PRINCIPIA MATHEMATICA

POR

ALFRED NORTH WHITEHEAD

E

BERTRAND RUSSELL, F.R.S.

VOLUME I

SEGUNDA EDIÇÃO

TRADUÇÃO: NICHOLAS FERREIRA
CANAL "É LÓGICO, PÔ"

CAMBRIDGE
EM *UNIVERSITY PRESS*

AVISO

Esta edição não é oficial, é apenas um esboço. Não faz parte de nenhum projeto acadêmico nem foi financiada de qualquer maneira. Ela também não foi revisada, formatada nem diagramada. Erros de digitação, de formatação, problemas com numeração de fórmulas, problemas com numeração de notas de rodapé e outros problemas similares são esperados.

Comecei a tradução no final de 2019 e meu intuito era traduzir toda a primeira parte da obra (as primeiras 370 páginas, mais ou menos), mas acabei iniciando outros projetos, deixei esse um bom tempo parado e não tive tempo para finalizar as traduções. Após vários pedidos ao longo do tempo, resolvi postar a tradução mesmo incompleta.

Além disso, a tradução foi feita pelo Microsoft Word, pois na época eu ainda não conhecia o LaTeX, e, com meu atual conhecimento em LaTeX e meu ritmo de trabalho, transformar todas as fórmulas demoraria mais do que reescrever o livro inteiro à mão.

De qualquer forma, espero que o pouco que traduzi desta grande obra possa servir para aqueles que têm interesse em lógica matemática e preferem estudá-la em português.

Nicholas Ferreira, 19/06/2021

=)

PREFÁCIO

O tratamento matemático dos princípios da matemática, que é o assunto do presente livro, surgiu da conjunção de dois diferentes estudos, ambos na modernidade. Por um lado, temos o trabalho de analistas e geômetras, no caminho de formular e sistematizar seus axiomas, e o trabalho de Cantor e outros em tais assuntos como a teoria dos agregados. Por outro lado, temos a lógica simbólica, que, depois de um período necessário de crescimento, adquiriu agora, graças a Peano e seus seguidores, a adaptabilidade técnica e a compreensividade lógica que são essenciais para um instrumento matemático lidar com o que tem sido até então o começo da matemática. Da combinação desses dois estudos, dois resultados emergem, a saber, (1) que o que foi a princípio tomado, tacitamente ou explicitamente, como axiomas, são ou desnecessários ou demonstráveis; e (2) que os mesmos métodos pelos quais os supostos axiomas são demonstrados darão resultados valoráveis em regiões, como os números infinitos, que foram anteriormente consideradas como inacessíveis ao conhecimento humano. Por isso o escopo da matemática é alargado tanto pela adição de novos assuntos quanto por uma extensão ultrapassada em esferas até então abandonadas à filosofia.

O presente trabalho foi originalmente destinado por nós a ser compreendido em um segundo volume de *The Principles of Mathematics*. Com este objeto em mente, sua escrita começou em 1900. Mas conforme nós avançamos, tornou-se cada vez mais evidente que o assunto é muito maior que imaginávamos; além disso, em relação a muitas questões fundamentais que foram deixadas obscuras e duvidosas no trabalho anterior, nós chegamos agora no que acreditamos serem soluções satisfatórias. Portanto, tornou-se necessário fazer nosso livro independente de *The Principles of Mathematics*. Nós evitamos, porém, tanto a controvérsia quanto a filosofia, e fizemos nossos enunciados dogmáticos na forma. A justificação para isso é que a razão principal em favor de qualquer teoria dos princípios da matemática deve sempre ser indutiva, i.e., ela deve estar no fato de que a teoria em questão nos permite deduzir a matemática ordinária. Na matemática, o maior grau de auto evidência geralmente não é encontrado logo no começo, mas em algum ponto posterior; consequentemente, as deduções iniciais, até que elas cheguem neste ponto, dão mais razões para acreditar nas premissas porque consequências verdadeiras se seguem delas do que para acreditar nas consequências porque elas se seguem das premissas.

Ao construir um sistema dedutivo como aquele contido no presente trabalho, há duas tarefas opostas que devem ser simultaneamente performada. Por outro lado, temos que analisar a matemática existente com vista a descobrir que premissas são empregadas, se estas premissas são mutuamente consistentes, e se elas são capazes de serem reduzidas a premissas mais fundamentais. Por outro lado, quando nós decidimos sobre nossas premissas, nós temos que reconstruir novamente tanto quanto parece ser necessário dos dados analisados anteriormente, e tantas outras consequências de nossas premissas quantas são de interesse geral suficiente para merecer declaração. O trabalho preliminar de análise não aparece na apresentação final, que apenas estabelece o resultado da análise em certas ideias indefinidas e proposições indemonstradas. Não é dito que a análise poderia não ter sido levada mais adiante: nós não temos razões para supor que é impossível encontrar ideias mais simples e axiomas por meio dos quais aqueles com os quais nós começamos poderiam ser definidos e demonstrados. Tudo o que é afirmado é que as ideias e axiomas com os quais nós começamos são suficientes, não que eles são necessários.

Ao fazer deduções de nossas premissas, nós consideramos essencial levá-las ao ponto onde nós provamos o que é verdade naquilo normalmente seria tomado como certo. Mas não pensamos que seria desejável limitarmo-nos estritamente a esta tarefa. É habitual considerar apenas casos particulares, mesmos quando, com nosso aparato, é fácil lidar com o caso geral. Por exemplo, a aritmética cardinal é geralmente concebida em conexão com números *finitos*, mas suas leis gerais se mantêm igualmente para números infinitos, e são mais facilmente provadas sem qualquer menção à distinção entre finito e infinito. Novamente, muitas das propriedades comumente associadas com séries possuem arranjos que não são estritamente seriais, mas que apenas têm algumas das propriedades distintivas de arranjos seriais. Em tais casos, é um defeito no estilo lógico provar para uma classe particular de arranjos o que poderia ser também provado mais geralmente. Um processo análogo de generalização é envolvido, a um grau maior ou menor, em todo o nosso trabalho. Nós procuramos sempre as hipóteses razoavelmente simples mais gerais pelas quais qualquer dada conclusão pode ser alcançada. Por este motivo, especificamente nas partes posteriores do livro, a importância de uma proposição geralmente reside em sua hipótese. A conclusão frequentemente será algo que, em uma certa classe de casos, é familiar, mas a hipótese será, sempre que possível, ampla o suficiente para admitir muitos casos além daqueles em que a conclusão é familiar.

