós provamos que A é verdadeiro para I *sse* A está em Γ'. Nós provamos esta proposição mais forte não apenas pela diversão de fazê-la, mas porque nós precisamos de um 'sse' na hipótese indutiva na prova da proposição mais fraca.]

Estágio 1: Interpretação para P

Nossa interpretação I atribui V a todo símbolo proposicional em [i.e., é um membro de] $\models'_P$, e F a qualquer outro símbolo proposicional. Os conectivos têm seus significados padrão.

Estágio 2: A é verdadeiro para I sse A está em Γ'

Prova. A prova é por indução no número, n, de conectivos em A.

Base: $n = 0$

Então, A é um símbolo proposicional, e então, pela nossa atribuição, A é verdadeiro para O sse A está em Γ'.

Passo indutivo.

Assuma que o teorema [a saber, A é verdadeiro para I sse A está em Γ'] vale para toda fórmula com menos de m conectivos [hipótese indutiva]. Para provar que ele vale para toda fórmula com m conectivos.

2 casos:

1. A é $\sim B$, onde B tem menos de m conectivos.
2. A é $B \supset C$, onde cada um de B e C tem menos de m conectivos.

Em cada caso, queremos provar [1º ramo] que se A é verdadeiro para I, então A está em Γ', e [2º ramo] se A está em Γ', então A é verdadeiro para I.

Caso 1: A é $\sim B$

1º ramo: Assuma que A é verdadeiro I. Então, B é falso para I. Então, pela hipótese indutiva, B não está em Γ'. Portanto, por 32.9, $\sim B$ está em Γ'; i.e., A está em Γ'.

2º ramo: Assuma que A está em Γ'. Então, B não está em Γ'. Portanto, pela hipótese indutiva, B não é verdadeiro para I. Portanto, A é verdadeiro para I.

Caso 2: A é $B \supset C$

1º ramo: Assuma que A é verdadeiro para I. Então, ou B não é verdadeiro para I ou C é verdadeiro para I. Portanto, ou B não está em Γ' ou C está em Γ'.

(i) Suponha que B não está em Γ'. Então, $\sim B$ está em Γ'. Então, $\Gamma' \vdash_{PS} \sim B$. Então, por 31.2 [$\vdash_{PS} \sim B \supset (B \supset C)$] e MP, $\Gamma' \vdash_{PS} B \supset C$. Então, por 32.10, $B \supset C$ está em Γ'; i.e., A está em Γ'.

(ii) Suponha, alternativamente, que C está em Γ'. Então, $\Gamma' \vdash_{PS} C$. Então, por PS 1 [$\vdash_{PS} C \supset (B \supset C)$] e MP, $\Gamma' \vdash_{PS} B \supset C$ e então $B \supset C$ está em Γ'; i.e., A está em Γ'.

2º ramo Assuma que A não é verdadeiro para I. Então, B é verdadeiro para I e C é falso para I. Consequentemente, B está em Γ' e C não está em Γ'. Então, $\sim C$ está em Γ'. Então, $\Gamma' \vdash_{PS} B$ e $\Gamma' \vdash_{PS} \sim C$. Consequentemente, por 31.8 [$\vdash_{PS} B \supset (\sim C \supset \sim(B \supset C))$] e MP duas vezes, $\Gamma' \supset \sim(B \supset C)$. Então, $\sim(B \supset C)$ está em Γ'; i.e., $\sim A$ está em Γ'. Então, A não está em Γ'. Então: Se A está em Γ', então A é verdadeiro para I.

Isso completa o passo indutivo e a prova de 32.13.

32.14 *(O teorema da completude 'forte' para PS) Se $\Gamma \models_P A$, então $\Gamma \vdash_{PS} A$*

Prova. Suponha que $\Gamma \models_P A$. Então, $\Gamma \cup \{\sim A\}$ não tem modelo. Portanto, por 32.13, $\Gamma \cup \{\sim A\}$ não é um conjunto p-consistente de PS, e obviamente, portanto, é um conjunto p-inconsistente de PS. Então, por 32.7, $\Gamma \vdash_{PS} A$.

32.15 *(O teorema da completude semântica para PS) Se $\models_P A$, então $\vdash_{PS} A$*

Prova. Em 32.14 tome o conjunto vazio para Γ.

32.13 e 32.14 (o teorema da completude forte) não saem da prova de completude do tipo de Kalmár.

O poder de 32.13 é revelado posteriormente nos metateoremas 32.16 – 32.21, todos provados com sua ajuda.

32.16 *Um conjunto de fórmulas de P é um conjunto p-consistente de PS sse ele tem um modelo*

Prova. Diretamente de 32.13 e 32.6.

32.17 $\Gamma \models_P A$ sse $\Gamma \vdash_{PS} A$

Prova. Diretamente de 32.14 e 28.4 [se $\Gamma \vdash_{PS} A$, então $\Gamma \models_{PS} A$]. Esse último significa que podemos intercambiar livremente entre $\models_P$ e $\vdash_P$ em qualquer resultado que obtivermos. então:

32.18 *(O teorema da finitud epara P) $\Gamma \models_P A$ sse há um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \models_P A$*

Prova. De 23.7 [O análogo para $\vdash_{PS}$ de 32.18] e 32.17. Este é um resultado bem surpreendente, considerando que Γ pode ser um conjunto infinito. Ele é óbvio em uma direção [a saber, se Δ é um subconjunto finito de Γ, então, se $\Delta \models_P A$, então $\Gamma \models_P A$]. É a outra direção [se $\Gamma \models_P A$, então há um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \models_P A$] que é inesperada.

32.19 *Se todo subconjunto finito* Γ *de fórmulas de* P *é um conjunto p-consistente de PS, então* Γ *é um conjunto p-consistente de PS*

Prova. Suponha que o antecedente é verdadeiro mas que Γ não é um conjunto p-consistente de PS (e, então, é p-inconsistente). Então, para alguma fórmula A, $\Gamma \vdash_{PS} A$ e $\Gamma \vdash_{PS} \sim A$. Então, há alguma derivação em PS de A a partir de Γ e alguma derivação em PS de $\sim A$ a partir de Γ. Pela nossa definição de *derivação em PS*, cada uma dessas derivações consiste apenas de fórmulas finitas, e, então, apenas finitas fórmulas de Γ que ocorrem nelas. Então, há um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash_{PS} A$ e $\Delta \vdash_{PS} \sim A$. Mas isso contradiz nossa hipótese de que o antecedente era verdadeiro.

De 32.19 e 32.16 se segue o resultado conhecido como o Teorema da Compacidade:

32.20 *(O Teorema da Compacidade para P) Se todo subconjunto finito de um conjunto* Γ *de fórmulas de* P *tem um modelo, então* Γ *tem um modelo*

Prova. 32.16 e 32.19.

Uma vez que o inverso de 32.20 é obviamente verdadeiro, poderíamos escrever 32.20 com um ‘sse”em vez de um ‘se’.

32.17 aplicado a 20.6 gera a versão sintática do Teorema da Interpolação:

32.21 *(O Teorema da Interpolação para PS) Se* $\vdash_{PS} A \supset B$ *e* A *e* B *têm pelo menos um símbolo proposicional em comum, então há uma fórmula* C *de* P *tal que todos os seus símbolos proposicionais ocorrem em ambos* A *e* B*, de maneira que* $\vdash_{PS} A \supset C$ *e* $\vdash_{PS} C \supset B$

Prova. De 20.6 e 32.17.

Em suma, o que temos é uma correspondência exata entre a teoria da prova de PS e a teoria dos modelos de P. O teorema chave para provar essa correspondência é 32.13: *Todo conjunto p-consistente de PS tem um modelo.*

O Teorema da Compacidade, 32.20, é um resultado interessante, e em sua versão para a lógica de predicados ele provavelmente tem ainda mais aplicações que o teorema da completude correspondente; por exemplo, nós o usamos em §48 para provar a existência de um modelo não padrão. O teorema padrão em 32.20 não faz referência a qualquer aparato dedutivo, e ao teorema pode ser dada uma prova puramente modelo-teórica. O mesmo é verdadeiro para a versão para a lógica de predicados como originalmente formulada por Gödel (1930, Teorema X); nossa própria formulação em 45.20 é menos pura em relação a isso. Por interesse, nós damos uma prova puramente modelo-teórica da versão proposicional.

Prova modelo-teórica do Teorema da Compacidade para P (32.20)

Nós definimos uma *interpretação parcial* de P como sendo uma atribuição de valores de verdade a no máximo um subconjunto próprio dos símbolos proposicionais de P. Dizemos que uma interpretação ou interpretação parcial X' de P é uma *extensão* de P sse cada atribuição de um valor verdade a um símbolo proposicional que X faz também é feita por X'. Dizemos que uma interpretação parcial X *falsifica* um conjunto Δ de fórmulas de P sse não há uma extensão de X que é um modelo de Δ. Nós escrevemos p_1 para p', p_2 para p'', etc.

Agora, suponha que todo subconjunto finito de um conjunto Γ de fórmulas de P tem um modelo. Nós definimos uma sequência de interpretações parciais, $X_0, X_1, X_2, \ldots$, como se segue:

X_0 é uma atribuição de valores de verdade simplesmente ao conjunto vazio, i.e., ela não atribui qualquer valor verdade a qualquer símbolo proposicional de P.

X_{i+1} é X_i mais a atribuição de V a p_{i+1} se a interpretação parcial resultante não falsificar qualquer subconjunto finito de Γ; do contrário, X_{i+1} é X_i mais a atribuição de F a p_{i+1}.

Nós mostramos por indução que nenhum dos X_i falsifica qualquer subconjunto finito de Γ. Base: X_0 não falsifica qualquer subconjunto finito de Γ. Hipótese indutiva: X_i não falsifica qualquer subconjunto finito de Γ. Para provar que X_{i+1} também não falsifica qualquer um. Suponha que X_{i+1} falsifica algum subconjunto finito Δ de Γ. Então, por construção, X_{i+1} deve ser X_i mais a atribuição de F a p_{i+1}, e além disso, X_i mais a atribuição de V a p_{i+1} deve falsificar algum subconjunto finito, digamos, Σ, de Γ. Então nós temos:

Nenhuma extensão de X_i junta com a atribuição de F a p_{i+1} é um modelo de Δ, ou, consequentemente, de $\Delta \cup \Sigma$.

Nenhuma extensão de X_i junta com uma atribuição de V a p_{i+1} é um modelo de Δ, ou, consequentemente, de $\Delta \cup \Sigma$.

Então, nenhuma extensão de X_i é um modelo de $\Delta \cup \Sigma$. Mas $\Delta \cup \Sigma$ é um subconjunto finito de Γ. Então, X_i falsifica um subconjunto finito de Γ. Isso contradiz a hipótese indutiva. Então, nossa suposição de que X_{i+1} falsifica algum subconjunto finito de Γ deve estar errada, que é o que queríamos provar.

Seja X a interpretação de P obtida ao se tomar todos os X_i juntos. Suponha que Γ não tem modelo. Então, alguma fórmula A em Γ é falsa para X. Seja p_k o símbolo proposicional de maior numeração (i.e., aquele com mais traços) ocorrendo em A. Então, X_k falsifica $\{A\}$, um subconjunto finito de Γ. Isso contradiz o resultado obtido no parágrafo anterior, de que nenhum dos X_i falsifica qualquer subconjunto finito de Γ. Então, Γ tem um modelo.

Q.E.D.

33 Conceitos de completude sintática. Prova da completude sintática (em um sentido) de PS

Há vários conceitos de completude sintática. Um natural é o seguinte:

Um sistema formal S é completo sse para cada fórmula A (da linguagem do sistema), A ou $\sim A$ é um teorema de S.[1] PS não é completo nesse sentido. Por exemplo, nem p' nem $\sim p'$ são teoremas de PS (apenas tautologias são teoremas de PS, e nem p' nem $\sim p'$ são tautologias). Seria fácil o suficiente construir um sistema formal com a linguagem P que fosse completo nesse sentido: por exemplo, o sistema que tem como axiomas todo símbolo proposicional (não negado), bem como os axiomas de PS. Mas os lógicos querem como teoremas apenas fórmulas que são logicamente válidas, e no sistema descrito, vários teoremas não seriam logicamente válidos. Do ponto de vista dos lógicos, PS está perfeitamente bem como está: ele tem como teoremas todas as fórmulas logicamente válidas de P e apenas fórmulas logicamente válidas de P, e ele é adequado para a expressão de qualquer função de verdade.

[1] Nós fazemos uso frequente nas partes 3 e 4 de uma modificação desse conceito, que chamamos *completude de negação [negation completeness]*: ver, por exemplo, a definiçao antes de 45.10 e os metateoremas 45.10, 45.13, 45.14, 46.4, 48.3, 51.12 e 51.13 (o teorema de Gödel generalizado).

Contudo, há um sentido de 'sintaticamente completo' em que PS é sintaticamente completo:

Definição. PS é *sintaticamente completo* (em um sentido) sse nenhum esquema não provável pode ser adicionado a ele como um esquema de axioma sem inconsistência.

Aqui e a seguir nós assumiremos como óbvias as noções de *esquema, esquema provável, adicionar como um esquema de axioma, esquema tautológico*, etc.

33.1 *PS é sintaticamente completo*

Prova. Seja U qualquer esquema não provável em PS, com um número arbitrário, k, de letras esquemáticas distintas, $U_1, ...U_k$. Então, pelo teorema da completude semântica, U não pode ser um esquema tautológico (se ele fosse, ele seria provável). Então, há uma atribuição (chame-a de 'I') de valores de verdade às letras esquemáticas de U para a qual, na valoração padrão da tabela verdade, U como um todo recebe o valor F. Considere que U é adicionado a PS como um esquema de axioma, e seja PS* esse alargamento de PS. Então, toda substituição de fórmulas $A_1, ..., A_k$ (não necessariamente distintas) para letras esquemáticas $U_1, ..., U_k$ de U será um axioma, e, portanto, um teorema, de PS*. Seja B a fórmula que resulta da substituição de cada U_i por $p' \supset p'$ ou $\sim(p' \supset p')$, de acordo com a atribuição I atribuindo V ou F a U_i. Então, B é um teorema de PS*. Mas B é falso para toda interpretação. Portanto, $\sim B$ é verdadeiro para toda interpretação; i.e., $\sim B$ é logicamente válido. Então, pela completude semântica de PS, $\sim B$ é um teorema de PS e, portanto, também de PS*. Então, ambos B e $\sim B$ são teoremas de PS*; i.e., PS* é inconsistente. Mas U era *qualquer* esquema não provável em PS. Então, PS é sintaticamente completo.

Apesar de nenhum *esquema* não provável poder ser consistentemente adicionado como um esquema de axioma a PS, algumas *fórmulas* não prováveis podem ser consistentemente adicionadas como axiomas:

33.2 *Se $\sim A$ é qualquer fórmula de P que não é um teorema de PS, então A pode ser consistentemente adicionada a PS como um axioma*

Prova. Seja $\sim A$ qualquer fórmula de P que não é um teorema de PS. Suponha que a adição de A como um axioma a PS produz um sistema inconsistente. Então, para alguma fórmula B, valem ambos $A \vdash_{PS} B$ e $A \vdash_{PS} \sim B$. Então, pelo Teorema da Dedução, $\vdash_{PS} A \supset B$ e $\vdash_{PS} A \supset \sim B$. Mas, por 32.4, $\vdash_{PS} (A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$. Então, por MP duas vezes, $\vdash_{PS} \sim A$. Mas isso contradiz nossa assunção de que $\sim A$ não era um teorema de PS. Então: Se $\sim A$ é qualquer fórmula de P que não é um teorema de PS, A pode ser consistentemente adicionada a PS como um axioma.

Comentários.

1. Um sistema formal de lógica proposicional verofuncional para o qual a consistência simples e absoluta não coincidem pode ser semanticamente e sintaticamente completo, e ainda pode ser possível adicionar um esquema não provável sem obter inconsistência *absoluta*. Isso é verdadeiro para o seguinte sistema, por conta de Henry Hiż (1957):

Sistema de Hiż

Símbolos e fórmulas: Como para PS, com $\sim$ e $\supset$ sendo os únicos conectivos.

Esquemas de axiomas:

1. $\sim(A \supset B) \supset A$
2. $\sim(A \supset B) \supset \sim B$

Regras de inferência:

[Note o requerimento de que as premissas devem ser teoremas]

1. Se $A \supset B$ e $B \supset C$ são teoremas, $A \supset C$ também é.
2. Se $A \supset (A \supset B)$ e A são teoremas, $A \supset C$ também é.
3. Se $\sim A \supset B$ e $\sim A \supset \sim B$ são teoremas, A também é.

Todas as tautologias de P são teoremas desse sistema, então ele é sintaticamente completo (cf. a prova de 33.1), mas é possível adicionar ao sistema o esquema não provável $\sim A$ sem obter inconsistência *absoluta*: por exemplo, nenhum símbolo proposicional não negado é um teorema no sistema alargado.

2. Se um sistema tem uma regra de substituição (padrão) como uma de suas regras de inferência, então, adicionar a ele como um axioma uma fórmula que não é um teorema leva à mesma coisa que adicionar a ele um *esquema* (anteriormente) não provável, pois a regra de substituição permitirá a sibstituição de fórmulas arbitrárias dos símbolos proposicionais da fórmula adicionada. Então, se um tal sistema for sintaticamente completo, *nenhuma fórmula* será consistentemente adicionável a ele (i.e., nenhuma versão de 33.2 valerá para ele). Em relação a isso, há uma diferença fundamental entre sistemas sintaticamente completos *com* e aqueles (como PS) *sem* a substituição como uma regra de inferência.

34 Prova da decidibilidade de PS. Sistema decidível e fórmula decidível. Definição de *método de prova efetivo*

Definição. Um sistema S é *decidível* sse há um método efetivo para dizer, para cada fórmula de S, se ela é ou não um teorema de S.

34.1 *PS é decidível*

Prova. Por 28.3, todo teorema de PS é uma tautologia de P, e, pelo teorema da completude semântica para PS, toda tautologia de P é um teorema de PS. Então, uma fórmula de P é um teorema de PS sse ela é uma tautologia de P. Tomamos como óbvio o fato de o método da tabela verdade completa é um método efetivo para dizer, para qualquer fórmula de P, se ela é ou não uma tautologia de P. Então, PS é decidível.

Nota. Apesar de PS e outros sistemas formais da lógica proposicional verofuncional clássica completa serem decidíveis, foi provado para alguns 'fragmentos' da lógica verofuncional clássica que eles são indecidíveis. Para detalhes e referências, e para outras reviravoltas na metateoria da lógica proposicional verofuncional clássica, veja o interessante artigo de pesquisa, Harrop (1964).

Apesar de o *sistema* PS ser decidível, há *fórmulas* de PS que não são decidíveis em PS, em um sentido diferente de 'decidível', a ser explicado imediatamente:

Definição. Uma *fórmula A* é *decidível em um sistema S* sse A ou sua negação é um teorema de S.

Exemplos: a fórmula $\sim(p' \supset p')$ é decidível em PS; a fórmula $\sim p'$ não.

Então, um *sistema decidível* pode ter *fórmulas indecidíveis* (PS é um tal sistema). Inversamente, *toda fórmula* em um *sistema indecidível* pode ser *decidível.* Dica para um exemplo: Seja S um sistema consistente indecidível, com negação, cujas fórmulas são efetivamente enumeráveis. Usando o lema de Lindenbaum e sua prova, podemos definir um sistema S' que é obtido ao se adicionar como axiomas a

S sucessivamente cada fórmula de S que pode consistentemente ser adicionada quando seu número surge (por assim dizer), de maneira que o conjunto de teoremas de S' é um conjunto maximal p-consistente de S.

Definição. Um sistema S tem um *procedimento efetivo de prova* sse, dado qualquer teorema arbitrário T de S, há um método efetivo para construir uma prova em S de T.

Um sistema decidível não precisa ter um procedimento efetivo de prova. Na verdade, PS não tem um procedimento de prova efetivo. A prova completude do tipo de Kalmár pode ser feita para produzir um, mas é bastante desajeitado. Daremos um exemplo de um procedimento de prova muito mais simples para um sistema diferente de lógica proposicional verofuncional em §37.

35 Sentido extendido de 'interpretação de P'. Modelos finitos fracos e modelos finitos fortes

Nessa seção, ampliaremos a noção de 'interpretação de P':

1. Permitiremos como interpretações de P atribuições de valores diferentes dos valores verdade a símbolos proposicionais de P.
2. Permitiremos que $\sim$ e $\supset$ sejam definidos por tabelas que não são tabelas de verdade, apesar de terem uma grande semalhança com tabelas de verdade.
3. Onde antes 'todas as interpretações' significava 'todas as intepretações atribuindo valores exclusivamente do conjunto $\{V, F\}$ e dando a $\sim$ e $\supset$ seus significados usuais', quereremos agora falar de 'todas as interpretações atribuindo valores de tal e tal conjunto e com tal e tal

significado de $\sim$ e $\supset$'; onde o conjunto e os significados variarão.

4. 'Logicamente válido' era definido como significando 'verdadeiro para todas as interpretações', onde isso significava 'verdadeiro para todas as interpretações atribuindo valores exclusivamente do conjunto $\{V, F\}$ e dando a $\sim$ e $\supset$ seus significados usuais'. Isso ainda significará isso (i.e., o mesmo que a frase longa). Mas também faremos uso da palavra 'válido' de outra maneira. Usá-la-emos para significar 'verdadeiro para todas as interpretações pertencentes à classe de interpretações sob consideração', onde as coisas principais que determinarão o que a classe é serão (1) o conjunto particular de valores que interpretações na classe pode utilizar para as atribuições aos símbolos proposicionais, e (2) os significados particulares dados a $\sim$ e $\supset$ (constante para uma dada classe de interpretações).

Então: Uma *classe* M de interpretações de P será dada ao se especificar ou exibir:

1. Um conjunto não vazio V de coisas chamadas de *valores*, os valores que podem ser atribuídos a símbolos proposicionais de P.
2. Um subconjunto D de V, o conjunto de *valores designados.*
3. a) Uma tabela T1 mostrando, para uma fórmula arbitrária A de P, qual valor (de V) $\sim A$ tem para cada valor que pode ser atribuído a A do conjunto V

   b) Uma tabela T2 mostrando qual valor $A \supset B$ tem para cada possível par de valores de V que A e B possam ter (A e B sendo fórmulas arbitrárias de P).

Para ilustrar: Para a classe de interpretações nas seções anteriores,

1. V era o conjunto $\{V, F\}$, i.e., o conjunto de valores *verdade.*
2. D era o conjunto $\{V\}$, I.E., o conjunto cujo único membro é o valor verdade verdade.
3. a) A tabela T1 era a tabela verdade padrão para $\sim$.

   b) A tabela T2 era a tabela verdade padrão para $\supset$.

Seja dada uma classe M de interpretações de P, para a qual os conjuntos e tabelas V, D, Tl e T2 foram especificados. Definimos a seguir uma *interpretação* I como uma atribuição a cada um dos símbolos proposicionais de P de um ou outro dos valores no conjunto V. Uma fórmula A é *verdadeira para I* sse ela toma um valor designado (ou seja, um valor do conjunto D) para a atribuição de valores que I faz aos seus símbolos proposicionais constituintes (sendo o valor de A determinado por esta atribuição e pelas tabelas Tl e T2). Uma fórmula A é *válida para a classe M* sse for *verdadeira para todas as interpretações da classe M.*

Faremos uso dessas noções nas provas de independência na próxima seção.

As seguintes noções [devidas a Ronald Harrop: cf. Harrop, 1964] também pertencem a este lugar. Não faremos nenhum uso delas. Mas elas podem ser encontradas na literatura e seriam úteis em um tratamento mais extenso do que o nosso. Definimos as noções apenas para a linguagem P; mas eles poderiam ser definidos para linguagens arbitrárias.

Uma interpretação I pertencente a uma classe M (para a qual V, D, Tl e T2 foram especificados) é considerada um *modelo fraco finito* de um sistema formal arbitrário S com linguagem P se satisfizer as condições 1, 2 e 3a abaixo , e um *modelo forte finito* se satisfizer as condições 1, 2 e 3b abaixo:

1. O conjunto V é finito.
2. Cada axioma de S é válido para a classe M, ou seja, verdadeiro para toda interpretação da classe M.

3a Cada regra de inferência de S preserva validade-para-a-classe-M.

3b Cada regra de inferência de S preserva verdade para uma dada interpretação.

Para ilustrar: Toda interpretação de P pertencente à classe de interpretações sob consideração em seções anteriores é tanto um modelo fraco finito e um modelo forte finito do sistema PS. Pois (1) o conjunto $\{V, F\}$ é finito; (2) os axiomas de PS são verdadeiros para todas as interpretações dessa classe; (3a) Modus Ponens para $\supset$ preserva verdade-para-toda-interpretação-nessa-classe [28.2]; e (3b) Modus Ponens preserva verdade-para-I [28.5].

36 Prova da independência dos três esquemas de axiomas de PS

Seja S qualquer sistema formal, e seja A um de seus axiomas. Seja $S - A$ o sistema obtido de S omitindo A dos axiomas. Então, A é *independente* dos outros axiomas de S sse não houver prova em $S - A$ de A [isto é, sse A não é um teorema de $S - A$]. Da mesma forma, com modificações óbvias, para esquemas de axiomas.

É fácil ver como, em princípio, se pode estabelecer que um axioma *não* é independente dos outros axiomas do sistema (a saber, provando-o a partir dos outros). Mas talvez não seja tão óbvio como, em princípio, estabelecer a independência. Na verdade, os dois tipos de método usados para provar a consistência podem ser usados para provar a independência:

(a) Modelo-teórico. Seja A o axioma cuja independência queremos provar. Se pudermos mostrar que há uma interpretação para a qual todos os outros axiomas são verdadeiros, e para a qual a(s) regra(s) de inferência preserva(m) verdade, mas para a qual A não é verdadeira, então isso prova que A não é derivável dos outros axiomas, i.e. que A é independente dos outros axiomas.

(b) Prova-teórico. Novamente, seja A o axioma em que estamos interessados. Se pudermos mostrar que todos os outros axiomas têm uma certa propriedade sintática, que essa propriedade é transmitida pela(s) regra(s) de inferência, e que A não tem essa propriedade, então A é independente dos outros axiomas.

Se nos restringimos ao sentido estrito de 'interepretação' anterior, não poderíamos usar o método (a) para provar a independência dos axiomas de PS. Pois, naquele sentido estrito antigo de 'interpretação', todo axioma de PS é verdadeiro para toda interpretação. Mas nós veremos que no novo sentido extendido de 'interpretação' é possível encontrar interpretações para as quais alguns dos axiomas não são verdadeiros.

No que se segue, falaremos livremente de esquemas sendo 'válidos' ou 'não válidos'. Isso é simplesmente uma maneira abreviada de dizer que todas as fórmulas da forma do esquema são válidas, ou que nem todas as fórmulas dessa forma são válidas, respectivamente. Similarmente para 'provável'.

36.1 *O esquema de axioma PS 1 é independente do conjunto de esquemas de axiomas* {*PS 2, PS 3*}

Prova. Seja M a classe de interpretações de P com

$V = \{0, 1, 2\}$, $D = \{0\}$, e T1 e T2 como se segue:

T1

A	$\sim A$
0	1
1	1
2	0

T2

A	$\sim A$	$A \supset B$
0	0	0
0	1	2
0	2	2
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

As tabelas abaixo mostram que os esquemas de axiomas PS 2 e PS 3 são válidos para todas as interpretações na classe M. Modus Ponens preserva a validade para a classe M. Portanto, qualquer coisa provável usando apenas axiomas por PS 2 e PS 3 é válido para a classe M. Mas o esquema PS 1 não é válido para a classe M. Portanto, não é demonstrável a partir do conjunto {PS 2, PS 3}. (Cada tabela precisa de 3^n linhas, onde n é o número de letras esquemáticas distintas no axioma-esquema).

PS 1

A	$\supset$	$(B\supset$		$A)$
0	0	0	0	0
0	2	1	2	0
0	0	2	0	0
1	0	0	2	1
1	0	1	2	1
1	2	2	0	1
2	0	0	2	2
2	0	1	0	2
2	0	2	0	2
	*			

PS 2

$(A$	$\supset$	$(B$	$\supset$	$C))$	$\supset$	$((A$	$\supset$	B	$)\supset$	$(A$	$\supset$	$C))$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2	0	2	1	0	0	0	0	2	0	2	1
0	2	0	2	2	0	0	0	0	2	0	2	2
0	2	1	2	0	0	0	2	1	0	0	0	0
0	2	1	2	1	0	0	2	1	0	0	2	1
0	0	1	0	2	0	0	2	1	0	0	2	2
0	0	2	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0
0	0	2	0	1	0	0	2	2	0	0	2	1
0	0	2	0	2	0	0	2	2	0	0	2	2
1	2	0	0	0	0	1	2	0	0	1	2	0
1	0	0	2	1	0	1	2	0	0	1	2	1
1	0	0	2	2	0	1	2	0	0	1	0	2
1	0	1	2	0	0	1	2	1	0	1	2	0
1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1
1	2	1	0	2	0	1	2	1	0	1	0	2
1	2	2	0	0	0	1	0	2	2	1	2	0
1	2	2	0	1	0	1	0	2	2	1	2	1
1	2	2	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2
2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0
2	0	0	2	1	0	2	0	0	0	2	0	1
2	0	0	2	2	0	2	0	0	0	2	0	2
2	0	1	2	0	0	2	0	1	0	2	0	0
2	0	1	2	1	0	2	0	1	0	2	0	1
2	0	1	0	2	0	2	0	1	0	2	0	2
2	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0
2	0	2	0	1	0	2	0	2	0	2	0	1
2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2
					*							

PS 3

$(\sim A$	$\supset$	$\sim$	$B)$	$\supset$	$(B$	$\supset$	$A)$	
1	0	2	1	0	0	0	0	0
1	0	2	1	1	0	1	2	0
1	0	2	0	2	0	2	0	0
1	1	2	1	0	0	0	2	1
1	1	2	1	1	0	1	2	1
1	1	2	0	2	0	2	0	1
0	2	2	1	0	0	0	2	2
0	2	2	1	1	0	1	0	2
0	2	0	0	2	0	2	0	2
					*			

36.2 *O esquema PS 2 é independente do conjunto* {*PS 1, PS 3*}

Prova. Seja M a classe de interpretações de P com $V = \{0, 1, 2\}$, $D = \{1\}$, e T1 e T2 como se segue:

T1

A	$\sim A$
0	1
1	0
2	2

T2

A	B	$A \supset B$
0	0	1
0	1	1
0	2	1
1	0	0
1	1	1
1	2	2
2	0	2
2	1	1
2	2	1

PS 1 e PS 3 são válidos para a classe M. MP preserva validade para a classe M. PS 2 não é válido para a classe M (ele obtém valor 2 quando A obtém 2, B obtém 2 e C obtém 0).

36.3 *PS 3 é independente do conjunto* {*PS 1, PS 2*}

Prova. Usamos um método de prova, pela variedade. Seja L* o esquema que resulta de um esquema L ao deletar todos os símbolos de negação de L. Então, se L for $(\sim A \supset \sim B)$, então L* é $(A \supset B)$. Chame L* de *esquema associado* de L. Então, (1) o esquema associado de PS 1 e PS 2 são ambos esquemas tautológicos [em ambos os casos, L*=L]; (2) Modus Ponens preserva a tautologicidade de esquemas associados [note que $(A \supset B)*$ é $(A* \supset B*)$]; (3) o esquema associado de PS 2 *não* é um esquema tautológico [ele é $(A \supset B) \supset (B \supset A)$]. Então, PS 3 é independente de {PS 1, PS 2}.

37 Fornalização de Anderson e Belnap da lógica proposicional vero-funcional: o sistema AB

Modus Ponens para $\supset$ pode ser escrito como:

$$\frac{A, A \supset B}{B}$$

$A \supset B \equiv \sim A \vee B$. Então, Modus Ponens para $\vee$ é:

$$\frac{A, \sim A \vee B}{B}$$

Alan Ross Anderson e Nuel Belnap objetam ao Modus Ponens para $\vee$ (e, da mesma forma, ao Modus Ponens para $\supset$) pelo seguinte motivo: eles mantém que

(a) as regras de inferência de um sistema formal cujos teoremas (em suas interpretações pretendidas) são verdades da lógica devem, em suas interpretações pretendidas, ser regras de inferência válidas;

(b) em sua interpretação pretendida, Modus Ponens para $\vee$ (ou para $\supset$) implica (em conjunção com princípios aceitos) que a partir de qualquer contradição formal arbitrária se segue logicamente qualquer proposição que você quiser; e

(c) simplesmente não é verdade que a partir de quaqluer contradição formal arbitrária se segue logicamente qualquer proposição que você quiser.

Para ilustrar (b):

1	A	[Assunção]	A contradição formal
2	$\sim A$	[Assunção]	
3	$\sim A \vee B$	[De 2, pelos princípios aceitos da lógica vero-funcional: B pode ser qualquer fórmula arbitrária]	
4	B	[1,3, MP para $\vee$]	

Consequentemente, Anderson e Belnap apresentaram (1959) um sistema formal de lógica proposicional verofucional que não empregava Modus Ponens para $\vee$ (ou qualquer equivalente dele). Este sistema, que é uma simplificação dos sistemas anteriores de Kurt Schütte, admite uma prova de completude muito fácil e tem um procedimento efetivo simples de prova.

[*Comentários filosóficos.* Eu concordo com Anderson e Belnap sobre (c). Mas não acho que, *para nosso propósito atual*, tenhamos que concordar com (a). Eu considero a regra de inferência de PS não como algo que em sua interpretação pretendida deve ser uma regra válida de inferência, mas apenas como uma *regra para gerar fórmulas* que, em sua interpretação pretendida, expressam verdades da lógica. Não importa para o nosso propósito atual *como* essas fórmulas são geradas, desde que todas sejam geradas (e nada mais seja). Assim, para nós, ou o Modus Ponens não tem uma interpretação pretendida, ou deve ser interpretado como uma regra para gerar fórmulas a partir de outras fórmulas, regra que, dada a interpretação das fórmulas, acaba gerando apenas verdades da lógica quando aplicada apenas a verdades da lógica. Conseqüentemente, eu nego (b). Contudo, concordo com a afirmação implícita de Anderson e Belnap de que *uma* das tarefas do lógico é construir sistemas formais cujas regras de inferência podem ser interpretadas como expressando regras válidas de inferência.]

O sistema AB

Símbolos

AB tem apenas 4 símbolos, a saber, p, $'$, $-$, $\vee$

O símbolo p seguido de um ou mais apóstrofes é um *símbolo proposicional* de AB.

A barra, , na interpretação pretendida, expressa negação. Seu uso nos permite dispensar o uso de parênteses.

Fbfs

1. Qualquer símbolo proposicional é uma fbf.
2. Se A é uma fbf, então $\overline{A}$ é uma fbf.
3. Se A e B são fbfs, então $A \vee B$ é uma fbf.
4. Nada mais é uma fbf.

Definição de disjunção primitiva:

Uma fbf A é uma *disjunção primitiva* sse ela tem a forma $B_1 \vee ... \vee B_n (n \geqslant 1)$, onde cada B_j é um símbolo proposicional ou um símbolo proposicional com uma barra ($-$) sobre ele.

Definição de parte disjuntiva:

(a) Toda fbf é uma parte disjuntiva de si mesma.

(b) Se $B \vee C$ é uma parte disjuntiva de A, então B é uma parte disjuntiva de A e C também.

Notação. $D(A)$ é uma fbf na qual A é uma parte disjuntiva, e $D(B)$ é o resultado de substituir uma ocorrência da parte disjuntiva A em $D(A)$ por B.

Axiomas

Uma fbf A é um axioma sse ela é uma disjunção primitiva e, para algum símbolo proposicional B, tanto B quanto $\overline{B}$ são partes disjuntivas dela.

Exemplos: $p' \vee p'' \vee \overline{p'''} \vee \overline{p'}$ é um axioma; $p' \vee \overline{p'} \vee \overline{p'' \vee p'''}$ não é (porque não é uma disjunção primitiva).

Regras de inferência

I. $D(\overline{\overline{A}})$ é uma consequência imediata de $D(A)$.

II. $D(\overline{A \vee B})$ é uma consequência imediata de $D(\overline{A})$ e $D(\overline{B})$.

Pela legibilidade, a partir de agora escreveremos p, q, r em vez de p', p'', p'''.

Exemplos:

I. $p \vee \overline{\overline{\overline{q \vee r}}}$ é uma consequência imediata de $p \vee \overline{q \vee r}$.

II. $p \vee \overline{q \vee r}$ é uma consequência imediata de $p \vee \overline{q}$ e $p \vee \overline{r}$.

Definição de prova em AB

Uma *prova em AB* é uma cadeia finita de fórmulas de AB cada uma das quais é ou um axioma de AB ou uma consequência imediata pela regra I ou II de alguma(s) fórmula(s) precedente na cadeia.

Exemplo:

1	$p \vee \overline{r} \vee \overline{p} \vee q$	[Axioma]
2	$\overline{\overline{p}} \vee \overline{r} \vee \overline{p} \vee q$	[De 1 pela regra I]
3	$\overline{q} \vee \overline{r} \vee \overline{p} \vee q$	[Axioma]
4	$\overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{r} \vee \overline{p} \vee q$	[De 2 e 3 pela regra II]

Uma das belezas desse sistema é que há um procedimento efetivo de prova simples para ele. Para ilustrar:

Requerido encontrar uma prova de $\overline{\overline{\overline{p}} \vee \overline{q}} \vee \overline{q} \vee p$ [que é uma transcrição em – e $\vee$ de $(\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p)$].