Nós achamos necessário dar provas muito completas, porque do contrário, seria dificilmente possível ver quais hipóteses são realmente requeridas, ou se nossos resultados se seguem de nossas premissas explícitas. (Deve ser lembrado que nós não estamos afirmando meramente que tais e tais proposições são verdadeiras, mas também que os axiomas enunciados por nós são suficientes para prová-las.). Ao mesmo tempo, apesar de provas completas serem necessárias para a evitação do erro, e para o convencimento daqueles que podem se sentir duvidosos em relação à nossa correção, ainda, as provas de proposições podem ser comumente omitidas por um leitor que não está especialmente interessado naquela parte do assunto tratado, e que não tem dúvidas da nossa precisão substancial sobre o assunto em questão. O leitor que estiver especialmente interessado em alguma porção particular do livro provavelmente achará suficiente, no que diz respeito às porções anteriores, ler os sumários das partes prévias, seções e números, uma vez que eles dão explanações das ideias envolvidas e enunciados das principais proposições provadas. As provas na parte I, seção A, porém, são necessárias, uma vez que em seu curso, a maneira de enunciar provas será explicada. As provas das proposições mais antigas são dadas sem a omissão de qualquer passo, mas conforme o trabalho avança, as provas são gradualmente comprimidas, retendo, porém, detalhes suficientes para permitir que o leitor, com a ajuda das referências, reconstrua as provas em que nenhum passo é omitido.

A ordem adotada é até certo ponto opcional. Por exemplo, nós tratamos a aritmética cardinal e a aritmética de relações antes de séries, mas nós poderíamos ter tratados séries antes. Em grande parte, porém, a ordem é determinada pelas necessidades lógicas.

Uma parte bem grande do trabalho envolvido em escrever o presente livro foi gasta com as contradições e paradoxos que infectaram a lógica e a teoria dos agregados. Nós examinamos um grande número de hipóteses para lidar com estas contradições; muitas de tais hipóteses foram avançadas por outros, e quase o mesmo número foi inventado por nós. Às vezes, custou-nos muitos meses para nos convencermos de que uma hipótese era insustentável. No curso de tal estudo prolongado, nós fomos levados, como já era de se esperar, a modificar nossas visões de tempos em tempos; mas gradualmente se tornou evidente para nós que alguma forma de doutrina de tipos deve ser adotada se se deseja evitar as contradições. A forma particular de doutrina dos tipos advogada no presente livro não é logicamente indispensável, e há várias outras formas igualmente compatíveis com a verdade de nossas deduções. Nós particularizamos, tanto porque a forma da doutrina pela qual nós advogamos nos parece a mais provável, e porque é necessário dar pelo menos uma teoria perfeitamente definida que evita as contradições. Mas dificilmente algo em nosso livro seria mudado pela adoção de uma forma diferente de doutrina dos tipos. De fato, nós podemos ir além, e dizer que, supondo alguma outra forma de evitar que as contradições existam, não muito do nosso livro, exceto o que explicitamente lida com tipos, é dependente da adoção da doutrina dos tipos em qualquer forma, tão logo tenha sido mostrado (como nós afirmamos ter feito) que é *possível* construir uma lógica matemática que não conduz a contradições. Deveria ser observado que o todo o efeito da doutrina dos tipos é negativo: ele proíbe certas inferências que seriam de outra maneira válidas, mas não permite qualquer uma que seria de outra maneira inválida. Assim, nós podemos razoavelmente esperar que as inferências que a doutrina dos tipos permite permaneceriam válidas mesmo que a doutrina fosse considerada inválida

Nosso sistema lógico é completamente contido nas proposições numeradas, que são independentes da introdução e dos sumários. A Introdução e os Sumários são completamente explicativos, e não formam parte da cadeia de deduções. A explicação da hierarquia dos tipos na Introdução difere levemente daquela dada em **∗12** do corpo do trabalho. A última explicação é mais estrita e é aquela que é assumida através do resto do livro.

A forma simbólica do trabalho foi imposta a nós por necessidade: sem sua ajuda, nós teríamos sido incapazes de performar o raciocínio requisitado. Ela foi desenvolvida como resultado da prática real, e não é uma excrescência introduzida pela mera proposta de sua exposição. O método geral que guia nossa manipulação de símbolos lógicos é devido a Peano. Seu grande mérito consiste não tanto em suas descobertas lógicas nem nos detalhes de suas notações (excelentes como ambos são), mas sim no fato de que ele primeiramente mostrou como a lógica simbólica deveria ser liberta de sua obsessão indevida com as formas de álgebra ordinária, e assim a fez um instrumento adequado para a pesquisa. Guiados por nosso estudo em seus métodos, nós usamos bastante liberdade em construindo, ou reconstruindo, um simbolismo que deve ser adequado para lidar com todas as partes do assunto. Nenhum símbolo foi introduzido exceto em razão de sua utilidade prática para as propostas imediatas do nosso raciocínio.

Um certo número de referências futuras será encontrado nas notas e explicações. Apesar de nós termos tomado cada precaução razoável para assegurar a precisão dessas referências futuras, nós não podemos com certeza garantir sua precisão com a mesma confiança possível no caso de referências passadas.