1. Olhe para a parte não reduzida mais à esquerda da fórmula a ser provada [uma parte ‘reduzida’ é uma parte disjuntiva que é um símbolo proposicional ou um símbolo proposicional negado]. Nesse caso, é

$$\overline{\overline{\overline{p}} \vee \overline{q}}$$

A única regra que pode nos dar algo dessa forma é a regra II, que diz que

$$\overline{\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}} \vee \overline{q} \vee p$$

é obtível a partir das duas fórmulas

$$\overline{\overline{\overline{p}}} \vee \overline{q} \vee p$$

e

$$\overline{\overline{q}} \vee \overline{q} \vee p$$

2. Comece a construção de uma árvore, com a fórmula a ser provada na parte de baixo, e as duas fórmulas então mencionadas nos fins do primeiro ramo:

$$
\begin{array}{ccc}
2\ \overline{\overline{\overline{p}}} \vee \overline{q} \vee p & & 3\ \overline{\overline{q}} \vee \overline{q} \vee p \\
& \diagdown \quad \diagup & \\
& 1\ \overline{\overline{\overline{p}} \vee \overline{q}} \vee \overline{q} \vee p &
\end{array}
$$

3. Olhe para a parte não reduzida mais à esquerda de $\overline{\overline{\overline{p}}} \vee \overline{q} \vee p$ [2]. A única regra que pode nos dar qualquer coisa dessa forma é a regra I, que diz que

$$\overline{\overline{\overline{p}}} \vee \overline{q} \vee p$$

é obtível a partir de

$$\overline{p} \vee \overline{q} \vee p$$

4. Escreva $\overline{p} \vee \overline{q} \vee p$ acima de $\overline{\overline{\overline{p}}} \vee \overline{q} \vee p$ na árvore. Nossa árvore agora fica assim:

$$
\begin{array}{ccc}
4\ \overline{p} \vee \overline{q} \vee p & & \\
| & & \\
2\ \overline{\overline{\overline{p}}} \vee \overline{q} \vee p & & 3\ \overline{\overline{q}} \vee \overline{q} \vee p \\
& \diagdown \quad \diagup & \\
& 1\ \overline{\overline{\overline{p}} \vee \overline{q}} \vee \overline{q} \vee p &
\end{array}
$$

5. $\overline{p} \vee \overline{q} \vee p$ [4] está completamente reduzido e é na verdade um axioma. Olhe para o outro ramo. A parte não reduzida mais a esquerda é

$$\overline{\overline{q}}$$

obtível apenas pela regra I, que diz que

$$q \vee \overline{q} \vee p$$

é obtível a partir de

$$q \vee \overline{q} \vee p$$

6. Escreva $q \vee \overline{q} \vee p$ acima de $\overline{\overline{q}} \vee \overline{q} \vee p$ [3]. Isso nos dá a árvore:

$$\begin{array}{ccc}
4\ \overline{p} \vee \overline{q} \vee p & & 5\ q \vee \overline{q} \vee p \\
| & & | \\
2\ \overline{\overline{\overline{p}}} \vee \overline{q} \vee p & & 3\ \overline{\overline{q}} \vee \overline{q} \vee p \\
& \diagdown \quad \diagup & \\
& 1\ \overline{\overline{\overline{p}} \vee \overline{q}} \vee \overline{q} \vee p &
\end{array}$$

7. Ambos os ramos da árvore terminam em fórmulas totalmente reduzidas que são axiomas. Para obter a prova requerida, simplesmente escrevemos as fórmulas na árvore na ordem inversa, assim:

[5]	$q \vee \overline{q} \vee p$	[Axioma]
[4]	$\overline{p} \vee \overline{q} \vee p$	[Axioma]
[3]	$\overline{\overline{q}} \vee \overline{q} \vee p$	[De 5 pela regra I]
[2]	$\overline{\overline{\overline{p}}} \vee \overline{q} \vee p$	[De 4 pela regra I]
[1]	$\overline{\overline{\overline{p}} \vee \overline{q}} \vee \overline{q} \vee p$	[De 2 e 3 pela regra II]

É intuitivamente evidente que o método que estamos usando é um método efetivo para construir, para qualquer fórmula, uma árvore com um número finito de ramos, cada um dos quais termina em uma disjunção primitiva (contando uma única fórmula como uma árvore com zero ramos). Pois é impossível que uma fórmula de AB não seja nem uma disjunção primitiva nem mais redutível por nosso método (se não for uma disjunção primitiva, então podemos reduzi-la pelo menos um estágio adiante). Deixamos ao leitor dar uma prova rigorosa disso por indução matemática. É óbvio também que, se todos os ramos dessa árvore terminam em um axioma, a fórmula correspondente é um teorema de AB. O inverso desta afirmação é uma consequência da prova da completude semântica de AB, que segue a prova de consistência.

Semântica de AB

Assim como para P, com modificações óbvias. Por exemplo, a cláusula 3 da definição de *verdadeiro para uma interpretação de P* é substituída por

3. $A \vee B$ é verdadeiro para I sse ou A é verdadeiro para I ou B é verdadeiro para I ['ou... ou...' verofuncional]

Prova da consistência de AB

37.1 *Lema: As regras de inferência de AB preservam tautologicidade*

Prova

(a) Regra I. Para prvar que se $D(A)$ é uma tautologia, então $D(\overline{\overline{A}})$.

Casos:

1. $D(A)$ é A.
2. $D(A)$ é $A \vee B$.
3. $D(A)$ é $B \vee A$.
4. $D(A)$ é $B \vee A \vee C$.

Caso 1. Segue-se da definição de verdade para AB que se $\models_{AB} A$, então $\models_{AB} \overline{A}$.

Caso 2. Se $\models_{AB} A \vee B$, então $\models_{AB} \overline{\overline{A}} \vee B$.

Casos 3 e 4. Similares ao caso 2.

(b) Regra II. Para provar que se $\models_{AB} D(\overline{A})$ e $\overline{A \vee B}$, então $\models_{AB} D(\overline{A \vee B})$.

Casos:

1. $D(\overline{A})$ é $\overline{A}$ [então, $D(\overline{B})$ é $\overline{B}$ e $D(\overline{A \vee B})$ é $\overline{A \vee B}$].
2. $D(\overline{A})$ é $\overline{A} \vee C$ [então, $D(\overline{B})$ é $\overline{B} \vee C$ e $D(\overline{A \vee B})$ é $\overline{A \vee B} \vee C$].
3. $D(\overline{A})$ é $C \vee \overline{A}$.
4. $D(\overline{A})$ é $C \vee \overline{A} \vee D$.

Caso 1. Segue-se da definição de verdade para AB que se $\models_{AB} \overline{A}$ e $\models_{AB} \overline{B}$, então $\models_{AB} \overline{A \vee B}$.

Caso 2. Da equivalência

$$((\overline{A} \vee C) \wedge (\overline{B} \vee C)) = (\overline{A \vee B} \vee C)$$

é claro que se $\models_{AB} \overline{A} \vee C$ e $\models_{AB} \overline{B} \vee C$.

Casos 3 e 4. Similares ao caso 2.

37.2 *AB é consistente*

Prova. Todo axioma de AB é uma tautologia, e por 37.1, as regras de inferência preservam tautologicidade. Então, todo teorema de AB é uma tautologia. Então AB é consistente.

Prova da completude semântica de AB

37.3 *Lema: Qualquer fórmula que é uma consequência imediata de uma fórmula que é falsa para uma interpretação também é falsa para essa interpretação*

Prova

(a) Regra I. PAra provar que se $D(A)$ é falso para I, então $D(\overline{\overline{A}})$ também o é. Casos 1–4 são como na prova de (a) em 37.1. As provas para todos esses casos são óbvias.

(b) Regra II.

Caso 1. $D(\overline{A})$ é $\overline{A}$. Então, $D(\overline{B})$ é $\overline{B}$, e $D(\overline{A \vee B})$ é $\overline{A \vee B}$. Se $\overline{A}$ é falso para I, então $\overline{A \vee B}$ é falso para I, não importando se $\overline{B}$ é verdadeiro ou falso para I. O mesmo vale para $\overline{B}$.

Caso 2. $D(\overline{A})$ é $\overline{A} \vee C$. Então, $D(\overline{B})$ é $\overline{B}$ é $\overline{B} \vee C$, e $D(\overline{A \vee B})$ é $\overline{A \vee B} \vee C$. Se $\overline{A} \vee C$ é falso para I, então, A deve ser verdadeiro para I e C deve ser falso para I, e então $\overline{A \vee B} \vee C$ deve ser falso para I. O mesmo vale para $\overline{B} \vee C$.

Casos 3 e 4. Similares ao caso 2.

37.4 *AB é semanticamente completo [em relação a tautologias em – e* $\vee$*]*

Prova. Suponha que A é uma fórmula de AB que não é um teorema de AB. Construa uma árvore para A da maneira ilustrada perto do começo dessa seção. Pelo menos um ramo da árvore deve terminar em uma disjunção primitiva que não é um axioma [se cada ramo terminasse em um axioma, então A seria um teorema]. Chame quaisquer tais ramos de ramos 'ruins'. Para um dado ramo ruim, as seguintes interpretações I de AB fazem todas as fórmulas do ramo falsas para I:

Seja $B_1, ..., B_k$ todos os símbolos proposicionais distintos ocorrendo na fórmula no topo de cada ramo ruim. Para cada $B_i (1 \leqslant i \leqslant k)$, se B_i ocorre não negado ali, I atribui F a ele; se negado, V [para nenhum B_i ocorrem ambos B_i e $\overline{B_i}$; do contrário, a fórmula seria um axioma]. I atribui V a todo outro símbolo proposicional em AB [ela poderia da mesma maneira atribuir F, ou qualquer outra combinação de valores de verdade].

Nessa interpretação, a fórmula do topo do ramo ruim é falsa, e por 37.3, falsidade para I é transmitida pelas regras de inferência. Então, *toda* fórmula no ramo ruim, incluindo A em baixo, é falsa para I. Então, A não é uma tautologia. Então, nós temos: Se A é uma fórmula de AB que não é um teorema de AB, então A não é uma tautologia. Ou, equivalentemente: Se A é uma tautologia de AB, então A é um teorema de AB.

37.5 *AB é decidível*

2 provas:

1. Uma vez que uma fórmula de AB é um teorema de AB sse ela é uma tautologia, o método usual de tabelas de verdade é um método de decisão efetivo para AB.

2. Seja A qualquer fórmula de AB sobre a qual queremos saber se é ou não um teorema. Construa uma árvore (completa) para A da maneira ilustrada anteriormente. Se cada ramo da árvore termina em um axioma, A é um teorema de AB. Se pelo menos um ramo termina em uma fórmula que não é um axioma, então A não é um teorema.

37.6 *Há um método efetivo de prova para AB*

Prova. Seja A qualquer teorema de AB. Construa uma árvore para A da maneira usual. Tome as fórmulas na árvore na ordem reversa em que elas ocorreram na construção da árvore. O resultado é uma prova em AB de A.

Para finalizar esta seção, nós damos uma árvore de prova, e uma prova da fórmula

$$\overline{\overline{p} \vee \overline{q} \vee r} \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r$$

que é uma transcrição em $-$ e $\vee$ da fórmula

$$(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$$

$13\ q \vee p \vee \overline{p} \vee r$ [*Ax.*]

$7\ p \vee p \vee \overline{p} \vee r$ [*Axioma*] $\qquad 11\ q \vee \overline{\overline{p}} \vee \overline{p} \vee r \qquad 12\ q \vee \overline{q} \vee \overline{p} \vee r$ [*Ax.*] $\qquad 16\ \overline{r} \vee p \vee \overline{p} \vee r$ [*Axioma*]

$5\ p \vee \overline{\overline{p}} \vee \overline{p} \vee r \qquad 6\ p \vee \overline{q} \vee \overline{p} \vee r \qquad 10\ q \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r \qquad 14\ \overline{r} \vee \overline{\overline{p}} \vee \overline{p} \vee r \qquad 15\ \overline{r} \vee \overline{q} \vee \overline{p} \vee r$ [*Ax.*]

$4\ p \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r \qquad 8\ \overline{\overline{q}} \vee \overline{p} \vee q \vee \overline{p} \vee r \qquad 9\ \overline{r} \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r$

$2\ \overline{\overline{p}} \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r \qquad 3\ \overline{\overline{q} \vee r} \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r$

$1\ \overline{\overline{p} \vee \overline{q} \vee r} \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r$

Prova em AB de $\overline{\overline{p} \vee \overline{q} \vee r} \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r$ [cf. a árvore de verdade]

16	$\overline{r} \vee p \vee \overline{p} \vee r$	[Axioma]
15	$\overline{r} \vee \overline{q} \vee \overline{p} \vee r$	[Axioma]
14	$\overline{r} \vee \overline{\overline{p}} \vee \overline{p} \vee r$	[16, regra I]
13	$q \vee p \vee \overline{p} \vee r$	[Axioma]
12	$q \vee \overline{q} \vee \overline{p} \vee r$	[Axioma]
11	$q \vee \overline{\overline{p}} \vee \overline{p} \vee r$	[13, regra I]
10	$q \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r$	[11, 12, regra II]
9	$\overline{r} \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r$	[14, 15, II]
8	$\overline{\overline{q}} \vee \overline{p} \vee q \vee \overline{p} \vee r$	[10, I]
7	$p \vee p \vee \overline{p} \vee r$	[Axioma]
6	$p \vee \overline{q} \vee \overline{p} \vee r$	[Axioma]
5	$p \vee \overline{\overline{p}} \vee \overline{p} \vee r$	[7, I]
4	$p \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r$	[5, 6, II]
3	$\overline{\overline{q} \vee r} \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r$	[8, 9, II]
2	$\overline{\overline{p}} \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r$	[4, I]
1	$\overline{\overline{p} \vee \overline{q} \vee r} \vee \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p} \vee r$	[2, 3, II]

Parte III.

Parte Três: Lógica de Predicados de Primeira Ordem: Consistência de Completude

38 Uma linguagem formal para a lógica de predicados de primeira ordem: a linguagem Q. As linguagens Q+

A linguagem Q

('Q' de 'Quantificação')

Símbolos

$$p \; ' \; x \; a \; f \; F \; * \sim \supset \bigwedge \; (\;)$$

Nomes para várias combinações desses símbolos:

Símbolos proposicionais: $p', p'', p''', ...$ *Variáveis individuais (variáveis, abreviado)*: $x', x'', x''', ...$ *Constantes individuais (constantes, abreviado)*: a', a'', a''' *Símbolos funcionais*: $f^{*\prime}$, $f^{*\prime\prime}, f^{*\prime\prime\prime}, ..., f^{**\prime}, f^{**\prime\prime}, f^{**\prime\prime\prime}, ..., f^{***\prime}, f^{***\prime\prime}, f^{***\prime\prime\prime}$, ..., ... i.e., a letra minúscula itálica f seguida por um ou mais asteriscos e então um ou mais traços é um símbolo funcional.

Um símbolo funcional com exatamente n asteriscos é um *símbolo funcional de n lugares*

Símbolos de predicado: $F^{*\prime}, F^{*\prime\prime}, F^{*\prime\prime\prime}$, ..., $F^{**\prime}$, $F^{**\prime\prime}$, $F^{**\prime\prime\prime}$, ..., $F^{***\prime}, F^{***\prime\prime}, F^{***\prime\prime\prime}$, ..., ..., i.e., a letra maiúscula F seguida por um ou mais asteriscos e então um ou mais traços é um símbolo de predicado. Um símbolo de predicado com exatamente n asteriscos é um *símbolo de predicado de n lugares.*

Conectivos: $\sim \supset$

Quantificador universal: $\wedge \bigwedge$

Parênteses: ( )

Termos: Uma constante individual é um termo. Uma variável individual é um termo. Um símbolo funcional de n lugares seguido por n termos é um termo. Nada mais é um termo.

Termos fechados: Um termo é fechado sse nenhuma variável ocorre nele.

Fbfs

1. Qualquer símbolo proposicional é uma fbf e uma fbf atômica.
2. Se F é um predicado de n lugares e $t_1, ..., t_n$ são termos (não necessariamente distintos), então $Ft_1, ...t_n$ é uma fbf e uma fórmula atômica.
3. Se A é uma fbf e v uma variável individual, então $\bigwedge vA$ é uma fbf.
4. Se A é uma fbf, então $\sim A$ é uma fbf.
5. Se A e B são fbfs, então $(A \supset B)$ é uma fbf.
6. Nada mais é uma fbf.

Escopo

Em $\bigwedge vA$, se A é uma fbf, então A é o escopo do quantificador $\bigwedge$.

Exemplos:

1. Em $\bigwedge x'(F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime\prime}x'')$, o escopo do quantificador é $(F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime\prime}x'')$.
2. Em $(\bigwedge x'F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime\prime}x'')$, o escopo do quantificador é $F^{*\prime}x'$: pois $F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime\prime}x''$ não é uma fbf.

Ocorrências livres e ligadas de variáveis

Uma ocorrência de uma variável v é *ligada* em uma fbf sse ela ocorre imediatamente após um quantificador[1] na fbf, ou se ela está dentro do escopo de um quantificador[1] que tem v como sua variável (i.e., um quantificador[1] que é imediatamente seguido por v). Do contrário, uma ocorrência é *livre* na fbf.

Uma variável é livre em uma fbf se qualquer ocorrência dela é livre na fbf, e uma variável é ligada em uma fbf se toda ocorrência dela é ligada na fbf. (Então, uma variável pode ser tanto livre quanto ligada na mesma fbf).

Exemplos:

1. Em $\bigwedge x'(F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime\prime}x'')$, ambas as ocorrências de x' são ligadas, enquanto a ocorrência de x'' é livre.
2. Em $(\bigwedge x' F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime}x')$, as primeiras duas ocorrências de x' são ligadas, enquanto a terceira ocorrência é livre. Então, a variável x' é tanto livre quanto ligada nesta fórmula.

   Segue-se da nossa definição que qualquer ocorrência de uma variável em uma fbf *atômica* (i.e., uma fbf sem quantificadores) é livre.

Notação

Se A é uma fbf, t um termo, v uma variável, então At/v é a fbf obtida a partir da substituição de todas as ocorrências livres de v por t em A.

Exemplos:

1. Se A é $(\bigwedge x' F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime}x')$, então Ax'''/x' é $(\bigwedge x' F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime}x''')$.
2. Se A é $\bigwedge x'(F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime}x')$, então Ax'''/x' é o próprio

[1] I.e., uma ocorrência do quantificador. Similar em outros lugares.

A, uma vez que não há ocorrências livres de x' em A.

Definição. t é livre para v em A

t é livre para v em A se (1) se t é uma variável, então t ocorre livre em At/v onde quer que v ocorra livre em A, e (2) se t é um termo em que qualquer variável ocorre, então onde quer que livres ocorrências de v em $\bigwedge$ sejam substituídas por t, todas as ocorrências de variáveis em t permanecem livres. Se t é um termo fechado, então t é livre para v em qualquer fórmula A.

Exemplos:

1. Em $(\bigwedge x'F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime}x')$, x'' é livre para x'.
2. Em $(\bigwedge x'F^{*\prime}x' \supset \bigwedge x''F^{*\prime}x')$, x'' não é livre para x'.
3. Em $(\bigwedge x'F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime}x')$, $f^{**\prime}x'x''$ é livre para x'.
4. Em $(\bigwedge x'F^{*\prime}x' \supset \bigwedge x''F^{*\prime}x')$, $f^{**\prime}x'x''$ não é livre para x'.

Fbfs fechadas (ou *sentenças*)

Uma fbf *fechada* é uma fbf em que não há ocorrências livres de qualquer variável. Uma fbf que não é fechada é *aberta.*

Fecho

1. Se A é uma fbf em que as variáveis $v_1, ..., v_n$ têm ocorrências livres, então A precedido por $\bigwedge v_1, ..., v_n$ é um fecho de A.

[Uma vez que não requerimos que as variáveis $v_1, ..., v_n$ ocorram livres em A nessa ordem, segue-se que, por exemplo, tanto

$$\bigwedge x' \bigwedge x''F^{**\prime}x'x''$$

quanto

$$\bigwedge x'' \bigwedge x' F^{**\prime} x' x''$$

são fechos de

$$F^{**\prime} x' x''.]$$

2. Se A é uma sentença [fbf fechada], então A é um fecho de A, e o mesmo vale para $\bigwedge vA$, onde v é qualquer variável.

4. Qualquer fecho de um fecho de A é um fecho de A.

Segue-se que toda fbf tem infinitos fechos.

Escrevemos A^c[2] para um fecho arbitrário de uma fórmula A.

Abreviação: $\bigvee$ *(o quantificador existencial)*

$\bigvee vA$ é uma abreviação para $\sim\bigwedge v{\sim}A$ (sendo v uma variável, A uma fbf). $\bigvee$ é chamado de *quantificador existencial*, ou *particular*.

Comentários

Nós assumimos que o leitor já tem alguma familiaridade com o simbolismo da lógica de predicados de primeira ordem, então nós faremos apenas dois comentários:

1. Queremos símbolos funcionais para simbolizar as partes em itálico das seguintes sentenças:
    a) *O sucessor de 0* é 1 [simbolizado por um símbolo funcional de 1 lugar]
    b) *A soma de 2 e 2* é 4 [simbolizado por um símbolo funcional de 2 lugares]

[2] NT: 'c' de '*closure*' [fecho]

c) *A soma do produto de 4 e 5 e o produto de 8 e 10* é 100 [que poderia ser simbolizado por um símbolo funcional de quatro lugares: $f(a, b, c, d) = (a.b) + (c.d)$]

2. 'Primeira ordem' está em contraste com 'segunda ordem' e com 'ordem superior'. A descrição a seguir de predicados e linguagens de ordem superior ignora complicações relacionadas aos símbolos funcionais, variáveis funcionais e variáveis proposicionais. Os símbolos predicados de Q são de primeira ordem. Um símbolo de predicado que pode assumir um símbolo de predicado de primeira ordem em algum local como argumento, mas nunca admite um símbolo de predicado de segunda ordem ou superior em qualquer local como argumento, é um símbolo de predicado de segunda ordem; um símbolo de predicado de terceira ordem admitirá símbolos de predicado de segunda ordem em algum local como argumento, mas não admitirá símbolos de predicado de ordem superior em qualquer local como argumento; e assim por diante. Uma linguagem de primeira ordem permite que os quantificadores liguem apenas variáveis individuais; uma linguagem de segunda ordem permite que eles também liguem variáveis de predicados de primeira, mas não de ordem superior; uma linguagem de terceira ordem permite que eles também liguem variáveis de predicados de segunda ordem, mas não superior; e assim por diante. Ou colocando semanticamente (que é o que se pretende):

   Primeira ordem: quantificação apenas sobre indivíduos.

   Segunda ordem: quantificação sobre propriedades de[3] indivíduo e também sobre indivíduos.

[3]ou relações entre.

Terceira ordem: quantificação sobre propriedades de[3] propriedades de[??] indivíduo, bem como sobre propriedades de[3] indivíduo e sobre indivíduos

Q^+

Qualquer linguagem que difira de Q em apenas ter enumeráveis constantes que não estão em Q (desde que seja dada uma enumeração efetiva dessas novas constantes) será dita ser uma linguagem Q^+.

39 Semântica para Q (e Q^+).[1] Definições de *interpretação de Q (Q^+)*, *satisfação* de uma fórmula por enumeráveis sequências de objetos, *satisfabilidade*, *simultaneamente satisfatível*, *verdadeiro para uma interpretação de Q(Q^+)*, *modelo de uma fórmula/conjunto de fórmulas de Q (Q^+)*, *fórmulas logicamente válidas de Q (Q^+)*, *consequência semântica (de fórmulas de Q (Q^+))*, *k-validade*

Nosso principal alvo na parte 3 é uma prova da completude de um sistema válido de lógica de predicados de primeira ordem, i.e., uma prova de que todas as fórmulas logicamente válidas de Q são teoremas do sistema. Para isso, precisamos de uma definição exata de *fórmula logicamente válida de Q*. Não podemos simplesmente assumir para esse propósito a noção de *tautologia* da parte 2, pois há fórmulas logicamente válidas de Q que não são instâncias de esquemas tautológicos (para o significado de 'instância de

[1]Esse tipo de semântica se originou com Tarski. Veja, por exemplo, Tarski (1923–38, paper VIII) (que teve seu início em c. 1931), ou, para uma apresentação mais simples, Tarski e Vaught (1956, pp. 84–5).

esquema tautológico de Q', veja a definição antes de 40.10 abaixo.). Saí a maioria das complicações que se seguem.

Considerações preliminares

Uma *interpretação de* Q (ou Q^+) consiste na especificação de algum conjunto não vazio (chamado de *domínio* da interpretação) e das seguintes atribuições:

1. A cada símbolo proposicional é atribuído um ou outro (mas não ambos) valor verdade, verdade ou falsidade.
2. A cada constante individual é atribuído algum membro do domínio de interpretação.
3. A cada símbolo funcional é atribuído uma função com argumentos e valores no domínio.
4. A cada símbolo de predicado é atribuído alguma propriedade ou relação definida para objetos no domínio.

Aos conectivos são dados os seus significados verofuncionais usuais.[2]

Quantificadores são lidos como se referindo exclusivamente a membros do domínio de interpretação: por exemplo,

$$\bigwedge x'$$

é lido como

$$\text{Para cada coisa } x', \text{ no domínio}$$

e $\bigwedge x' F^{*\prime} x'$ é verdadeiro para uma dada interpretação I sse todo membro *do domínio de I* tem a propriedade que I atribui ao símbolo de predicado $F*$.

[2] Mas com essa extensão: eles podem valer entre fórmulas que, para uma dada interpretação, não são nem verdadeiras nem falsas.

Para lidar com fbfs em que variáveis livres ocorrem, a definição completa de *interpretação de Q* (Q^+) deve ser bem complicada. A noção chave na definição é a de *satisfação* de uma fórmula por uma *sequência enumerável de objetos*. Também, em vez de falar sobre propriedades e relações, falamos sobre *conjuntos de n-uplas ordenadas* de objetos. Tudo isso será explicado.

Por conveniência, recapitularemos o material anterior sobre sequências:

Para nossos propósitos, tomamos uma *n-upla ordenada* como sendo uma *sequência de n termos*. Uma sequência de n termos, $\langle r_1, ..., r_n \rangle$, é um ordenamento de coisas, onde a mesma coisa pode ocorrer mais de uma vez no ordenamento. Por exemplo, $\langle 1, 2, 3, 1 \rangle$ é uma sequência de quatro termos com o número 1 ocorrendo como o primeiro termo e o quarto termo. Uma sequência s é a mesma que uma sequência s' sse s e s' têm exatamente o mesmo número de termos e o primeiro termo de s é o mesmo termo de s', o segundo termo de s é o mesmo que o segundo termo de s', e assim por diante. Então, $\langle 1, 2, 3 \rangle \neq \langle 3, 2, 1 \rangle$, apesar de $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$, e $\langle 1, 2, 1 \rangle \neq \langle 1, 2 \rangle$, apesar de $\{1, 2, 1\} = \{1, 2\}$.

Semântica para Q (Q++): consideração mais completa

Primeiro nós definimos o que significa uma sequência s satisfazer uma fórmula A. Consideramos, por sua vez, todas as formas que A possa ter.

A satisfação de uma fórmula A por uma sequência s (para uma dada interpretação I)

Seja I uma interpretação arbitrária de Q (Q^+), e seja D seu domínio. Seja S uma sequência enumerável arbitrária cujos termos são membros de D. Seja A uma fórmula arbitrária de Q Q^+.

Na definição de *satisfação*, faremos uso da seguinte enumeração fixada de variáveis de Q (Q^+): x' deve ser a primeira variável em nossa numeração; x seguido por k traços deve ser a k-ésima variável em nossa numeração.

1. Suponha que A é um símbolo proposicional. Então, s satisfaz A sse I atribui o valor verdade verdadeiro a A.

Exemplos: Seja I uma interpretação de Q Q^+, cujo domínio é o conjunto de números inteiros positivos. Considere que I atribui a p' o valor de verdade verdadeiro, e a p'' o valor de verdade falso. Pela legividade, escrevemos p' como p e p'' como q. Então, nós temos: I atribui V a p e F a q. Seja s a sequência enumerável com repetições $\langle 5, 10, 15, 5, 10, 15, 5, 10, 15, 5, ... \rangle$. Então:

s satisfaz p

s não satisfaz q

Note que para sabermos se s satisfaz ou não um *símbolo proposicional*, não é necessário saber qualquer coisa sobre s, exceto que ele é uma sequência enumerável de objetos de D.

2. Suponha que A é da forma $simB$. Então, s satisfaz A sse s não satisfaz B.

Exemplos: Sejam I e s como antes. Então:

s satisfaz $q \supset p, q \supset q, q \supset {\sim}p, q \supset {\sim}q$

s satisfaz $p \supset p, {\sim}p \supset p, {\sim}q \supset p$

s satisfaz $p \supset {\sim}q, {\sim}p \supset {\sim}q, {\sim}q \supset {\sim}q$

s não satisfaz $p \supset q, o \supset {\sim}p, {\sim}q \supset q, {\sim}q \supset {\sim}p$

4. Suponha que A é uma fbf atômica fechada sem símbolos funcionais, mas não um símbolo proposicional. Então,

ela é da forma $Fc_1...c_n$, onde F é um predicado de n lugares e $c_1, ..., c_n$ são constantes individuais (não necessariamente distintas). Pela definição, I atribui algum membro de D a cada constante individual: considere que os membros de D atribuídos às constantes $c_1, ..., c_n$ são $d_1, .., d_n$, respectivamente (novamente, $d_1, ..., d_n$ não são necessariamente distintos). Então, s satisfaz A sse a n-upla ordenada $\langle d_1, ..., d_n \rangle$ é um membro do conjunto de n-uplas ordenadas atribuídas por I ao símbolo de predicado F.

Exemplos: Sejam I e s como antes. Considere que I atribui à constante a' o número 1, a a'' o número 2, e assim por diante. Abrevie a' para a_1, a'' para a_2, e assim por diante. Considere que I atribui a $F^{**''}$ a relação de *ser maior que* (¿). Abrevie $F^{**''}$ para G. Então:

> s satisfaz Ga_4a_3 (pois o número atribuído a a_4, a saber, 4, é maior que o número atribuído a a_3, a saber, 3)
>
> s não satisfaz Ga_3a_4
>
> s satisfaz $Ga_{59}a_{58}$
>
> s não satisfaz Ga_5a_{105}

Novamente, não precisamos olhar para s.

5. Suponha que A é uma fbf atômica da forma $Fv_1...v_n$, onde F é um símbolo de predicado de n lugares e $v_1, ..., v_n$ são variáveis individuais (não necessariamente distintas). A cada variável v_i nós atribuímos um termo *em s* como se segue: se v_i é a k-ésima variável em nossa enumeração de todas as variáveis de Q (Q^+), então nós atribuímos a ela o k-ésimo termo na sequência s. Considere que os termos em s atribuídos às variáveis $v_1, ..., v_n$ são $d_1, ..., d_n$, respectivamente ($d_1, ..., d_n$ não são necessariamente distintos). Então, s satisfaz A sse a n-upla ordenada $\langle d_1, ..., d_n \rangle$ é um membro do conjunto de n-uplas ordenadas atribuídas por I ao

símbolo de predicado F.

Exemplos: Dessa vez nós temos que olhar para s. Sejam I, etc. como antes. Abrevie x' para x_1, x'' para x_2, etc. Então:

> s satisfaz Gx_3x_4 (pois o 3º termo em s, a saber, 15, é maior que o 4º em s, a saber, 5)
>
> s não satisfaz Gx_2x_5 (pois o 2º termo em s, a saber, 10, não é maior que o 5º, a saber, 10)
>
> s satisfaz Gx_6x_1
>
> s não satisfaz Gx_1x_1

6. Suponha que A é uma fbf atômica da forma $Ft_1...t_n$, onde F é um símbolo de predicado de n lugares e $t_1, ..., t_n$ são termos sem símbolos funcionais. Cada t_i é uma constante individual ou uma variável individual. Se t_i é uma constante, ela é atribuída a um membro (chame-o de d_1) de D por I. Se t_i é uma variável, então há algum número k tal que t_1 é o k-ésimo termo na sequência s: chame esse objeto de d_i também. [Então, se t_1 for uma constante, então d_i é o membro de D atribuído à constante por I, e se t_i for uma variável, então se t_i é a k-ésima variável em nossa enumeração, então d_i é o k-ésimo termo em s. Todo termo em s é um membro de D]. Então, s satisfaz A sse $\langle d_1, ..., d_n \rangle$ é um membro do conjunto de n-uplas ordenadas atribuído por I ao símbolo de predicado F.

Exemplos: Sejam I, etc. como antes. Então:

> s satisfaz $Ga_{29}x_{10}$ (pois 29 é maior que o 10º termo em s, a saber, 5)
>
> s não satisfaz Ga_9x_{11} (pois 9 não é maior que o 11º termo em s, a saber, 10)

7.Suponha que A é da forma $\bigvee v_kB$, onde v_k é a k-ésima variável em nossa enumeração. Então, s satisfaz A sse *toda* sequência enumerável de membros de D que difere de s em no máximo o k-ésimo termo satisfaz B. I.e., s satisfaz A sse, independentemente do membro de D que você substitua pelo k-ésimo termo em s, a sequência resultado satisfizer B.

Exemplos: Sejam I, etc. como antes. Seja H uma abreviação para $F^{**\prime\prime}$, a qual I atribui a relação de *ser maior ou igual a* ($\geqslant$). [Lembrete: $s = \langle 5, 10, 15, 5, 10, 15, 5, ...\rangle$]. Então:

> s satisfaz $\bigvee x_1 H x_1 x_1$ (pois toda sequência enumerável de inteiros positivos que diferem de s em no máximo o primeiro termo satisfaz $H x_1 x_1$, uma vez que todo inteiro positivo é maior que *ou igual a* si mesmo)
>
> s não satisfaz $\bigvee x_3 H x_3 x_4$ (pois, apesar de s satisfazer $H x_3 x_4$, nem *toda* sequência enumerável de inteiros positivos que diferem de s em no máximo o 3º termo satisfaz: por exemplo, a sequência $\langle 5, 10, 3, 5, 10, 15, 5, 10, 15, 5, ...\rangle$ não satisfaz)
>
> s satisfaz $\bigvee x_{59} H x_{59} a_1$ (pois todo inteiro positivo é maior que ou igual a 1) s não satisfaz $\bigvee x_{59} H x_{59} a_2$ (pois nem todo inteiro positivo é maior que ou igual a 2, uma vez que 1 não é)
>
> s satisfaz $\bigvee x_{59} H x_{59} x_{59}$
>
> s não satisfaz $\bigvee x_{59} H x_{59} x_1$ (nem todo inteiro positivo é maior que ou igual ao primeiro termo em s, a saber, 5)

Os casos 1–7 exaustam as possibilidades para A, exceto pelos casos em que A contém símbolos funcionais. Então, temos que considerar esses casos.

8. Suponha que t é um termo da forma $fc_1...c_n$, onde f é um símbolo funcional de n lugares e $c_1, ..., c_n$ são cons-

tantes individuais. Seja f a função atribuída por I a f. Sejam $d_1, ..., d_n$ os objetos em D atribuídos por I às constantes $c_1, ..., c_n$. Então, o objeto d atribuído por I a t é o objeto em D que é o valor da função f para os argumentos $d_1, ..., d_n$: i.e., $d = f(f_1, ..., d_n)$.

Exemplos: Sejam I, s, etc. como antes. Considere que I atribui a $f^{*\prime}$ a função sucessor: então, '$f^{*\prime}$' significa 'o sucessor de ...'. Então:

> $f^{*\prime}a_1$ é atribuído ao número 2 de D (uma vez que 2 é o sucessor do número atribuído a a_1, a saber 1)
>
> $f^{*\prime}a_2$ é atribuído ao número 3
>
> $f^{*\prime}a_{59}$ é atribuído ao número 60

9. Suponha que t é um termo da forma $fv_1...v_n$, onde $v_1, ..., v_n$ são variáveis individuais. Sejam $d_1, ..., d_n$ os termos [objetos] na sequência s atribuídos a $v_1, ..., v_n$ de acordo com as provisões da cláusula 5 acima. Considere f como antes. Então, $d = f(d_1, ..., d_n)$.

Exemplos: Sejam I, s, etc. como antes: Então:

> $f^{*\prime}f^{*\prime}a_1$ é atribuído ao número 3 (o sucessor do sucessor de 1)
>
> $f^{*\prime}f^{*\prime}{}_{x'}$ é atribuído ao número 7 (o sucessor do sucessor do primeiro termo em s)

11. Suponha que t é um termo da forma $ft_1...t_n$, onde $t_1, ..., t_n$ são termos arbitrários (incluindo termos com símbolos funcionais). Sejam $d_1, ..., d_n$ os objetos em D atribuídos a $t_1, ..., t_n$ de acordo com as cláusulas 8,9 e 10 acima. Considere f como antes. Então, $d = f(d_1, .., d_n)$.