Detalhados reconhecimentos de obrigações a escritores prévios não foi muito frequentemente possível, uma vez que nós precisamos transformar qualquer coisa que pegamos emprestado, para adaptá-lo ao nosso sistema e à nossa notação. Nossas obrigações principais serão óbvias para qualquer leitor que é familiarizado com a literatura do assunto. Em relação à notação, nós seguimos, na medida do possível, Peano, suplementando sua notação, quando necessária, por aquela de Frege ou de Schröder. Grande parte do simbolismo, porém, teve que ser nova, não tanto pela dessatisfação com o simbolismo dos outros, mas sim pelo fato de que nós lidamos com ideias previamente não simbolizadas. Em todas as questões de análises lógicas, nosso débito principal é a Frege. Onde nós diferimos dele, é largamente porque as contradições mostraram que ele, em comum com todos os outros lógicos antigos e moder nos, permitiu algum erro se infiltrasse em suas premissas; mas deixando de lado as contradições, teria sido quase impossível para detectar este erro. Na aritmética e na teoria de séries, todo o nosso trabalho é baseado no de Georg Cantor. Em geometria, tivemos continuamente diante de nós os escritos de v. Staudt, Pasch, Peano, Pieri e Veblen.

Nós obtivemos assistência em vários estágios das críticas de amigos, notavelmente o Sr. G. G. Berry, da Livraria Bodleiana, e o Sr. R. G. Hawtrey.

Nós temos que agradecer ao conselho da *Royal Society* por uma doação de £200 para as despesas de impressão do Fundo de Publicação do Governo, e também aos Síndicos do *University Press* que empreenderam liberalmente a maior parte do custo incorrido na produção do trabalho. A excelência técnica, em todos os departamentos, do *University Press*, e o zelo e cortesia de seus oficiais, iluminaram materialmente a tarefa de correção de prova.

O segundo volume já está na imprensa, e ambos, ele e o terceiro, aparecerão assim que a impressão puder ser completa.

A. N. W.

B. R.

Cambridge,

Novembro, 1910

PREFÁCIO

CONTEÚDOS DO VOLUME I

PREFÁCIO
LISTA ALFABÉTICA DE PROPOSIÇÕES REFERIDAS POR NOMES
INTRODUÇÃO PARA A SEGUNDA EDIÇÃO
INTRODUÇÃO

Capítulo I. Explicações Preliminares de Ideias e Notações
Capítulo II. A Teoria dos Tipos Lógicos
Capítulo III. Símbolos Incompletos

PARTE I. LÓGICA MATEMÁTICA

Sumário da Parte I

Seção A. A Teoria da Dedução

*1. Ideias Primitivas e Proposições
*2. Consequências Imediatas das Proposições Primitivas
*3. O Produto Lógico de duas Proposições
*4. Equivalência e Regras Formais
*5. Proposições Variadas

Seção B.

*9. Extensão da Teoria da Dedução de Tipos Inferiores até Tipos Superiores de Proposições
*10. Teoria das Proposições contendo uma Variável Aparente
*11. Teoria das duas Variáveis Aparentes
*12. A Hierarquia dos Tipos e o Axioma da Redutibilidade
*13. Identidade
*14. Descrições

Seção C. Classes e Relações

*20. Teoria Geral das Classes
*21. Teoria Geral das Relações
*22. Cálculo de Classes
*23. Cálculo de Relações
*24. A Classe Universal, a Classe Nula, e a Existência de Classes
*25. A Relação Universal, a Relação Nula, e a Existência de Relações

Seção D. Lógica de Relações

∗30. Funções Descritivas

∗31. Inverso de Relações

∗32. Referentes e *Relata* de um dado Termo com respeito a uma dada Relação

∗33. Domínios, Domínios Inversos, e Campos de Relações

∗34. O Produto Relativo de Duas Relações

∗35. Relações com Domínios Limitados e Domínios Inversos

∗36. Relações com Campos Limitados

∗37. Funções Plurais Descritivas

∗38. Relações e Classes derivadas de uma Função Descritiva Dupla

Nota para a Seção D

Seção E. Produtos e Somas de Classes de Classes

∗40. Produtos e Somas de Classes de Classes

∗41. O Produto e Soma de uma Classe de Relações

∗42. Proposições Variadas

∗43. As Relações de um Produto Relativo com seus Fatores

LISTA ALFABÉTICA DE PROPOSIÇÕES REFERIDAS POR NOMES

Nome	**Número**	
Abs	**∗2·01.**	$\vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$
Add	**∗1·3.**	$\vdash : q . \supset . p \vee q$
Ass	**∗3·35.**	$\vdash : p . p \supset q . \supset . q$
Assoc	**∗1·5.**	$\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$
Comm	**∗2·04.**	$\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$
Comp	**∗3·43.**	$\vdash : p \supset q . p \supset r . \supset : p . \supset . q . r$
Exp	**∗3·3.**	$\vdash :. p . q . \supset . r : \supset : p . \supset . q \supset r$
Fact	**∗3·45.**	$\vdash :. p \supset q . \supset : p . r . \supset . q . r$
Id	**∗2·08.**	$\vdash . p \supset p$
Imp	**∗3·31.**	$\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : p . q . \supset . r$
Perm	**∗1·4.**	$\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$
Simp	**∗2·02.**	$\vdash : q . \supset . p \supset q$
“	**∗3·26.**	$\vdash : p . q . \supset . p$
“	**∗3·27.**	$\vdash : p . q . \supset . q$
Sum	**∗1·6.**	$\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$
Syll	**∗2·05.**	$\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$
“	**∗2·06.**	$\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset q$
“	**∗3·33.**	$\vdash : p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r$
“	**∗3·34.**	$\vdash : q \supset r . p \supset q . \supset . p \supset r$
Taut	**∗1·2.**	$\vdash : p \vee p . \supset . p$
Transp	**∗2·03.**	$\vdash : p \supset \sim q . \supset . q \supset \sim p$
“	**∗2·15.**	$\vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$
“	**∗2·16.**	$\vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$
“	**∗2·17.**	$\vdash : \sim q \supset \sim p . \supset . p \supset q$
“	**∗3 37.**	$\vdash :. p . q . \supset . r : \supset : p . \sim r . \supset . \sim q$
“	**∗4·1.**	$\vdash : p \supset q . \equiv . \sim q \supset \sim p$
“	**∗4·11.**	$\vdash : p \equiv q . \equiv . \sim p \equiv \sim q$