Exemplo: Considere que $f**'$ seja atribuído à função soma: então, '$f**'xy$' significa 'a soma de x e y'. Então (s, etc. sendo como antes):

$f**'f^{*\prime}x_2f^{*\prime}f^{*\prime}a_1$ é atribuído ao número 14 (a soma do número atribuído a $f^{*\prime}x_2$, a saber, 11, e o número atribuído a $f^{*\prime}f^{*\prime}a_1$, a saber, 3)

Podemos colocar essa definição de satisfação de maneira mais compacta como se segue. Seja I uma interpretação com domínio D. Seja t um termo arbitrário, s uma sequência enumerável arbitrária de membros de D. Nós primeiros definimos uma função, *, com termos de Q (Q^+) como membros, e com valores em D, pela seguinte regra:

Se t é uma constante, então $t * s$ é o membro de D atribuído por I à constante t.

Se t é a k-ésima variável em nossa enumeração, então $t * s$ é o k-ésimo termo em s.

Se t é da forma $ft_1...t_n$, onde f é um símbolo funcional de n lugares e $t_1, ..., t_n$ são termos, e f é a função atribuída por I a f, então $t * s = f(t_1 * s), ..., t_n * s$.

Agora, nós definimos *satisfação*:

1. Se A é um símbolo proposicional, então s satisfaz A sse I atribui o valor verdade verdadeiro a A.

2. Se A é uma fbf atômica e $t_1, ..., t_n$ são termos, então s satisfaz A sse $\langle t_1{*}s, ..., t_n{*}s\rangle$ é um membro do conjunto de n-uplas ordenadas atribuído por I a F.

3. Se A é da forma $\sim B$, então s satisfaz S sse s não satisfaz B

4. Se A é da forma $(B \supset C)$, então s satisfaz A sse s não satisfaz B ou s satisfaz C.

5. Se A é da forma $\bigwedge v_kB$, onde v_k é a k-ésima variável em nossa enumeração, então s satisfaz A sse toda sequência numerável de membros de D que difere de s em no máximo o k-ésimo termo satisfaz B.

[No que se segue, para obter a definição correspondente para Q^+, simplesmente substitua 'Q' por 'Q^+' ao longo do texto.]

Definição. Uma fórmula A de Q é *satisfatível* sse há alguma interpretação I de Q na qual A é satisfeita [i.e., há uma interpretação I tal que A é satisfeita por pelo menos uma sequência enumerável de membros do domínio de I].

Exemplos [pela simplicidade, escrevemos F, x, y, em vez de $F^{*\prime}$, x', x'']:

1. $Fx \supset {\sim}Fy$ é satisfatível.
2. $Fx \supset {\sim}Fx$ é satisfatível.
3. ${\sim}(Fx \supset Fx)$ não é satisfatível.

Definição. Um conjunto Γ de fórmulas de Q é *simultaneamente satisfatível* sse, para alguma interpretação I de Q, alguma sequência s satisfaz cada membro de Γ.

Exemplos:

1. $\{Fx, {\sim}Fy\}$ é simultaneamente satisfatível.
2. $\{Fx, {\sim}Fx\}$ não é simultaneamente satisfatível.

Definição. Uma fbf A de Q é *verdadeira para uma dada interpretação I de Q* sse *toda* sequência enumerável de membros do domínio de I satisfaz A.

Definição. Uma fbf de Q é *falsa para uma dada interpretação I de Q* sse *nenhuma* sequência enumerável de membros do domínio de I satisfaz A.

Uma fórmula em que algumas variáveis têm ocorrência livre *podem* ser nem verdadeiras nem falsas para uma dada interpretação. Por exemplo, $Fx \supset {\sim}Fy$ não é verdadeira nem falsa para uma interpretação I em que D é o conjunto de números naturais e 'F' significa 'é par'. Cf. 40.6 e 40.7

nas páginas 205 e 205.

PS: *'satisfazer' não significa 'tornar verdadeiro'*. Uma sentença s pode *satisfazer* uma fórmula A, para uma interpretação I, sem A ser *verdadeira* em I. Por exemplo: Sejam I, s, G, x_1, x_2 como nos exemplos nas páginas 192–194 acima. Então, s satisfaz Gx_2x_1 (pois 10 é maior que 5), mas Gx_2x_1 *não é verdadeira* para I (pois nem *toda* sequência de membros do domínio de I satisfaz Gx_2x_1): a sequência $\langle 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...\rangle$, por exemplo, não a satisfaz).

Definição. Uma interpretação I de Q é um *modelo de uma fórmula A de Q* sse A é verdadeira para I.

Definição. Uma interpretação I de Q é um *modelo de um conjunto* Γ *de fórmulas de Q* sse toda fórmula em Γ é verdadeira para I.

Definição. Um *sistema formal tem um modelo* sse o conjunto de todos os seus teoremas tem um modelo.

Definição. Uma fórmula A de Q é uma *fórmula logicamente válida de Q* [$\models_Q A$] sse A é verdadeira para *toda* interpretação de Q.

[Lembre-se de que toda interpretação de Q deve, por definição, ter um domínio não vazio.]

Definição. Uma fórmula B de Q é uma *consequência semântica de uma fórmula A de Q* [$A \models_Q B$] sse para toda interpretação de Q, toda sequência que satisfaz A também satisfaz B: i.e., não há uma sequência que satisfaça A e não satisfaça também B.

Se nenhuma sequência satisfaz A, então qualquer fbf de Q que você quiser tomar será uma consequência de A.

Definição. Uma fórmula A de Q é uma *consequência semântica de um conjunto* Γ *de fórmulas de Q* [$\Gamma \models_Q A$] sse para toda interpretação de Q, toda sequência que satisfaz cada membro de Γ também satisfaz A: i.e., não há uma sequência que satisfaz cada membro de Γ e não satisfaça também A.

Nota. Vale a pena comparar essas definições com as definições correspondentes para P: por exemplo, 'Uma fórmula B de P é uma consequência semântica de uma fórmula A de P sse não há uma interpretação de P em que A é verdadeira e B é falsa'. O fato de que não há uma interpretção de Q para a qual A é verdadeira e B é falsa *não é* uma condição suficiente para uma fórmula arbitrária B de Q ser uma consequência semântica de uma fórmula A de Q. O requerimento para ser uma consequência semântica para fórmulas de Q é mais forte. Por exemplo, não há intepretação de Q para a qual Fx é verdadeira e $\bigwedge xFx$ é falsa, mas $\bigwedge xFx$ não é uma consequência semântica de Fx, porque não é verdade que para toda interpretação de Q, toda sequência que satisfaz Fx também satisfaz $\bigwedge xFx$.

Definição. Uma fórmula de Q é *k-válida* sse ela é verdadeira para toda interpretação de Q que tem o domínio com exatamente k membros.

O conjunto vazio, $\emptyset$

Por convenção, toda sequência enumerável satisfaz o conjunto vazio, $\emptyset$. Então:

39.1 $\emptyset \models_Q A$ sse $\models_Q A$ [Similarmente para Q^+]

Cf. 19.1

Nota final a §39:

O básico para §39:

I. A diferença entre

(1) *s satisfaz A*,

(2) *A é verdadeiro para I*, e

(3) *A é logicamente válido.*

II. A noção de *consequência semântica para Q*

O leitor é avisado a não continuar até que ele esteja razoavelmente claro sobre I e II.

Exercícios.

1. Seja I_1 uma interpretação de Q cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos $\{1, 2, 3, ...\}$. I_1 atrivui ao símbolo de predicado G [i.e., $F^{**\prime\prime}$] a relação $\leqslant$. Seja s a sequência enumerável $\langle 2, 5, 8, 1, 7, 3, 3, 3, ..., 3, ...\rangle$. Nós abreviamos x', x'', x''', ..., com x_1, x_2, x_3, ..., e $F^{*\prime}$ com F.

(i) s satisfaz a fórmula Gx_2x_3 (para a interpretação I_1)?

(ii) s satisfaz a fórmula Gx_3x_4 (para a interpretação I_1)?

(iii) Gx_2x_3 é verdadeiro para I_1?

(iv) Gx_2x_2 é verdadeiro para I_1?

(v) I_i é um modelo do conjunto de fórmulas $\{Gx_{49}x_{109}, \bigwedge x_2 \bigwedge x_3 Gx_2x_3\}$?

(vi) I_1 é um modelo do conjunto de fórmulas $\{Gx_5x_5, \bigwedge x_{72} Gx_{72}x_{72}\}$?

(vii) Gx_5x_5 é logicamente válida?

(viii) Gx_2x_1 é satisfatível?

(ix) Fx_{13} é uma consequência semântica de $\bigwedge x_2 Fx_2$?

(x) Fx_{13} é uma consequência semântica de $\sim \bigwedge x_2 Fx_2$?

(xi) Fx_{13} é uma consequência semântica de $\sim(\bigwedge x_2 Fx_2 \supset \bigwedge x_2 Fx_2)$?

2. Seja I_2 uma interpretação de Q cujo domínio é o conjunto dos números pares $\{2, 3, 4, 6, 8, ...\}$. I_2 atribui ao símbolo de predicado G a relação $\leqslant$.

(i) Especifique uma sequência enumerável de objetos que satisfaz a fórmula G_4x_5 para a interpretação I_2.

(ii) Especifique uma sequência enumerável de objetos que não satisfaz a fórmula Gx_4x_5 para a interpretação I_2.

(iii) Mostre uma fórmula que é verdadeira para I_2.

(iv) Mostre uma fórmula que não é verdadeira para I_2.

(v) Mostre um conjunto de fórmulas para o qual I_2 é um modelo.

(vi) Mostre um conjunto de fórmulas para o qual I_2 não é um modelo.

(vii) Mostre uma fórmula que é logicamente válida.

(viii) Mostre uma fórmula que não é logicamente válida.

(ix) Mostre uma fórmla que é satisfatível.

(x) Mostre uma fórmula que não é satisfatível.

Respostas.

1.

(i) Sim.

(ii) Não.

(iii) Não. Uma fórmula é *verdadeira* para I_1 sse ela é satisfeita por *toda* sequência enumerável de inteiros positivos. A sequência $\langle 2, 8, 2, 2, 2, ... \rangle$ (por exemplo) não satisfaz Gx_2x_3.

(iv) Sim: mas não meramente porque $5 \leqslant 5$, mas porque, para *cada* inteiro positivo n, $n \leqslant n$.

(v) Não. *Toda* sequência enumerável de inteiros positivos deve satisfazer ambas as fórmulas simultaneamente se I_1 for um modelo desse conjunto. Uma sequência (dentre várias) que não satisfaz $Gx_{49}x_{107}$ é a sequência cujo 49º termo é 2 e cujo 107º termo é 1. Então, I_1 não é um modelo desse conjunto.

(vi) Sim.

(vii) Não. Isso é verdade para I_1, mas não para *toda* interpretação de Q; por exemplo, isso não é verdadeiro para uma interpretação em que a G é atribuída a relação $>$.

(viii) Sim.

(ix) Sim.

(x) Não.

(xi) Sim. Nenhuma sequência satisfaz $\sim(\bigwedge x_2 F x_2 \supset \bigwedge x_2 F x_2)$.

2.

(i) Por exemplo, a sequência $\langle 2, 4, 6, 8, 10, ... \rangle$ ou a sequência $\langle 2, 4, 6, 8, 8, 10, 12, ... \rangle$, ou a sequência $\langle 8, 6, 4, 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2, 4, ... \rangle$.

(ii) Por exemplo, a sequência $\langle 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2, 4, 6, ... \rangle$.

(iii) Por exemplo, $\bigwedge x_5 G x_5 x_5$.

(iv) Por exemplo, $G x_1 x_2$.

(v) Por exemplo, $\{G x_{17} x_{17}, \bigwedge x_9 G_9 x_9 x\}$ ou $\{G x_{17} x_{17, \bigwedge x_9 G x_9 x_9, p' \supset p'}\}$.

(vi) Por exemplo, $\{G x_{17} x_{17}, \bigwedge x_9 G x_9 x_9, G x_1 x_2\}$ ou $\{G x_{17} x_{17}, \bigwedge x_9 G x_9 x_9,$ $p')\}$.

(vii) Por exemplo, $F x_1 \supset F x_1$ ou $F x_1 \supset \bigwedge x_2 F x_1$ [cf. 40.13 abaixo].

(viii) Por exemplo, $F x_1 \supset \bigwedge x_1 F x_1$ [por exemplo, tome uma interpretação I_3 com domínio $\{1, 2\}$ que atribua a propriedade de *ser um número par* a F. Então, a sequência $\langle 2, 2, 2, 2, 2, ... \rangle$ satisfaz $F x_1$, mas não satisfaz $\bigwedge x_1 F x_1$].

(ix) Por exemplo, $F x_1 \supset F x_2$.

(x) Por exemplo, $\supset (F x_1 \supset F x_1)$.

40 Alguns meta-teoremas modelo-teóricos para Q (e Q^+)

[Essa seção reune vários resultados aos quais recorreremos mais tarde. Ela pode ser ignorada em uma primeira leitura. Alternativamente, as provas dos meta-teoremas podem ser ignoradas em uma primeira leitura.]

Nós desenvolvemos apenas o suficiente da teoria dos modelos de Q (Q^+) que precisaremos para provas posteriores.

As seguintes são consequências mais ou menos imediatas das definições em §39:

40.1 *Se A é logicamente válido, então* $\sim A$ não é satisfatível.

40.2 *Modus Ponens para $\supset$ preserva satisfação-por-s [i.e., se uma sequência s satisfaz A e também $A \supset B$, então ela também satisfaz B]*

40.3 *Modus Ponens para $\supset$ preserva verdade-para-I [i.e., se A e $A \supset B$ são ambas verdadeiras para uma interpretação I, então B é também verdadeira para I]*

40.4 *Modus Ponens para $\supset$ preserva validade lógica [i.e., se A e $A \supset B$ são ambas logicamente válidas, então B também é. Ou: Se $\models_Q A \models_Q B$]*

[A refência a Modus Ponens, e, portanto, à teoria da prova, nos enunciados de 40.2–40.4, não é essencial. Ela foi feita simplesmente para indicar um uso posterior para aqueles meta-teoremas.]

40.5 *A é falso para uma dada interpretação I sse $\sim A$ é verdadeira para I; e A é verdadeira para I sse $\sim A$ for falsa* *para I*

40.6 *A é verdadeira para I sse $\bigwedge vA$ for verdadeiro para I para qualquer variável arbitrária v*[1]

40.7 *A é verdadeiro para I sse qualquer fecho arbitrário de A é verdadeiro para I*

40.8 *A é logicamente válido sse A^e é logicamente válido [A^e é um fecho arbitrário de A]*

Menos imediatos são os seguintes:

40.9 *$\bigwedge vA$ é satisfatível para uma interpretação I sse A é satisfatível para a mesma interpretação.*

Prova. Seja I uma interpretação com domínio D, e s e s' sequências enumeráveis de membros de D.

1. Seja s qualquer sequência que satisfaz $\bigwedge vA$, i.e., $\sim\bigwedge v{\sim}A$. Então, s não satisfaz $\bigwedge v{\sim}A$. Então, nem toda sequência enumerável de membros de D satisfaz $\sim A$. Seja s' uma sequência que não satisfaz $\sim A$. Então, s' satisfaz A. Então, se $\bigwedge vA$ é satisfatível para I, então A é satisfatível para I.

2. Suponha que nenhuma sequência enumerável de membros de D satisfaz $\bigwedge vA$, i.e. $\sim\bigwedge v{\sim}A$. Então, toda sequência de membros de D satisfaz $\bigwedge v{\sim}A$. Então, toda sequência satisfaz $\sim A$ para I. Então, nenhuma sequência satisfaz A para I. Então, se alguma sequência satisfaz A para I, então alguma sequência satisfaz $\bigwedge vA$ para I.

Definição. Se A é uma tautologia de P cujos únicos símbolos proposicionais são $P_1, ..., P_n$, então, o resultado de substituir as fbfs $P_1, ..., P_n$ por $Q_1, ..., Q_n$ de Q, respectivamente, em A é uma *instância de um esquema tautológico de*

[1] Se A é falso para I, então $\bigwedge vA$ é falso para I. Mas o inverso não é verdadeiro; se A contém uma variável livre, $\bigwedge vA$ pode ser falso para I enquanto A não é nem verdadeiro nem falso para I.

Q

Similarmente para Q^+.

40.10 *Toda instância de um esquema tautológico de Q (Q^+) é logicamente válido*

Esboço de prova. Seja X um esquema tautológico arbitrário de Q. Seja s uma sequência enumerável arbitrária de membros do domínio de uma interpretação arbitrária de Q (Q^+). É uma consequência da definição de satisfação que, para qualquer fbf A de Q (Q^+), ou s satisfaz A ou s não satisfaz A. Nós fazemos uma tabela para X que é como a tabela verdade, exceto pelo fato de que em vez de 'V' e 'F', nós escrevemos 'Sim' (significando 's satisfaz') e 'Não' (significando 's não satisfaz'). Então, pelas cláusulas 3 e 4 da definição curta de *satisfação* na p. 198, X obterá 'Sim' para toda atribuição de 'Sim"s e 'Não"s a suas letras esquemáticas. Mas s era uma sequência arbitrária. Então, toda sequência satisfaz qualquer instância de X.

Exemplo: Seja X o esquema $A \supset (\sim B \supset \sim(A \supset B))$

A	B	A	$\supset$	$(\sim$	B	$\supset$	$\sim$	$(A$	$\supset$	$B))$
Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Sim	Não	Sim	Sim	Sim
Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Sim	Não	Não	Sim	Sim
Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Não	Não
Não	Não	Não	Sim	Sim	Não	Não	Não	Não	Sim	Não
			*							

40.11 $\bigwedge v_k(A \supset B) \supset (\bigwedge v_k A \supset \bigwedge v_k B)$ *é logicamente válido, para fbfs arbitrárias A e B e uma variável arbitrária v_k*

Prova. Suponha que não. Então, para alguma interpretação, há uma sequência s que satisfaz [uma instância de] $\bigwedge v_k(A \supset B)$ e [a instância correspondente de] $\bigwedge v_k A$, mas não satisfaz [a instância correspondente de] $\bigwedge v_k B$. Agora, s satisfaz $\bigwedge v_k(A \supset B)$ e $\bigwedge v_k A$ sse toda sequência que difere de s em no máximo o k-ésimo termo satisfaz $A \supset B$ e A. Mas, por 40.2, cada tal sequência também satisfaz B, e, portanto, s satisfaz $\bigwedge v_k B$. Mas isso contradiz nossa suposição inicial.

Notação:

Seja I uma interpretação, D seu domínio, s uma sequência enumerável de membros de D.

$s(d/k)$ é a sequência que resulta da substituição do k-ésimo termo na sequência s pelo objeto d.

$t * s$ é o membro de D atribuído por I ao termo t para a sequência s, como em §39: i.e.:

Se t é uma constante individual c, então $t{*}s$ é o membro de D atribuído por I a c.

Se t é v_k, então $t * s$ é o k-ésimo termo em s.

Se t é um símbolo funcional de n lugares f seguido por n termos, $t_1, ..., t_n$, e f é a função atribuída por I a f, então $t * s = [ft_1...t_n] * s = f(t_1 * s, ..., t_n * s)$.