INTRODUÇÃO PARA A SEGUNDA EDIÇÃO[1]

Ao preparar esta nova edição de *Principia Mathematica*, os autores pensaram que seria melhor deixar o texto inalterado, exceto no que diz respeito a erros de impressão e erros menores[2], mesmo onde eles estavam cientes de possíveis melhorias. O motivo principal para essa decisão é que qualquer alteração nas proposições implicaria em alterações na referência, o que significaria um grande trabalho. Pareceu preferível, portanto, enunciar em uma introdução as melhorias principais que parecem desejáveis. Algumas delas dificilmente estão abertas a perguntas; outras são, até agora, uma questão de opinião.

A melhoria mais definitiva que resultou do trabalho em lógica matemática nos últimos quarenta anos foi a substituição, na Parte I, Seção A, do indefinível "p e q são incompatíveis" (ou, alternativamente, "p e q são ambos falsos") pelos dois indefiníveis "não-p" e "p ou q". Isso é devido ao Dr H. M. Sheffer[3]. Consequentemente, M. Jean Nicod[4] mostrou que uma proposição primitiva poderia substituir as cinco proposições primitivas $*1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$.

Disso se segue uma boa simplificação na construção de proposições moleculares e matrizes; $*9$ é substituído por um novo capítulo, $*8$, dado no Apêndice A a este volume.

Outro ponto sobre o qual não pode haver dúvida é que não há necessidade da distinção entre variáveis aparentes e variáveis reais, nem da ideia primitiva "asserção de uma função proposicional". Em todas as ocasiões em que, em *Principia Mathematica*, nós tivemos uma proposição asserida da forma " $\vdash. fx$" ou " $\vdash. fp$", isso deve ser tomado como significando " $\vdash. (x). fx$" ou " $\vdash. (p). fp$". Consequentemente, a proposição primitiva $*1\cdot11$ não é mais requerida. Tudo que é necessário, para adaptar as proposições, como foram impressas, a esta mudança, é a convenção de que quando o escopo de uma variável aparente é toda a proposição asserida em que ela ocorre, este fato não será explicitamente indicado a menos que "algum" esteja envolvido, em vez de "todo". Ou seja, " $\vdash. \phi x$" deve significar " $\vdash. (x). \phi x$"; mas em " $\vdash. (\exists x). \phi x$" ainda é necessário indicar explicitamente o fato de que "algum" x (não "todos os $x's$") está envolvido.

É possível indicar mais claramente do que foi feito anteriormente quais são as novidades introduzidas na Parte I, Seção B, comparada à Seção A. Elas são três em

[1] Nesta introdução, bem como nos apêndices, os autores estão sob grandes obrigações ao Sr. F. P. Ramsey, do *Kings College, Cambridge*, que leu o todo em MS. e contribuiu com críticas valorosas e sugestões.
[2] Em relação a estes, nós somos gratos a vários leitores, mas especialmente ao Dr. Behmann e Boscovitch, de Göttingen
[3] Trans. Amer. Math. Soc. Vol. xiv. pp. 481-448
[4]

número, duas sendo novidades lógicas essenciais e a terceira sendo meramente notacional

(1) Para o "p" da Seção A, nós substituímos "ϕx", para que no lugar de "$\vdash . (p).$" nós tivéssemos "$\vdash . (\phi, x). f(\phi x)$". Também, se nós tivermos "$\vdash . f(p, q, r, \ldots)$", nós devemos substituir ϕx, ϕy, ϕz, … por p, q, r, …, ou φx, φy, φz por p, q, e ψz, … por r, …, e assim por diante. Nós então obtemos um novo número de proposições gerais diferente daquelas da seção A.

(2) Nós introduzimos na Seção B a nova ideia primitiva "$(\exists x). \varphi x$", i.e., proposições de existência, que não ocorrem na Seção A. Em virtude da abolição das variáveis reais, proposições gerais da forma "$(p). fp$" ocorrem na Seção A, mas "$(\exists p). fp$" não ocorre.

(3) Por meio de definições, nós introduzimos na Seção B proposições gerais que são constituintes moleculares de outras proposições; então "$(x). \phi x . \vee . p$" deve significar "$(x). \phi x \vee p$".

São estas três novidades que distinguem a Seção B da Seção A.

Um ponto em relação ao qual a melhora é obviamente desejável é o axioma da redutibilidade (∗12·1·11). Este axioma tem uma justificação puramente pragmática: ele nos leva aos resultados desejados, e não a outros. Mas claramente não é o tipo de axioma com o qual nós podemos nos contentarmos. Nesse assunto, porém, não se pode dizer que uma solução satisfatória ainda é obtível. Dr Leon Chwistek[5] tomou o curso heroico de dispensar com o axioma sem adotar qualquer substituto; do seu trabalho, é claro que este curso nos compele a sacrificar uma boa parte da matemática ordinária. Há um outro caminho, recomendado por Wittgenstein[6] por razões filosóficas. Ele consiste em assumir que funções de proposições são sempre funções de verdade, e que uma função pode ocorrer apenas em uma proposição através de seus valores. Há dificuldades no caminho dessa posição, mas talvez elas não são intransponíveis.[7] Ela envolve a consequência de que todas as funções de funções são extensionais. Isso exige que mantenhamos que "A acredita que p" não é uma função de p. Como isso é possível é mostrado no *Tratado Lógico-Filosófico (loc. cit.* e pp. 19-21*)*. Nós não estamos preparados para afirmar que esta história certamente está correta, mas parece ter valido a pena trabalhar suas consequências nas páginas seguintes. Parece que tudo no Volume I permanece verdadeiro (talvez às vezes novas provas são requeridas); a teoria dos cardinais e ordinais indutivos sobrevive; mas parece que a teoria das séries Dedekindianas infinitas e bem ordenadas entra em colapso, de maneira que os irracionais, e os números reais geralmente, não podem ser adequadamente tratados. Também, a prova de Cantor de que $2^n > n$ não funciona a menos que n seja finito. Talvez algum outro axioma, menos objetável que o axioma da

[5] Em seu "Theory of Constructive Types". Veja referências no final desta Introdução.
[6] Tratado Lógico-Filosófico, ∗5·54 ff.
[7] Ver Apêndice C.

redutibilidade, possa dar estes resultados, mas nós não obtivemos sucesso em encontrar tal axioma.

Deve ser dito que um método novo e mais poderoso na lógica matemática foi inventado por Dr H. M. Sheffer. Este método, porém, demandaria uma completa re-escrita de *Principia Mathematica*. Nós recomendamos esta tarefa a Dr Sheffer, uma vez que o que já foi publicado até agora por ele é dificilmente suficiente para permitir outros a realizarem a reconstrução necessária.

Nós agora procedemos para o desenvolvimento detalhado do esboço geral acima.

I. PROPOSIÇÕES ATÔMICAS E MOLECULARES

Nosso sistema começa com "proposições atômicas". Nós a aceitamos como dadas, porque os problemas que surgirão em relação a elas pertencem à parte filosófica da lógica, e eles não são passíveis (pelo menos no presente) de tratamento matemático.

Proposições atômicas podem ser definidas negativamente como sendo proposições que não contêm partes que são proposições, nem contendo as noções "todo" ou "algum". Assim, "isto é vermelho", "isto é mais recente que aquilo", são proposições atômicas.

Proposições atômicas podem também ser definidas positivamente – e esta é a melhor maneira – como proposições dos seguintes tipos:

$R_1(x)$, significando "x tem o predicado R";

$R_2(x, y)$ [ou xR_2y], significando "x tem a relação R_2 (em intensão) com y";

$R_3(x, y, z)$, significando "x, y, z têm a relação triádica R_3 (em intensão)";

$R_4(x, y, z, w)$, significando "x, y, z, w têm a relação tetrádica R_4 (em intensão)";

e assim por diante *ad infinitum*, ou pelo menos o mais tempo possível. A lógica não sabe se há de fato relações n-ádicas (em intensão); esta é uma questão empírica. Nós sabemos como um fato empírico que há pelo menos relações diádicas (em intensão), porque sem elas, séries seriam impossíveis. Mas a lógica não está interessada neste fato; ela está preocupada apenas com a *hipótese* de haver proposições de tal-e-tal forma. Em certos casos, esta hipótese é ela própria da forma em questão, ou contém uma parte que é da forma em questão; nestes casos, o fato de que a hipótese pode ser formulada prova que ela é verdadeira. Mas mesmo quando a hipótese ocorre na lógica, o fato de que ela pode ser formulada não pertence em si mesmo à lógica.

Dadas todas as proposições atômicas verdadeiras, junto com o fato de que elas são todas, qualquer outra proposição verdadeira pode teoricamente ser deduzida por métodos lógicos. Isto é, o aparato de fato bruto requerido em provas pode ser todo condensado em proposições atômicas verdadeiras juntas com o fato de que toda proposição atômica verdadeira é uma das seguintes: (aqui a lista deve seguir). Se usado, este método presumivelmente envolveria uma enumeração infinita, uma vez que parece natural supor que o número de proposições atômicas verdadeiras é infinito, apesar de isso não dever ser considerado certo. Na prática, generalidade não é obtida pelo método de enumeração completa, porque este método requer mais conhecimento do que nós possuímos.

Nós devemos agora avançar para proposições moleculares. Deixe $p,\ q,\ r,\ s$ e t denotar, de início, proposições atômicas. Nós introduzimos a ideia primitiva

$$p|q$$

que deve ser lido "p é incompatível com q", e é verdadeiro sempre que pelo menos um dos dois ou ambos forem falsos. Assim, isso também pode ser lido como "p é falso ou q é falso"; ou também "p implica não-q". Mas como nós vamos definir a disjunção, a implicação e a negação em termos de $p|q$, é melhor evitarmos começar com estas formas de ler $p|q$. O símbolo "$p|q$" é pronunciado "p traço q". Nós agora botamos

$$\begin{array}{ll} \sim p. =. p|p & \text{Df,} \\ p \supset q. =. p|\sim q & \text{Df,} \\ p \vee q. =. \sim p|\sim q & \text{Df,} \\ p.q. =. \sim(p|q) & \text{Df.} \end{array}$$

Assim, toda as funções de verdade usuais podem ser construídas por meio do traço. Note que pelo que foi dito acima,

$$p \supset q. =. p|(q|q) \text{ Df.}$$

Tem-se que

$$p. \supset. q.r. \equiv. p|(q|r).$$

Assim, $p \supset q$ é um caso degenerado de uma função de *três* proposições.

Nós podemos construir novas proposições indefinidamente por meio do traço; por exemplo, $(p|q)|r,\ p|(q|r),\ (p|q)|(r|s)$, e assim por diante. Note que o traço obedece à lei permutativa $(p|q) \equiv (q|p)$, mas não à lei associativa $(p|q)|r \equiv p|(q|r)$. (Estes certamente são resultados para serem provados depois). Note também que, quando nós construímos uma nota proposição por meios do traço, nós não podemos saber da sua verdade ou falsidade a menos que (a) nós saibamos da verdade ou da falsidade de algum de seus constituintes, ou (b) pelo menos um de seus constituintes ocorre várias vezes em uma maneira adequada. O caso (a) interessa à lógica por dar origem à regra de inferência

Dado p e $p|(q|r)$, podemos inferir r.