40.12 *Seja I uma interpretação com domínio D. Seja A uma fbf arbitrária. Sejam s e s' duas sequências tais que, para cada variável livre v em A, se v é a k-ésima variável na enumeração fixada de variáveis, então s e s' têm o mesmo membro de D como o seu k-ésimo termo. Então, s satisfaz A sse s' satisfaz A*

Prova.[2] Por indução no número, n, de conectivos e quantificadores em A.

Base: $n = 0$

[2]Pode ser pulada em uma primeira leitura.

Então, A é atômica. 2 casos:

1. A é um símbolo proposicional

2. A é da forma $Ft_1...t_m$, onde F é um símbolo de predicado de m lugares e $t_1, ..., t_m$ são termos

Caso 1. Óbvio

Caso 2. Considere que I atribui a relação R a F (se F é um símbolo de predicado de 1 lugar, então R é uma propriedade. Mas, pela brevidade, falamos de R como uma relação sempre). s satisfaz A sse $t_1 * s, ..., t_m * s$, nessa ordem, está em na relação R, e s' satisfaz A sse $t_1 * s', ..., t_m * s'$ está na relação R. PRovaremos que, para cada t_i, $t_i * s = t_i * s'$.

(i) Se t_i é uma constante, então $t_i * s = t_i * s'$.

(ii) Se t_i é uma variável v_k, então, uma vez que A é atômica, t_i é livre, e, portanto, pela hipótese do teorema, o k-ésimo termo de $s =$ o k-ésimo termo de s'; i.e., $t_i * s = t_i * s'$.

(iii) Suponha que t_j é $ft_{j1}...t_{jr}$ (i.e., um símbolo funcional de r lugares seguido por r termos). Se cada $t_{j1}, ..., t_j$ é uma constante ou uma variável livre, então $t_{ji} * s = t_{ji} * s'$, por (i) e (ii) acima. Se qualquer símbolos funcionais ocorrerem em t_{ji}, então, uma vez que as funções atribuídas por I a quaisquer símbolos funcionais são as mesmas para s e s', seus valores para os mesmos argumentos serão o mesmo. Isso vale também para a função atribuída por I a f. Então, nesse caso, $t_i * s = t_i * s'$ também.

Passo indutivo.

Assuma que o teorema vale para todo A com menos de q conectivos e quantificadores. Para provar que ele vale para todo A com exatamente q conectivos e quantificadores. 3 casos:

1. A é $\sim B$

2. A é $B \supset C$

3. A é $\bigwedge v_p B$ [v_p é uma variável. Não usamos 'k' como subscrito aqui porque na prova do caso 3 abaixo k e p podem ser distintos.]

Caso 1. A é $\sim B$. Pela hipótese indutiva, s satisfaz B sse s' satisfaz. Então, s não satisfaz A sse s' não satisfaz A.

Caso 2. A é $B \supset C$. Similarmente.

Caso 3. A é $\bigwedge v_p B$. Suponha que s satisfaz A. Então, $s(d_i/p)$ satisfaz B para todo d_i no domínio D. Para cada variável livre v_k em A, s e s' tem seu k-ésimo termo em comum, *ex hypothesi*. Então, para cada d_i e cada variável livre v_k em A, $s(d_i/p)$ e $s'(d_i/p)$ têm seu k-ésimo termo em comum. (Intuitivamente: Se o p-ésimo termo é o k-ésimo termo para alguma variável livre k_i em A, então o p-ésimo termo é o mesmo em $s(d_i/p)$ e $s'(d_i/p)$, a saber, d_i. Se ele não for o k-ésimo termo para uma variável livre v_k, então $s(d_i/p)$ e $s'(d_i/p)$ ainda têm seu k-ésimo termo em comum, uma vez que s e s' têm). Então, pela hipótese indutiva, $s'(d_i/p)$ satisfaz B para todo d_i em D. Então, s' satisfaz A. Por um argumento similar, se s' satisfaz A, então s também o satisfaz.

40.13 *Se v_k não ocorre livre em A, então $A \supset \bigwedge v_k A$ é logicamente válido (A é uma fbf arbitrária)*

Prova. Suponha que s satisfaz A. Seja s' qualquer sequência que difere de s em no máximo o k-ésimo termo. Então, a hipótese de 40.12 se aplica a s e s', e então, s' satisfaz A. Mas s' era uma sequência *arbitrária* que difere de s em no máximo o k-ésimo termo. Então, toda sequênci que difere de s em no máximo o k-ésimo termo satisfaz A. Então, s satisfaz $\bigwedge v_k A$.

40.14[3] *Sejam t e u termos. Seja t' o resultado de substituir cada ocorrência de v_k em t por u. Seja s uma sequência, e seja $u * s = d$: i.e., considere que o membro de D atribuído por I a u para a sequência s é d. Considere que s' é $s(d/k)$: i.e., s' é a sequência que resulta da substituição de d pelo k-ésimo termo de s. Então, $t' * s = t * s'$: i.e., o membro de D atribuído por I a t' para a sequência s é o mesmo que o membro de D atribuído por I a t para a sequência s'.*

Exemplo: Considere que t é v_k e u é v_j. Então, t' é v_j. Então, d é o j-ésimo termo em s; e s' difere de s no máximo em ter d como seu k-ésimo termo. Então, o teorema diz que o membro de D atribuído por I a t' para s (nesse caso, o j-ésimo termo em s, i.e., d) é o mesmo que o membro de D atribuído por I a t para s' (nesse caso, o k-ésimo termo em s', i.e., d).

Prova. A prova é por indução no tamanho de t, onde o tamanho de t é dado pelo número de ocorrências de símbolos individuais (i.e., constantes ou variáveis individuais) e símbolos funcionais em t.

Base: $n = 1$

Então, t é uma constante individual ou uma variável individual. 3 casos:

1. t é uma constante
2. t é uma variável v_j e $j \neq k$
3. t é uma variável v_j e $j = k$

É uma tarefa mecânica verificar que o teorema vale para cada um desses casos.

Passo indutivo

Assuma que o teorema vale para todos os termos de

[3] Pode ser pulado em uma primeira leitura.

tamanho menos que q. Para provar que ele vale para todos os termos de tamanho q.

Com vistas ao caso base, precisamos apenas considerar casos onde $n > 1$. Então, t deve ser da forma $ft_1...t_m$, onde f é um símbolo funcional de m lugares e $t_1, ..., t_m$ são termos de tamanho menor que q (então, a hipótese indutiva pode ser aplicada a eles). Considere que a função atribuída por I a f seja $f.t'$ é $ft'_1...t'_m$. Então, $t' * s = [ft'_1...t'_m] * s = f(t'_1 * s, ..., t'_m * s) =$ [pela hipótese indutiva] $f(t_1 * s', ..., t_m * s' = [ft_1...t_m] * s' = t * s')$.

Lembretes (§38)

Se A é uma fbf, t um termo, v uma variável, então At/v é a fbf obtida ao substituir todas as ocorrências livres de v em A por t.

t é livre para v em A se (1) se t é uma variável, então t ocorre livre em At/v sempre que v ocorre livre em A, e (2) se t é um termo em que quaisquer variáveis ocorrem, então onde quer que ocorrências livres de v em A sejam substituídas por t, todas as ocorrências de variáveis em t permanecem livres. Se t é um termo fechado, então t é livre para v em qualquer A.

40.15[4] *Seja A uma fbf, v_k uma variável, t um termo que é livre para v_k em A. Seja s uma sequência, e seja s' a sequência que resulta da substituição do k-ésimo termo de s por $t * s$ (i.e., o membro de D atribuído por I ao termo t para a sequência s): i.e., $s' = s(t * s/k)$. Então, s satisfaz At/v_k sse s' satisfaz A*

Prova. Por indução no número de quantificadores e conectivos em A.

Base: $n = 0$

[4]Pode ser pulado em uma primeira leitura.

Então A é um símbolo proposicional ou da forma $Ft_1...t_m$. Claramente, o teorema vale se A é um símbolo proposicional. Seja t'_i o resultado de substituir cada ocorrência de v_k em t_i pot t. Então, At/v_k é $Ft'_1...t'_m$. Seja R a relação atribuída a F por I. Então, s satisfaz At/v_k sse $t'_1 * s', ..., t'_m * s$ está na relação R. s' satisfaz A sse $t_1 * s', ..., t_m * s'$ está na relação R. Por 40.14, $t'_i * s = t_i * s'$ para $1 \leqslant i \leqslant m$. Então, s satisfaz At/v_k sse s' satisfaz A.

Passo indutivo

Assuma que o teorema vale para todas as fbfs com mens de q conectivos e quantificadores. Para provar que ele vale para todas as fbfs com q conectivos e quantificadores. 3 casos:

1. A é $\sim B$
2. A é $B \supset C$
3. A é $\bigwedge v_i B$

Caso 1. A é $\sim B$. Então, At/v_k é $\sim Bt/v_k$. s satisfaz $\sim Bt/v_k$ sse ele não satisfaz Bt/v_k t é livre para v_k em A, então ela é livre para v_k em B também. Então, pela hipótese indutiva, s não satisfaz Bt/v_k sse s' não satisfaz B. Mas s' não satisfaz B sse s' satisfaz A. Então, s satisfaz $At/v - k$ sse s' satisfaz A.

Caso 2. A é $B \supset C$. Óbvio

Caso 3. A é $\bigwedge v_j B$. Então, At/v_k é $\bigwedge v_j Bt/v_k$, e t é livre para v_k é B.

(i) Suponha que v_k é livre em A e $j \neq k$. s satisfaz At/v_k sse $s(d/j)$ satisfaz Bt/v_k para todo membro d de D. Pela hipótese indutiva, $s(d/j)$ satisfaz Bt/v_k sse $s(d/j)'$ satisfaz B. Uma vez que t não é livre para v_k em B e A é $\bigwedge v_k B$, v_j não ocorre em t. Então, $t * s$ não depende do que o j-ésimo termo em s é, para qualquer s. Então, para qualquer

d, $s(d/j)'$, que é a sequência que resulta da substituição do k-ésimo termo em $s(d/j)$ por $t * s$, é $s'(d/j)$, que é a sequência que resulta de primeiro substituir o k-ésimo termo em s por $t{*}s$ e então substituir o j-ésimo termo na sequência resultante por d. s' satisfaz A sse $s'(d/j)$ satisfaz B para todo d. Então, nós temos:

s satisfaz At/v_k sse $s(d/j)$ satisfaz Bt/v_k para todo d.

$s(d/j)$ satisfaz Bt/v_k sse $s(d/j)'$ satisfaz B.

Para qualquer d, $s(d/j)' = s'(d/j)$.

s' satisfaz A sse $s'(d/j)$ satisfaz B para todo d.

Então, s satisfaz At/v_k sse s' satisfaz A.

(ii) Suponha que v_k não é livre em A. Então, At/v_k é A. Uma vez que s' difere de s em no máximo o k-ésimo termo, e v_k não é uma variável livre de A, podemos aplicar 40.12 e obter:

s satisfaz A sse s' satisfaz A.

i.e., s satisfaz At/v_k sse s' satisfaz A.

(iii) Suponha que $j = k$. Então, v_k não é livre em A. Então, vale como para (ii) acima.

40.16 $\bigwedge v_k A \supset At/v_k$ *é logicamente válido sse t é livre para v_k em A*

Prova. Suponha que s satisfaz $\bigwedge v_k A$. Então, $s(d/k)$ satisfaz A para todo d. Então, $s(t * s/k)$ satisfaz A. Então, por 40.15, s satisfaz At/v_k.

40.17 *Se A é uma fbf fechada, então exatamente um de A e $\sim A$ é verdadeiro para I, e exatamente um é falso para I*

Prova. Uma vez que A não tem variáveis livres, a hipótese de 40.12 é satisfeita por *quaisquer* duas sequências. Então, por 40.12, uma sequência satisfaz A sse *toda* sequência satisfaz. Então, toda sequência satisfaz A ou nenhuma satisfaz. Então, A é verdadeiro para I ou A é falso para I. Se A é verdadeiro para I, então nenhuma sequência satisfaz $\sim A$, i.e., $\sim A$ é falso para I. Se A é falso para I, então $\sim A$ é verdadeiro para I.

40.18 *Se A e B são fbfs fechadas, então $A \supset B$ é verdadeiro para I sse A é falso para I ou B é verdadeiro para I*

Prova

(a) Suponha $A \supset B$ é verdadeiro para I. Então, uma sequência arbitrária s satisfaz $A \supset B$. Então, s não satisfaz A ou s não satisfaz B. Se s não satisfaz A, então A não é verdadeiro para I, e então, por 40.17, A é falso para I. Se s satisfaz B, então B não é falso para I, e então, por 40.17, B é verdadeiro para I.

(b) Suponha que A é falso para I ou B é verdadeiro para I. (i) Se A é falso para I, então nenhuma sequência satisfaz A e, então, toda sequência satisfaz $A \supset B$. (ii) Se B é verdadeiro para I, então toda sequência satisfaz B, e então toda sequência satisfaz $A \supset B$. Então, em qualquer um dos casos, $A \supset B$ é verdadeiro para I.

40.19 *Se A e B são fbfs fechadas, então $A \supset B$ é falsa para I sse A é verdadeiro para I e B é falso para I*

Prova. Se A e B são fbfs fechadas, então $A \supset B$ também é. Por 40.17, $A \supset B$ é falsa para I sse $A \supset B$ não é verdadeiro para I, e por 40.18, $A \supset B$ não é verdadeiro para I sse A não é falso para I e B não é verdadeiro para I, i.e. (uma vez que A e B são fbfs fechadas), sse A é verdadeiro para I e B é falso para I.

40.20[5] *Se uma fórmula A com exatamente uma variável*

[5] Usado na prova de completude, mas pode ser pulado em uma primeira

livre v_k é verdadeira para I, então cada fórmula que resulta da substituição das ocorrências livres da variável por um termo fechado é verdadeira para I

Prova. Suponha que A é verdadeiro para I. Então, por 40.6, seu fecho é $\bigwedge v_k A$ é verdadeiro para I. Por 40.16, $\bigwedge v_k A \supset At/v_k$ é logicamente válido se t é um termo fechado, então se $\bigwedge v_k A$ é verdadeiro, então At/v_k é verdadeiro sse t é um termo fechado. Então, At/v_k é verdadeiro para I para todo termo fechado t.

40.21[6] *Há um método efetivo para dizer, dada uma fórmula arbitrária A de Q e um inteiro positivo arbitrário k, se A é k-válida ou não*

Prova informal. Para um inteiro particuar k, há infinitas interpretações diferentes de Q que tem domínios com exatamente k membros. Mas, para determinar a k-validade de uma fórmula, não é necessário considerar cada uma das infinitas interpretações possíveis de (digamos) um símbolo de predicado. Há apenas infinitas possibilidades *relevantemente* diferentes que devem ser consideradas (consideramos classes de interpretações em vez de interpretações particulares). Para ilustrar:

Ilustração 1

Considere a fórmula $F^{*\prime}x'''$. Seja $k = 2$. Seja I uma interpretação com um domínio D de exatamente dois membros, a saber, d_1 e d_2. Então, por 40.12, para dizer se uma sequência enumerável arbitrária s de membros de D satisfaz $F^{*\prime}x'''$ ou não, precisamos apenas considerar se o terceiro termo da sequência s possui ou não a propriedade atribuída por I ao símbolo de predicado $F^{*\prime}$. Os outros termos na

leitura.

[6] Usado na prova da decidibilidade de um sistema de lógica de predicados monádicos, §50.

sequência não importam. Então, uma vez que D tem apenas dois membros, d_1 e d_2, há apenas dois casos diferentes relevantes que precisamos considerar, a saber, o caso em que s tem d_1 como seu terceiro termo e o caso em que s tem d_2 como seu terceiro termo. Seja s_1 uma sequência enumerável arbitrária de membros de D cujo terceiro membro é d_1, e seja s_2 uma sequência enumerável arbitrária cujo terceiro termo é d_2. Abrevie $F^{*\prime}x'''$ para Fx_3. Então, obtemos as seguinte quatro possibilidades:

$$\text{Possibilidades}\begin{cases} 1 & s_1 \text{ satisfaz } Fx_3 \\ & s_2 \text{ satisfaz } Fx_3 \\ 2 & s_1 \text{ não satisfaz } Fx_3 \\ & s_2 \text{ satisfaz } Fx_3 \\ 3 & s_1 \text{ satisfaz } Fx_3 \\ & s_2 \text{ não satisfaz } Fx_3 \\ 4 & s_1 \text{ não satisfaz } Fx_3 \\ & s_2 \text{ não satisfaz } Fx_3 \end{cases}$$

Ilustração 2

Considere a fórmula $F^{**\prime}x'x''$. Seja $k = 2$ novamente.

Dessa vez, há quatro tipos diferentes relevantes de sequência.

Seja s_1 uma sequência arbitrária começando com $\langle d_1, d_1, ...\rangle$.

Seja s_2 uma sequência arbitrária começando com $\langle d_1, d_2, ...\rangle$.

Seja s_3 uma sequência arbitrária começando com $\langle d_2, d_2, ...\rangle$.

Seja s_4 uma sequência arbitrária começando com $\langle d_2, d_1, ...\rangle$.

Abrevie $F^{**\prime}x'x''$ para A. Então, temos 16 possibilidades diferentes relevantes:

	Possibilidades						
	1	2	3	4	...	15	16
s_1 satisfaz A?	Sim	Não	Sim	Não	....	Sim	Não
s_2 satisfaz A?	Sim	Sim	Não	Não	....	Não	Não
s_3 satisfaz A?	Sim	Sim	Sim	Sim	....	Não	Não
s_4 satisfaz A?	Sim	Sim	Sim	Sim	....	Não	Não

Ilustração 3

Considere a fórmula $F^{**\prime}x'x''$, abreviada para A. Seja $k = 3$. Seja I uma interpretação arbitrária com um domínio com três membros, d_1, d_2 e d_3.

Dessa vez, obtemos nove tipos diferentes relevantes de sequência.