Esta ou outra variação deve ser tomada como uma proposição primitiva. Para o momento, nós estamos a aplicando apenas quando $p,\ q$ e r são proposições atômicas, mas nós devemos estender isso mais tarde. Vamos considerar (b) em um momento.

Ao construir novas proposições por meio do traço, nós assumimos que ele pode ter em ambos os lados qualquer proposição construída, e não precisa ter uma proposição atômica dos dois lados. Assim, dadas três proposições atômicas, p, q e r, nós podemos formar, primeiro, $p|q$ e $q|r$, e então $(p|q)|r$ e $p|(q|r)$. Dadas quatro, $p,\ q,\ r$ e s, podemos formar

$$\{(p|q)|r\}|s,\ (p|q)|(r|s),\ p|\{q|(r|s)\}$$

e certamente outros ao permutar p, q, r e s. As três proposições acima são substancialmente diferentes. Na verdade, nós temos

$\{(p|q)|r\}|s. \equiv :. \sim p \sim q. r : \vee : \sim s,$
$(p|q)|(r|s). \equiv : p. q. \vee. r. s,$
$p|\{q|(r|s)\}. \equiv :. \sim p : \vee : q. \sim r\ \vee\ \sim s.$

Todas as proposições obtidas por este método se seguem de uma regra: em " $p|q$", substitui-se proposições já construídas por meio do traço por p ou q ou ambos. Esta regra gera uma montagem definida de novas proposições fora da montagem original de proposições atômicas. Todas as proposições já geradas (com exceção das proposições atômicas originais) serão chamadas "proposições moleculares". Assim, proposições moleculares são todas da forma $p|q$, mas p e q talvez não seja agora eles mesmo proposições moleculares. Se p é $p_1|p_2$, p, e p_2 podem ser moleculares; suponha que $p_1 = p_{11}|p_{12}$. p_{12} pode ser da forma $p_{111}|p_{112}$ e assim por diante; mas depois de um número finito de passos desse tipo, nós chegaremos a constituintes atômicos. Em uma proposição $p|q$, o traço entre p e q é chamado de traço "principal"; se $p = p_1|p_2$, o traço entre p_1 e p_2 é um traço secundário; bem como o traço entre q_1 e q_2 se $q = q_1|q_2$. Se $p_1 = p_{11}|p_{12}$, o traço entre p_{11} e p_{12} é um traço terciário, e assim por diante.

Proposições atômicas e moleculares juntas são "proposições elementares". Assim, proposições elementares são proposições atômicas junto com todas que podem ser gerada a partir delas por meio do traço aplicado qualquer número finito de vezes. Esta é uma montagem definitiva de proposições. Nós iremos agora, até novo aviso, usar as letras $p,\ q,\ r,\ s$ e t para denotar proposições elementares, não necessariamente proposições atômicas. A regra de inferência enunciada acima deve continuar valendo; *i.e.*

Se p, q e r são proposições elementares, então dado p e $p|(q|r)$, podemos inferir r.

Esta é uma proposição primitiva.

Nós podemos agora assumir o ponto (b) mencionado acima. Quando uma proposição molecular contém repetições de uma proposição constituinte de uma maneira adequada, pode-se saber se ela é verdadeira sem saber da verdade ou da falsidade de qualquer de seus constituintes. A instância mais simples é

$$p|(p|p),$$

que é sempre verdadeiro. Isso significa "p é incompatível com a incompatibilidade de p consigo mesmo", o que é óbvio. Novamente, considere "$p.q.\supset.p$". Isto é

$$\{(p|q)|(p|q)\}|(p|p).$$

Novamente, considere "$\sim p.\supset.\sim p \vee \sim q.$". Isto é

$$(p|q)|\{(p|q)|(p|q)\}.$$

Mais uma vez, "$p.\supset.p \vee q$" é

$$p|[\{(p|p)|(q|q)\}|\{(p|p)|(q|q)\}].$$

Todas elas são verdadeiras independentemente de quais *p* e *q* sejam escolhidos. É o fato de podermos construir verdades invariáveis deste tipo que faz com que proposições moleculares sejam importantes para a lógica. A lógica fica perdida com proposições atômicas, porque sua verdade ou falsidade só pode ser conhecida empiricamente. Mas a verdade de proposições moleculares de forma adequada pode ser conhecida universalmente sem evidência empírica.

As leis da lógica, no que diz respeito a proposições elementares, são todas proposições, no sentido de que quaisquer que sejam as proposições elementares $p, q, r, \ldots$, uma certa função

$$F(p, q, r, \ldots),$$

cujos valores são proposições moleculares, construídas por meio do traço, é sempre verdadeira. A proposição "$F(p)$ é verdadeiro, para qualquer proposição elementar que *p* possa ser" é denotada por

$$(p).F(p).$$

Similarmente, a proposição "$F(p, q, r, \ldots)$" é verdadeiro, para quaisquer proposições elementares que *p*, *q*, *r*, … possam ser" é denotada por

$$(p, q, r, \ldots).F(p, q, r, \ldots).$$

Quando tal proposição é *asserida*, nós devemos omitir o "$(p, q, r, \ldots)$" do começo. Assim,

$$\text{“} \vdash.F(p, q, r, \ldots)\text{”}$$

denota a asserção (em oposição à hipótese) de que $F(p, q, r, \ldots)$ é verdadeiro para quaisquer proposições elementares $p, q, r, \ldots$.

(A distinção entre proposições aparentes e reais, que ocorre em Frege e em *Principia Mathematica*, é desnecessária. Qualquer coisa que apareça como uma variável real em *Principia Mathematica* deve ser tomada como uma variável aparente cujo escopo é a totalidade da proposição asserida na qual ela ocorre.)

A regra de inferência, na forma dada acima, nunca é requerida em lógica, mas apenas quando a lógica é aplicada. Dentro da lógica, a regra requerida é diferente. Na lógica das proposições, que é o que nos preocupa atualmente, a regra usada é:

Dados "$\vdash . F(p, q, r, \ldots)$" e "$\vdash . F(p, q, r, \ldots) | \{G(p, q, r, \ldots) | H(p, q, r, \ldots)\}$", sendo p, q e r quaisquer proposições elementares, podemos inferir "$\vdash . H(p, q, r, \ldots)$".

Outras formas da regra de inferência nos encontrarão mais tarde. Para agora, a forma acima é a que usaremos.

Nicod mostrou que a lógica das proposições (∗1–∗5) pode ser deduzida, com a ajuda da regra de inferência, de duas proposições primitivas,

$$\vdash . p | (p | p) \text{ e}$$
$$\vdash : p \supset q . \supset . s | q \supset p | s.$$

O primeiro deles pode ser interpretado como "p é incompatível com não-p" ou como "p ou não-p", ou como "não (p e não-p)", ou como "p implica p". O segundo pode ser interpretado como

$$p \supset q . \supset : q \supset {\sim} s . \supset . p \supset {\sim} s,$$

que é a forma do princípio do silogismo. Escrito completamente em termos do traço, o princípio se torna

$$\{p | (q | q)\} | [\{(s | q) | ((p | s) | (p | s))\} | \{(s | q) | ((p | s) | (p | s))\}].$$

Nicod mostrou ainda que estes dois princípios podem ser substituídos por um. Escrito completamente em termos do traço, o único princípio é

$$\{p | (q | r)\} | [\{t | (t | t)\} | \{(s | q) | ((p | s) | (p | s))\}].$$

Será visto que, escrito desta forma, o princípio é menos completo que o segundo dos princípios escritos acima completamente em termos do traço. Quando interpretado pela linguagem da implicação, o princípio de Nicod se torna

$$p . \supset . q . r : \supset . t \supset t . s | q \supset p | s.$$

Nesta forma, ele parece mais complexo que

$$p \supset q . \supset . s | q \supset p | s,$$

mas em si mesmo, ele é menos complexo.

Das proposições primitivas acima, junto com a regra de inferência, tudo que a lógica pode indagar sobre proposições elementares pode ser provado, dado que nós adicionemos outra proposição primitiva, a saber, que, dada uma proposição

$(p, q, r, ...). F(p, q, r, ...)$, nós podemos substituir por $p, q, r, ...$, funções da forma

$$f_1(p, q, r, ...), f_2(p, q, r, ...), f_3(p, q, r, ...)$$

e asserir

$$(p, q, r, ...). F\{f_1(p, q, r, ...), f_2(p, q, r, ...), f_3(p, q, r, ...), ...\},$$

onde $f_1, f_2, f_3, ...$ são funções construídas por meio do traço. Uma vez que a primeira asserção se aplica a todas as proposições elementares, enquanto a última se aplica apenas a algumas, é óbvio que a primeira implica a última.

Preocuparemo-nos com uma forma mais geral deste princípio posteriormente.

II. FUNÇÕES ELEMENTARES DE INDIVÍDUOS

1. *Definição de "indivíduo"*

Nós vimos que proposições atômicas uma da série de formas:

$$R_1(x), R_2(x, y), R_3(x, y, z), R_4(x, y, z, w), ...$$

Aqui, $R_1, R_2, R_3, R_4, ...$ são cada características da forma especial em que elas ocorrem: isto é, R_n não pode ocorrer em uma proposição atômica $R_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a menos que $n = m$, e então só pode ocorrer como R_m ocorre, não como $x_1, x_2, \ldots$ x_m ocorrem. Por outro lado, qualquer termo que pode ocorrer como os $x's$ ocorrem em $R_n(x_1, x_2, ... x_n)$ pode também ocorrer como um dos $x's$ em $R_m(x_1, x_2, ... x_m)$ mesmo se m não for igual a n. Termos que podem ocorrer de qualquer forma em proposições atômicas são chamados "indivíduos" ou "particulares"; termos que ocorrem como os R's são chamados de "universais".

Nós podemos enunciar nossa definição compendiamente como o seguinte: Um "indivíduo" é qualquer coisa que pode ser o sujeito de uma proposição atômica.

Dado uma proposição atômica $R_n(x_1, x_2, ... x_n)$, nós devemos chamar cada um dos $x's$ um "constituinte" da proposição, e Rn um "componente" da proposição[8]. Nós devemos dizer o mesmo em relação a qualquer proposição molecular em que $R_n(x_1, x_2, ... x_n)$ ocorre. Dada uma proposição elementar $p|q$, em que p e q podem ser atômicas ou moleculares, nós devemos chamar p e q "partes" de $p|q$; e qualquer parte de p ou q será, por sua vez, chamada parte de $p|q$, e assim por diante até que

[8] Esta terminologia é tomada de Wittgensteins.

cheguemos nas partes atômicas de $p|q$. Assim, dizer que uma proposição r "ocorre em" $p|q$ e dizer que r é uma "parte" de $p|q$ será sinônimo.

2. *Definição de uma função elementar de indivíduo*

Dada qualquer proposição elementar que contém uma parte da qual um indivíduo *a* é um constituinte, outras proposições podem ser obtidas ao substituir *a* por outros indivíduos em sucessão. Nós obtemos, então, uma certa montagem de proposições elementares. Podemos chamar a proposição original ϕa, e então a função proposicional obtida ao colocar a variável x no lugar de a será chamada ϕx. Assim, ϕx é uma função da qual x é o argumento e os valores são proposições elementares. O uso essencial de "ϕx" é que ele reúne um certo conjunto de proposições, nomeadamente todas aquelas que são seus valores com diferentes argumentos.

Nós já tivemos várias funções especiais de proposições. Se p é uma parte de alguma proposição molecular, nós podemos considerar o conjunto das proposições que resultam da substituição de outras proposições por p. Se nós chamamos a proposição molecular original de fp, o resultado de substituir q é chamado fq.