Seja s_1	uma sequência arbitrária começando com	$\langle d_1, d_1, ...\rangle$
s_2		$\langle d_1, d_2, ...\rangle$
s_3		$\langle d_1, d_3, ...\rangle$
s_4		$\langle d_2, d_1, ...\rangle$
s_5		$\langle d_2, d_2, ...\rangle$
s_6		$\langle d_2, d_3, ...\rangle$
s_7		$\langle d_3, d_1, ...\rangle$
s_8		$\langle d_3, d_2, ...\rangle$
s_9		$\langle d_3, d_3, ...\rangle$

Nós obtemos 512 [$= 2^{(3^2)}$] possibilidades:

	Possibilidades							
	1	2	3	...	...	...	511	152
s_1 satisfaz A?	Sim	Não	Sim	...	...	...	Sim	Não
s_2 satisfaz A?	Sim	Sim	Não	...	...	...	Não	Não
s_3 satisfaz A?	Sim	Sim	Sim	...	...	...	Não	Não
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
s_9 satisfaz A?	Sim	Sim	Sim	...	...	...	Não	Não

Ilustração 4

Considere a fórmula $F^{**\prime}a'a''$, abreviada para B. Seja $k = 2$. Seja I uma interpretação arbitrária com um domínio D com dois membros, d_1 e d_2. Há quatro possíveis atribuições para a' e a'', a saber,

1. I atribui d_1 a ambos, a' e a''
2. I atribui d_1 a a' e d_2 a a''
3. I atribui d_2 a ambos, a' e a''
4. I atribui d_2 a a' e d_1 a a''

Para cada uma dessas atribuições, uma sequência arbitrária s pode satisfazer ou não satisfazer B. Isso nos dá 16 possibilidades:

			Possibilidades						
I atribui a:									
a'	a''		1	2	3	...	...	15	16
d_1	d_1	s satisfaz B?	Sim	Não	Sim	...	...	Sim	Não
d_1	d_2	s satisfaz B?	Sim	Sim	Não	...	...	Não	Não
d_2	d_2	s satisfaz B?	Sim	Sim	Sim	...	...	Não	Não
d_2	d_2	s satisfaz B?	Sim	Sim	Sim	...	...	Não	Não

Para determinar se uma fórmula específica é ou não k-

válida para um número inteiro positivo k, tudo o que temos a fazer é percorrer as infinitas possibilidades diferentes que surgem da permutação das possibilidades diferentes relevantes para as partes atômicas da fórmula. Como, em qualquer caso, o número de possibilidades é finito, é sempre possível, a princípio, percorrê-las por completo, embora, como pode ser visto, se k for grande ou a fórmula contiver símbolos de predicados de n lugares com n grande, o número de possibilidades a serem consideradas pode ser muito grande.

Exemplo 1: $F^{*\prime}x' \supset \bigwedge x' F^{*\prime}x'$ é 1-válida?

Seja I uma interpretação arbitrária com domínio D com exatamente um membro, digamos, d. Então, há apenas uma sequência enumerável s de membros de D, a saber, a sequência $\langle d, d, d, ...\rangle$. Há apenas duas possibilidades relevantes para $F^{*\prime}x'$: s o satisfaz ou não o satisfaz. Se s satisfaze-lo, então s também satisfaz $\bigwedge x' F^{*\prime}x'$ (uma vez que s é a única sequência enumerável de membros de D). Se s não satisfizer $F^{*\prime}x'$, então s não satisfaz $\bigwedge x' F^{*\prime}x'$. Então, obtemos a seguinte tabela, onde 'Sim' significa 's satisfaz' e 'Não' significa 's não satisfaz':

$F^{*\prime}x'$	$\bigwedge x' F^{*\prime}x'$	$F^{*\prime}x' \supset \bigwedge x' F^{*\prime}x'$
Sim	Sim	Sim
Não	Não	Sim

Então, para qualquer interpretação arbitrária com um domínio de apenas um membro, toda sequência satisfaz $F^{*\prime}x' \supset \bigwedge x' F^{*\prime}x'$. Então, a fórmula é 1-válida.

Exemplo 2: $F^{*\prime}x' \supset \bigwedge x' F^{*\prime}x'$ é 2-válida?

Seja I uma interpretação arbitrária com um domínio D com exatamente dois membros, digamos, d_1 e d_2. Seja s_1 uuma sequência arbitrária de membros de D cujo primeiro termo é d_1 e s_2 uma sequência arbitrária cujo primeiro termo é d_2. Então, no caso de $F^{*\prime}x'$, nós temos quatro possibilidades:

1	2
s_1 satisfaz	s_1 não satisfaz
s_2 satisfaz	s_2 satisfaz
3	4
s_1 satisfaz	s_1 não satisfaz
s_2 não satisfaz	s_2 não satisfaz

Para cada uma das quatro possibilidades, veremos se ambas s_1 e s_2 satisfazem ou não a fórmula $F^{*\prime}x' \supset \bigwedge x'F^{*\prime}x'$, que abreviaremos para W.

Possibilidade 1: s_1 e s_2 ambas satisfazem $\bigwedge x'F^{*\prime}x'$, e então satisfazem W.

Possibilidade 2: s_1 não satisfaz, mas s_2 satisfaz $F^{*\prime}x'$. Então, nem s_1 nem s_2 satisfazem $\bigwedge x'F^{*\prime}x'$, e s_1 satisfaz W, mas s_2 não.

Isso é suficiente para mostrar que W não é 2-válida. Mas, pela completude, continuaremos:

Possibilidade 3: s_1 satisfaz $F^{*\prime}x'$, mas s_2 não satisfaz. Então, nem s_1 nem s_2 satisfazem $\bigwedge x'F^{*\prime}x'$, e s_2 satisfaz W, mas s_1 não.

Possibilidade 4: Nem s_1 nem s_2 satisfazem $F^{*\prime}x'$. Então, nenhum delas satisfaz $\bigwedge x'F^{*\prime}x'$. Mas ambos satisfazem W.

Exemplo 3: $(F^{**\prime}a'a'' \supset (p' \supset \bigwedge x''F^{**\prime}x'x''))$ é 1-válida?

Abrevie a fórmula para Z.

Seja I uma interpretação arbitrária com um domínio D com um membro, d. Então, há apenas uma sequência enumerável s de membros de D, a saber, $\langle d, d, d, ...\rangle$.

No caso de $F^{**\prime}x'x''$, há apenas duas possibilidades: (1) s o satisfaz, (2) s não o satisfaz.

No caso de p', também há apenas duas possibilidades: (1) s o satisfaz, (2) s não o satisfaz.

No caso de $F^{**\prime\prime}a'a''$, há as mesmas duas possibilidades. Mas as possibilidades para $F^{**\prime}a'a''$ e $F^{**\prime}x'x''$ não são independentes: pois s satisfaz $F^{**\prime}a'a''$ sse ele satisfaz $F^{**\prime}x'x''$ (a interpretação I deve atribuir d tanto a a' quanto a a'': não há nada mais que possa ser atribuído).

Isso nos dá quatro possibilidades relevantes diferentes:

1. s satisfaz $F^{**\prime}x'x''$ (e, então, também $F^{**\prime}a'a''$) e também p'.
2. s satisfaz $F^{**\prime}x'x''$, mas não p'.
3. s não satisfaz $F^{**\prime}x'x''$, mas satisfaz p'.
4. s não satisfaz $F^{**\prime}x'x''$ nem p'.

O cálculo mostra que em todos os quatro casos, s satisfaz Z. Então, Z é 1-válido.

Exemplo 4: A fórmula Z (do exemplo 3 acima) é 2-válida?

Seja I uma interpretação arbitrária com um domínio com dois membros, d_1 e d_2. Sejam s_1, s_2, s_3, s_4 como na ilustração 2 acima. Então, para $F^{**\prime}x'x''$, temos 16 possibilidades relevantes diferentes, como na ilustração 2.

Para cada uma dessas 16 possibilidades, há quatro atribuições possíveis que I pode fazer a a' e a'', como na ilustração 4 acima.

Isso nos dá $16x4 = 64$ possibilidades.

Para cada uma dessas 64 possibilidades, a sequência sob consideração pode satisfazer p' ou não.

Isso dá $64 * 2 = 128$ possibilidades relevantes diferentes no total. O cálculo nos mostra que nem toda sequência satisfaz Z. Por exemplo, tome a classe de interpretações onde

(i) $F^{**\prime}x'x''$ é satisfeita por qualquer sequência começando com $\langle d_1, d_1, ...\rangle$, mas não por qualquer sequência começando com $\langle d_1, d_2, ...\rangle$, e

(ii) d_1 é atribuído a ambos, a' e a'', e

1. (iii) A p' é atribuído o valor de verdade V.

Seja I uma interpretação nessa classe. Então, uma vez que por (i), o par ordenado $\langle d_1, d_1\rangle$ tem a propriedade atribuída por I a $F^{**\prime}$, por (ii), $F^{**\prime}a'a''$ é verdadeira para I. Então, qualquer sequência satisfaz $F^{**\prime}a'a''$ (para a interpretação I). Também, uma vez que p' é verdadeira para I, qualquer sequência satisfaz p' (para I). Mas, por (i), qualquer sequência começando com $\langle d_1, d_2, ...\rangle$ não satisfaz $F^{**\prime}x'x''$ e, portanto, não satisfaz $\bigwedge x'' F^{**\prime}x'x''$. Então, nenhuma sequência começando com $\langle d_1, d_2, ...\rangle$ satisfaz Z (para I). Então, Z não é 2-válida.

Note que não temos que considerar a natureza particular de d_1 ou d_2, ou a propriedade particular atribuída por I a $F^{**\prime}$.

É claro, por estes exemplos, que há um método efetivo para dizer, para cada fórmula de Q e qualquer inteiro positivo k, se a fórmula é ou não k-válida.

Há fórmulas que são k-válidas para todo inteiro positivo k, mas não logicamente válidas: por exemplo, a fórmula (em notação abreviada)

$$\sim(\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(((Fxy \wedge Fyz) \supset$$

$\sim Fxx) \wedge \sim Fxx) \wedge \bigwedge y \bigvee xFxy)$[7]

Então, a existência de um método efetivo para decidir, para cada fórmula de Q, se ela é ou não k-válida não implica na existência de um método efetivo para decidir, para fórmula de Q, se ela é ou não logicamente válida. Na verdade, não há um método efetivo para decidir, para cada fórmula de Q, se ela é ou não logicamente válida: cf. §57 abaixo.

Exercícios

1. (a) $\supset \bigwedge x_1 \sim Fx_1 \supset \bigwedge x_1 Fx_1 [\bigvee x_1 Fx_1 \supset \bigwedge x_1 Fx_1]$ é 1-válida?

   (b) Ela é 2-válida?

Respostas

1. (a) Sim. Seja I uma interpretação arbitrária com um domínio D de um membro, d. Então, há apenas uma sequência enumerável s de membros de D, a saber, a sequência $\langle d, d, d, ...\rangle$. Ou s satisfaz Fx, ou não satisfaz. Então, obtemos a seguinte tabela, onde 'Sim' significa 's satisfaz', e 'Não' significa 's não satisfaz':

Fx_1	$\sim Fx_1$	$\bigwedge x_1 \sim Fx_1$	$\sim \bigwedge x_1 \sim Fx_1$	$\bigwedge x_1 Fx_1$	$\sim \bigwedge x_1 \sim Fx_1 \supset \bigwedge x_1 Fx_1$
Sim	Não	Não	Sim	Sim	Sim
Não	Sim	Sim	Não	Não	Sim

(b) Não. Sejam s_1 e s_2 como no exemplo 2 da p. 219. Abrevie $\sim \bigwedge x_1 \sim Fx_1 \supset \bigwedge x_1 Fx_1$ para Y.

Possibilidade 1: Ambas, s_1 e s_2, satisfazem Fx_1. Então, nem s_1 nem s_2 satisfazem $\bigwedge x_1 Fx_1$. Uma vez que s_2 satisfaz

[7] Para ver que ela não é logicamente válida, tome o domínio dos números naturais e considere que Fxy significa $x > y$

Fx_1, ela não satisfaz $\sim Fx_1$; portanto, nem s_1 nem s_2 satisfazem $\bigwedge x_1 \sim Fx$; portanto, ambas satisfazem $\sim \bigwedge x_1 \sim Fx_1$. Então, ambas satisfazem $\sim \bigwedge x_1 \sim Fx_1$, e nenhuma satisfaz $\bigwedge x_1 Fx_1$. Então, nenhuma satisfaz Y. Então, Y não é 2-válida. Não precisamos considerar as possibilidades restantes.

41 Um aparato dedutivo para Q: o sistema formal QS. Definições de *prova em QS, teorema de QS, derivação em QS, consequência sintática em QS, conjunto [prova-teoricamente] consistente de QS*

Trate esta seção como se ela se seguisse diretamente do fim de §38 e como se você não soubesse nada sobre a semântica para Q.

O sistema QS

Axiomas[1]

Sejam A, B e C quaisquer fbfs de Q (não necessariamente distintas), v qualquer variável individual e t qualquer termo. Se A é uma fbf, então At/v é uma fbf obtida a partir de A substituindo todas as ocorrências livres de v em A por t. Então, os seguintes são os axiomas:

[QS1] $(A \supset (B \supset A))$

[1]Este conjunto de axiomas foi escolhido porque com ele nós obtemos

$$\Gamma \vdash_{QS} A \text{ sse } \Gamma \vDash_{Q} A \text{ [46.3]}$$

Alguns outros conjuntos de axiomas para a lógica de predicados não têm essa propriedade.

[QS2] $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

[QS3] $((\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A))$

[QS4] $\bigwedge vA \supset At/v$ se t é livre para v em A [i.e., se (1) se t é uma variável, então t ocorre livre em At/v sempre que v ocorre livre em A, e (2) se t é um termo em que ocorre quaisquer variáveis, então, sempre que ocorrências livres de v em A forem substituídas por t, todas as ocorrências de variáveis em t permanecem livres. Se t é um termo fechado, t é livre para v em A.]

[QS5] $(A \supset \bigwedge vA)$ se v não ocorre livre em A

[QS6] $(\bigwedge v(A \supset B)) \supset (\bigwedge vA \supset \bigwedge vB)$

Adicionalmente:

[QS7] Se A é um axioma, então $\bigwedge vA$ também é um axioma.

O motivo para a restrição em QS4 é que queremos que nossos axiomas sejam logicamente válidos e sem restrições nós teríamos a seguinte fórmula, por exemplo, como axioma:

$$\bigwedge x_1 \sim \bigwedge x_2 F x_1 x_2 \supset \sim \bigwedge x_2 F x_2 x_2$$

Esta fórmula não é logicamente válida. (Considere 'F' como significando '$=$' e considere que D tenha ao menos dois membros. Então, o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso).

O motivo para a restrição em QS5 é que sem ela, teríamos a seguinte fórmula, por exemplo, como axioma:

$$F x_1 \supset \bigwedge x_1 F x_1$$

Esta fórmula não é logicamente válida. (Considere D como sendo o conjunto dos números naturais e 'F' como 'é par'. Então, a sequência $\langle 2, 2, 2, 2, ... \rangle$, por exemplo, não satisfaz a fórmula).

Regra de inferência

Se A e B são fbfs, então B é uma consequência imediata de A e $(A \supset B)$.

[Modus Ponens para $\supset$]

Definição. Uma *prova em QS* é uma cadeia finita de fórmulas de Q, cada uma das quais é um axioma de QS ou uma consequência imediata pela regra de inferência de QS de duas fórmulas precedentes na cadeia.

Definição. Uma fórmula A de Q é um *teorema de QS* [$\vdash_{QS} A$] sse há uma prova de QS cuja última fórmula é A.

Definição. Uma cadeia de fórmulas é uma *derivação em QS* de uma fbf A de um conjunto Γ de fbfs de Q sse (1) ela é uma cadeia finita (mas não vazia) de fórmulas de Q, (2) a última fórmula da cadeia é A, e (3) cada fórmula da cadeia é (i) um axioma de QS ou (ii) uma consequência imediata pela regra de inferência de QS de duas fórmulas precedentes na cadeia ou (iii) é um membro do conjunto Γ.

Definição. Uma fórmula é uma *consequência sintática em QS* de um conjunto Γ de fórmulas de Q [$\Gamma \vdash_{QS} A$] sse há uma derivação em QS de A a partir do conjunto Γ.

Definição. Um conjunto Γ de fórmulas de Q é um *conjunto prova-teoricamente consistente* de QS sse, para nenhuma fórmula A de Q, é o caso que ambos $\Gamma \vdash_{QS} A$ e $\Gamma \vdash_{QS} {\sim}A$.

Abreviaremos 'conjunto prova-teoricamente consistente' para 'conjunto consistente', porque não usaremos a frase 'conjunto modelo-teoricamente consistente [de Q]'. [Às vezes, falaremos de um conjunto *tendo um modelo*, às vezes de um conjunto como sendo *simultaneamente satisfatível*, sendo estas noções distintas].

Um conjunto Γ de fórmulas de Q é um *conjunto inconsistente de QS* sse, para alguma fórmula A de Q, ambos $\Gamma \vdash_{QS} A$ e $\Gamma \vdash_{QS} \sim A$.

42 Prova da consistência de QS

42.1 *QS é consistente*

Prova. Seja A qualquer fbf de Q. Definimos sua fórmula proposicional associada, A^{prop}, como se segue: Remova todos os quantificadores em A; remova todos os termos em A; substitua cada símbolo de predicado pelo símbolo proposicional p'. A^{prop} é uma fbf da linguagem P.

Se A é um axioma de QS por algum dos esquemas de axiomas QS1, QS2 ou QS3, então A^{prop} será um axioma de PS por algum dos esquemas de axiomas [de PS] PS1, PS2 ou PS3. Se A é um axioma de QS por QS4, QS5 ou QS6, então A^{prop} será um teorema de PS da forma $(B \supset B)$. Se A é um axioma de QS pelo esquema de axioma QS7, então A^{prop} será um axioma de PS ou um teorema de PS da forma $(B \supset B)$.

Se B é uma consequência imediata pela regra de inferência de QS de A e $(A \supset B)$, então B^{prop} será uma consequência imediata pela regra de inferência de QS de A^{prop} e $A^{prop} \supset B^{prop}$; pois $(A \supset B)^{prop}$ é $(A^{prop} \supset B^{prop})$.

Agora, suponha que QS é inconsistente. Então, para alguma fbf A de Q, há uma prova em QS de A e também uma prova em QS de $\sim A$. Para cada fbf nessas provas, substitua sua sua fórmula proposicional associada. O resultado será duas cadeias de fbfs de P. Se alguma dessas cadeias não for uma prova em PS, isso será porque em algum lugar, uma fbf da forma $(B \supset B)$ ocorre na cadeia sem ser uma consequência imediata em PS de fbfs precedendo-a na cadeia. Coloque passos extras na(s) cadeia(s) para produzir provas em PS de quaisquer tais fbfs [sabemos que isso pode ser feito, uma vez que $(B \supset B)$ é um teorema de PS] e o resultado será provas em PS de A^{prop} e $\sim A^{prop}$, onde $\sim A^{prop}$ é a negação de A^{prop}.

Então, nós temos: Se QS é inconsistente, então PS também é.

Mas PS é consistente. Então QS também é.

Variação da prova: Qualquer teorema de QS terá uma tautologia de P como sua fórmula proposicional associada [qualquer axioma de QS tem uma tautologia de P como sua fórmula proposicional associada, e Modus Ponens em QS preserva tautologicidade de fórmulas proposicionais associadas]. Agora, $F^{*\prime}x'$ é uma fbf de Q que não tem uma tautologia de P como sua fórmula proposicional associada. Portanto, ela não é um teorema de QS. Portanto, QS é consistente.

Outra prova da consistência de QS pode ser dada ao usar 43.5 abaixo: Se $\vdash_{QS} A$, então $\models_{Q} A$. [Contudo, há um sentido de 'finitário' em que as provas de consistência dadas acima são finitárias, enquanto a prova de 43.5 não é: veja mais em Kleene (1952, pp. 174–5)].

43 Alguns meta-teoremas sobre QS

Desenvolveremos aqui o tanto de metateoria de QS que precisaremos para provas posteriores.

43.1 *O Teorema da Dedução vale para QS*

Prova. Pela nossa análise da prova do teorema da dedução para PS no fim de §26, o TD vale para qualsuqer sistema tendo essas três propriedades:

1. Qualquer fbf da forma $A \supset (B \supset A)$ é um teorema.
2. Qualquer fbf da forma $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ é um teorema.
3. Modus Ponens para $\supset$ é a única regra de inferência.

QS tem essas três propriedades (1 por QS1, 2 por QS2).

43.2 *(O inverso do Teorema da Dedução: usado na Parte 4) Se* $\Gamma \vdash_{QS} A \supset B$*, então* $\Gamma, A \vdash_{QS} B$

Prova. Suponha que $\Gamma \vdash_{QS} A \supset B$. Então, $A \vdash_{QS} A \supset B$. Mas $\Gamma, A \vdash_{QS} A$. Então, por Modus Ponens, $\Gamma, A \vdash_{QS} B$.

43.3 *Se* Δ *é um conjunto de fbfs fechadas, então, se* $\Delta \vdash_{QS} A$*, então* $\Delta \vdash_{QS} \bigwedge vA$

Prova. Mostramos que, dada uma derivação de A a partir de Δ, há uma derivação de $\bigwedge vA$ a partir de Δ. A prova é por indução no tamanho, n, da derivação de A a partir de Δ.

Base: $n = 1$

Então, A é um axioma ou está em Δ. Se A é um axioma, então $\bigwedge vA$ é também um axioma, por QS7, e então, a derivação requerida consiste simplesmente da fórmula $\bigwedge vA$. Se A está em Δ, então a seguinte cadeia é uma derivação de $\bigwedge vA$ a partir de Δ:

A

$A \supset \bigwedge vA$ [QS5. Uma vez que A é fechada, v não ocorre livre em A.]

$\bigwedge vA$

Passo indutivo

Assuma que o teorema vale para todas as derivações de A a partir de Δ de tamanho menor que k. Para provar que ele vale para todas as derivações de tamanho k. 3 casos:

1. A é um axioma
2. A está em Δ
3. A é uma consequência imediata por MP de duas fórmulas precedentes

Casos 1 e 2 são como no caso base.

Caso 3. A é uma consequência imediata por MP de duas fórmulas precedentes na derivação $A_1, ..., A_k$ de A a partir de Δ ($|_k$ é A). Considere que estas duas fórmulas são A_i e A_j, onde $i < k$, $j < k$ e A_j é $A_i \supset A$. Então, pela hipótese indutiva, há derivações de $\bigwedge vA_i$, e $\bigwedge v(A_i \supset A)$ a partir de Δ. Por QS6, $\vdash_{QS} \bigwedge v(A_i \supset A) \supset (\bigwedge vA_i \supset \bigwedge vA)$. Então, por duas aplicações de Modus Ponens, obtemos $\Delta \vdash_{QS} \bigwedge vA$.

Lembrete: Se A é uma tautologia de P cujos únicos símbolos proposicionais são $P_1, ..., P_n$, então o resultado de substituir $P_1, ..., P_n$ por fbfs $Q_1, ..., Q_n$ de Q, respectivamente, em A, é uma *instância de um esquema teutológico de Q*

43.4 *Se A é uma instância de um esquema teutológico de Q, então* $\vdash_{QS} A$

Prova. Suponha que A é uma instância de um esquema tautológico de Q. Seja B uma tautologia de P, da qual A é uma instância de substituição. Então, B tem uma prova em PS (pelo teorema da completude semântica para PS). Uma vez que A é o resultado de substituir os símbolos proposicionais de B por fbfs de Q, fazemos as mesmas substituições ao longo da prova de B. Sob estas substituições, os axiomas de

PS por PS1–3 se tornam axiomas de QS por QS1–3 e o uso de Modus Ponens em PS se torna o uso de Modus Ponens em QS. Então, obtemos uma prova de A em QS.

43.5 *Se* $\vdash_{QS} A$*, então* $\models_Q A$ *[i.e., todo teorema de QS é logicamente válido]*

Prova. Por 40.10, qualquer um dos axiomas de QS1–3 é logicamente válido. Por 40.16, qualquer um dos axiomas de QS4 é logicamente válido. Por 40.13, qualquer um dos axiomas de QS5 é logicamente válido. Por 40.11, qualquer um dos axiomas de QS6 é logicamente válido. Então, todo axioma de QS1–6 é logicamente válido. Então, por 40.6, qualquer um dos axiomas de QS7 aplicado a qualquer axioma de QS1–6 é logicamente válido. Então, novamente por 40.6, qualquer axioma por QS7 é logicamente válido. Então, todo axioma de QS é logicamente válido. Por 40.4, Modus Ponens preserva validade lógica. Então, todo teorema de QS é logicamente válido.

Este resultado produz outra prova de consistência de PS [p' é uma fbf de Q que não é logicamente válida, então não é logivamente válida. Então, QS é consistente.]

43.6 *Se* $\Gamma \vdash_{QS} A$*, então há um subconjunto finito* Δ *de* Γ *tal que* $\Delta \vdash_{QS} A$

Isso se segue do nosso requerimento de que uma derivação em QS deve ser uma cadeia *finita* de fórmulas.

43.7 *Se* $\Gamma \vdash_{QS} A$*, então* $\Gamma \models_Q A$

Prova. Suponha que $\Gamma \vdash_{QS} A$. Então, por 43.6, há um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash_{QS} A$. (i) Se Δ é vazio, então $\vdash_{QS} A$, e então, por 43.5, $\models_Q A$, e então, $\Gamma \models_Q A$. (ii) Se Δ não é vazio, então sejam $A_1, ..., A_n$ os membros de Δ. Então, $A_1, ..., A_n \vdash_{QS} A$. Então, pelo TD, aplicado quantas vezes forem necessárias, $\vdash_{QS} A_1 \supset (A_2 \supset (......(A_n \supset A)...))$.

Então, por 43.5, $\models_Q A_1 \supset (A_2 \supset (......(A_n \supset A)...))$. Então, não há uma sequência que satisfaz $\{A_1, ..., A_n\}$ e que não satisfaça também A, i.e., não há uma sequência que satisfaça todo membro de Δ e não satisfaça também A. Uma vez que Δ é um subconjunto de Γ, segue-se que não há uma sequência que satisfaça todo membro de Γ e que não satisfaça também A: i.e., $\Gamma \models_Q A$.

43.8 Se $A \vdash_{QS} B$, então $\models_Q A \supset B$

Prova. Suponha que $A \vdash_{QS} B$. Então, pelo TD, $\vdash_{QS} A \supset B$. Então, por 43.5, $\models_Q A \supset B$.

43.9 *Se* $\Gamma \cup \{\sim A\}$ *é um conjunto inconsistente de QS, então* $\Gamma \vdash_{QS} A$

Prova. Suponha que $\Gamma \cup \{\sim A\}$ é um conjunto inconsistente de QS. Então, $\Gamma, \sim A \vdash_{QS} B$ e $\Gamma, \sim A \vdash_{QS} \sim B$ para alguma fórmula B. Então, pelo TD, $\Gamma \vdash_{QS} \sim A \supset B$ e $\Gamma \vdash_{QS} \sim A \supset \sim B$. Mas $\vdash_{QS} (\sim A \supset B) \supset ((\sim A \supset \sim B) \supset A)$ (instância de um esquema tautológico). Então, por MP duas vezes, $\Gamma \vdash_{QS} A$.

Na próxima seção (§44), definiremos a noção de uma *teoria de primeira ordem*, e ao longo da seção seguinte (§45), provaremos vários metateoremas sobre teorias de primeira ordem arbitrárias. É através de teorias primeira ordem que a lógica moderna encontra a maioria de suas aplicações. A teoria dos conjuntos, por exemplo, pode ser apresentada como uma teoria de primeira ordem interpretada, e praticamente toda (? toda) a matemática pura pode ser expressa na linguagem da teoria dos conjuntos. Mas nós estamos interessados em teorias de primeira ordem por um motivo diferente. Nosso propósito principal é provar o Teorema 45.15, *Qualquer teoria de primeira ordem consistente tem um modelo enumerável*, do qual a completude semântica de QS se segue por um argumento curto e simples. O Teorema 45.15 é, na verdade, o teorema chave nessa parte do livro. Sua prova é longa e às vezes dolorosa, mas ele tem consequências tão interessantes que as dores valem a pena.

44 Teorias de primeira ordem

Uma *teoria de primeira ordem* é um sistema formal que satisfaz as seguintes condições:

1. Sua linguagem é Q ou Q^+ [Q^+ é Q com a adição de enumeráveis novas constantes individuais, dada uma enumeração efetiva das constantes adicionadas].

2. Seus *axiomas lógicos* são especificados pelos esquemas QS1–7 aplicados às fbfs da sua linguagem, com QS7 refraseado para 'Se A é um axioma *lógico*, então $\bigwedge vA$ também é um axioma *lógico*'. Então, toda teoria de primeira ordem tem por seus axiomas todos os axiomas de QS (e mais, se sua linguagem for Q^+).

3. Ela pode, além disso, ter contáveis *axiomas próprios*, que devem ser fbfs *fechadas* de sua linguagem.

4. Modus Ponens para $\supset$ é sua única regra de inferência.

Segue-se da definição que QS é ela mesma uma teoria de primeira ordem.

Seja K uma teoria arbitrária de primeira ordem. Então, chamaremos os esquemas de axiomas de K correspondentes aos esquemas QS1–7 de K1–7.

Seja K uma teoria arbitrária de primeira ordem. Então, as definições de *prova em K, teorema de K, derivação em K, consequência sintática em K, conjunto consistente de K* são exatamente como aquelas para QS, exceto que ao longo dessas definições, tanto 'QS' quanto 'Q' são substituídos por

'K'. (Uma fórmula de K é uma fórmula da linguagem de K, e ela será Q ou Q^+, dependendo do que K for).

Um *modelo* de uma teoria de primeira ordem K é um modelo de um conjunto de teoremas de K.

45 Alguns meta-teoremas sobre teorias arbitrárias de primeira ordem. Completude de negação. Teorias de primeira ordem fechadas. O teorema de Löwenheim-Skolem. O teorema da compacidade

Ao longo desta seção, seja K uma teoria de primeira ordem arbitrária. Note que todos os axiomas próprios de K são fbfs *fechadas.*

45.1 *O Teorema da Dedução vale para qualquer teoria de primeira ordem arbitrária*

Prova. Qualquer teoria de primeira ordem arbitrária tem as três propriedades mencionadas ao fim de §26. Cf. 43.1.

45.2 *O inverso do Teorema da Dedução vale para qualquer teoria de primeira ordem arbitrária*

Prova. Suponha que $\Gamma \vdash_K A \supset B$. Então, $\Gamma, A \vdash_K A \supset B$. Mas $\Gamma, A \vdash_K A$. Então, por Modus Ponens, $\Gamma, A \vdash_K B$.

45.3 *Seja K qualquer teoria de primeira ordem arbitrária. Qualquer instância, na linguagem de K, de um esquema tautológico é um teorema de K*

Prova. Como para 43.4, substituindo 'QS' e 'Q' por 'K' ao longo da prova.

45.4 *Se* $\vdash_K A$, *então* $\vdash_K \bigwedge vA$

Prova. Por indução no tamanho, n, de uma prova em

K de A.

Base: $n = 1$

Então, A é um axioma lógico ou próprio de K. Se é um axioma lógico de K, então $\bigwedge vA$ também é um axioma lógico de K, por K7. Se é um axioma próprio de K, então $\bigwedge vA$ é um teorema de K, pelos passos

$$A$$
$$A \supset \bigwedge vA$$
$$\bigwedge vA$$

Passo indutivo

Assuma que o teorema vale para todas as provas de tamanho menor que k. Para provar que ele vale para todas as provas de tamanho k.

2 casos:

1. A é um axioma

2. A é uma consequência imediata por MP de duas fbfs precedentes.

Caso 1. Como no caso base.

Caso 2. Seja $A_1, ..., A_k$ uma prova em K de A (então, A_k é A). A é uma consequência imediata de A_i e A_j, onde $i < k$ e $j < k$, e A_j é $A_i \supset A$. Então, pela hipótese indutiva, $\vdash_K \bigwedge vA_i$ e $\vdash_K \bigwedge v(A_i \supset A)$. Por K6, $\vdash_K \bigwedge v(A_i \supset A) \supset (\bigwedge vA_i \supset \bigwedge vA)$. Então, por MP duas vezes, $\vdash_K \bigwedge vA$.

45.5 $\vdash_K A$ sse $\vdash_K A^c$

Prova. Suponha que $\vdash_K A$. Então, por 45.4, $\vdash_K \bigwedge vA$ para um v arbitrário. Então, usando 45.4 conforme a necessidade, $\vdash_K A^c$. Inversamente, suponha que $\vdash_K A^c$. Então, usando K4 na forma $\bigwedge vA \supset A$ conforme a necessidade, obtemos $\vdash_K A$.

Notação

Seja K uma teoria de primeira ordem arbitrária. Seja A uma fbf de K. Então, $K + \{A\}$ é o sistema que resultará da adição de A a K como um axioma extra ['adicão' e 'extra' aqui não pretendem excluir o caso em que A já é um axioma de K.].

45.6 (a) *Se A é uma fbf fechada de K que não é um teorema de K, então $K + \{\sim A\}$ é uma teoria consistente de primeira ordem*

Prova. Abrevie $K + \{\sim A\}$ para K'. Uma vez que K é uma teoria de primeira ordem e $\sim A$ é fechada, K' é uma teoria de primeira ordem; e claramente, $\vdash_{K'} B$ sse $A \vdash_{K'} B$, para cada fbf B. Agora, suponha que K' é inconsistente. Então, $\vdash_{K'} C$ e $\vdash_{K'} \sim C$, para alguma fbf C. Portanto, $\sim A \vdash_{K} C$ e $\sim A \vdash_{K} \sim A$. Portanto, pelo Teorema da Dedução, $\vdash_{K} \sim A \supset C$ e $\vdash_{K}$ e $\vdash_{K} \sim A \supset \sim C$. Mas $\vdash_{K} (\sim A \supset C) \supset ((\sim A \supset \sim C) \supset A)$. Portanto, por MP duas vezes, $\vdash_{K} A$. Mas isso contradiz nossa hipótese de que A não é um teorema de K.

45.6 (b) Como para (a), mas intersubstituindo A e $\sim A$. A prova usa $\vdash_{K} (A \supset C) \supset ((A \supset \sim C) \supset \sim A)$.

45.7 (a) (Versão alternativa de 45.6 (a)) *Se A é uma fbf fechada de K que não é um teorema de K, então $\{\sim A\}$ é um conjunto consistente de K*

Prova. Suponha que $\{\sim A\}$ é um conjunto inconsistente de K. Então, $\sim A \vdash_{K} C$ e $\sim A \vdash_{K} \sim C$ para algum C. O resto da prova é como para 45.6 (a).

45.7 (b) Como para 45.7 (a), mas intersubstituindo A e $\sim A$.

45.8 *Se uma teoria de primeira ordem tem modelo, então ela é consistente*

Prova. Seja K uma teoria de primeira ordem arbitrária. Suponha que K possui um modelo M. E suponha que K é inconsistente. Então, $\vdash_K A$ e $\vdash_K \sim A$ para alguma fórmula A. Então, A é verdadeiro para M e $\sim A$ é verdadeiro para M. Mas isso é impossível. Então, se K tem um modelo, K é consistente.

45.9 *Para qualquer teoria de primeira ordem K, há uma enumeração efetiva de*

1. *As fbfs de K*
2. *As fbfs fechadas de K*
3. *As fbfs de K em que exatamente uma variável ocorre livre*
4. *Os termos fechados de K*

Prova.

A. Suponha que K tem uma linguagem Q. Atribua numerais aos símbolos de Q assim:

p	10
$'$	100
x	1000
a	10000
f	100000
F	1000000
$*$	10000000
$\sim$	100000000
$\supset$	1000000000
$\wedge$	10000000000
(	100000000000
)	1000000000000

1. O resto da prova é exatamente como para o Teorema da Enumeração para as fbfs da linguagem P. Seja E as

enumerações resultantes das fbfs de Q.

2. Delete de E todas as fbfs além daquelas em que alguma variável ocorre livre.

3. Delete de E todas as fbfs além daquelas em que exatamente uma variável ocorre livre.

4. Como para 1, mas listando termos fechados em vez de fbfs.

5. Suponha que K tem a linguagem Q^+. Atribua à primeira constante nova na dada enumeração efetiva das novas constantes o número 10000000000000, i.e., '1' seguido por 13 '0's. À segunda constante na enumeração atribua o número consistindo de '1' seguido por 14 '0's, à terceira, o número consistindo de '1' seguido por 15 '0's. E assim por diante. O resto da prova é como para A.

Definição. Um sistema S' é uma *extensão* de um sistema S sse cada teorema de S é um teorema de S'. Note: Se S' é uma extensão de S, todo modelo de S' é um modelo de S.

Definição. Um sistema S é *negação-completo* sse para toda *sentença* [fbf fechada] A de S, ou A ou a negação de A é um teorema de S.

45.10

46 Prova da completude semântica de QS

47 Um sistema formal de lógica de predicados de primeira ordem com identidade: o sistema $QS^{=}$. Prova da consistência de $QS^{=}$. Modelos normais. Prova da adequação de $QS^{=}$

48 Isomorfismo de modelos. Categoricidade. Modelos não-clássicos

49 Implicações filosóficas de alguns desses resultados

50 Um sistema formal para a lógica de predicados de primeira ordem monádica: o sistema QS^{M}. Provas de sua consistência, completude semântica e decidibilidade

Parte IV.

Parte Quatro: Lógica de Predicados de Primeira Ordem: Indecidibilidade

51 Alguns resultados sobre indecidibilidade

52 Tese de Church (1935). Teorema de Church (1936)

53 Funções recursivas. Conjuntos recursivos

54 Representação, representação forte e definibilidade de funções em um sistema formal

55 Um sistema formal de aritmética: o sistema H

56 Prova da indecidibilidade de H

57 Prova da indecidibilidade de $QS^=$. A indecidibilidade de QS

58 Subclasses decidíveis de fórmulas logicamente válidas de Q. Forma normal prenex. Forma normal Skolem. Dois resultados negativos

59 Estranhezas e finalizações: 1. Valdade lógica e o domínio vazio. 2. Omega-inconsistência e omega-incompletude. 3. Teoremas de Gödel. 4. O axioma da escolha. 5. Conjuntos recursivamente enumeráveis