Quando um indivíduo ou uma proposição ocorre duas vezes em uma proposição, três funções podem ser obtidas, ao variar apenas uma, ou apenas outra, ou ambas as ocorrências. Por exemplo, $p|q$ é um valor de qualquer uma das três funções $p|q$, $q|p$, $q|q$, onde q é o argumento. Considerações similares se aplicam quando um argumento ocorre mais que duas vezes. Assim, $p|(p|p)$ é um valor de $q|(r|s)$, ou $q|(r|q)$, ou $q|(q|r)$, ou $q|(r|r)$, ou $q|(q|q)$. Quando nós asserimos uma proposição "$\vdash . (p). Fp$", o p deve ser variado sempre que ele ocorrer. Nós podemos asserir similarmente uma proposição da forma "$(x). \phi x$", significando "todas as proposições construídas pela construção indicada por ϕx são verdadeiras"; aqui, também, toda ocorrência de x deve ser variada.

3. *"Sempre verdadeiro" e "Às vezes verdadeiro"*

Dada qualquer função, pode ocorrer que todos os seus valores são verdadeiros; novamente, pode ocorrer que pelo menos um dos seus valores é verdadeiro. A proposição de que todos os valores de uma função $\phi(x, y, z, \ldots)$ são verdadeiros é expressa pelo símbolo

$$\text{"}(x, y, z, \ldots). \phi(x, y, z, \ldots)\text{"},$$

a menos que nós queiramos asseri-la, caso cuja asserção é escrita

$$\text{"} \vdash . \phi(x, y, z, \ldots)\text{"}.$$

Nós já tivemos asserções deste tipo onde as variáveis eram proposições elementares. Nós queremos agora considerar o caso em que as variáveis são indivíduos e a função é elementar, i.e. todos os seus valores são proposições elementares. Nós não queremos mais nos confinar ao caso em que é *asserido* que todos os valores de $\phi(x, y, z, \ldots)$ são verdadeiros; nós queremos estar aptos a fazer a proposição

$$(x, y, z, \ldots) . \phi(x, y, z, \ldots)$$

ser uma parte de uma 'função-traço'. Para o momento, porém, nós ignoraremos este desiderato, que nos ocupará na Seção III desta Introdução.

Em adição à proposição de que uma função ϕx é "sempre verdadeira" (i.e. $(x) . \phi x$), nós precisamos também da proposição de que ϕx é "às vezes verdadeira", i.e é verdadeira para pelo menos um valor de x. Isso nós denotamos por

$$\text{“}(\exists x) . \phi x\text{”}.$$

Similarmente, a proposição de que ϕ é "às vezes verdadeira" é denotada por

$$\text{“}(\exists x, y, z, \ldots) . \phi(x, y, z, \ldots)\text{”}.$$

Nós precisamos, em adição a $(x, y, z, \ldots) . \phi(x, y, z, \ldots)$ e a $(\exists x, y, z, \ldots) . \phi(x, y, z, \ldots)$, de várias outras proposições de um tipo análogo. Considere primeiro uma função de duas variáveis. Nós podemos formar

$$(\exists x) : (y) . \phi(x, y), (x) : (\exists y) . \phi(x, y), (x) . \phi(x, y), (y) : (\exists x) . \phi(x, y).$$

Estas são proposições substancialmente diferentes, das quais nunca há duas equivalentes. Pareceria ser natural, ao formar estas proposições, considerar a função $\phi(x, y)$ como sendo formada em dois estágios. Dado $\phi(a, b)$, onde a e b são constantes, nós podemos primeiro formar uma função $\phi(a, y)$, contendo uma variável y; nós podemos então formar

$$(y) . \phi(a, y) \text{ e } (\exists y) . \phi(a, y).$$

Nós podemos agora variar a, obtendo novamente uma função de uma variável, e levando às quatro proposições

$$(x) : (y) . \phi(x, y), (\exists x) : (y) . \phi(x, y), (x) : (\exists y) . \phi(x, y), (\exists x) : (\exists y) . \phi(x, y).$$

Por outro lado, nós poderíamos ter ido de $\phi(a, b)$ para $\phi(x, b)$, e então para $(x) . \phi(x, b)$ e $(\exists x) . \phi(x, b)$, e então para

$$(y) : (x) . \phi(x, y), (\exists y) : (x) . \phi(x, y), (y) : (\exists x) . \phi(x, y), (\exists y) : (\exists x) . \phi(x, y).$$

Todas estas serão chamadas "proposições gerais"; assim, oito proposições gerais podem ser derivadas da função $\phi(x, y)$. Nós temos

$$(x) : (y) . \phi(x, y) : \equiv : (y) : (x) . \phi(x, y), (\exists x) : (\exists y) . \phi(x, y) : \equiv : (\exists y) : (\exists x) . \phi(x, y).$$

Mas não há outras equivalências que sempre valem. Por exemplo, a distinção entre "$(x):(\exists y).\phi(x, y)$" e "$(\exists y):(x).\phi(x, y)$" é a mesma distinção em análise entre "Para todo ϵ, por menor que seja, há um δ tal que ..." e "Há um δ tal que, para todo ϵ, por menor que seja, ...".

Apesar de parecer mais fácil, com vistas às considerações feitas acima, considerar toda função com muitas variáveis como obtidas por passos sucessivos, cada um envolvendo apenas uma função de uma variável, há ainda considerações poderosas do outro lado. Há dois fundamentos em favor de um método passo-a-passo; primeiro, que apenas funções de *uma* variável precisa ser tomada como uma ideia primitiva; segundo, que definições como as dadas acima parecem requerer que nós devemos primeiro variar x, mantendo y constante, *ou* que nós devemos primeiro variar y, mantendo x constante. O primeiro caso parece estar envolvido quando "(y)" ou "$(\exists y)$" aparece à direita de "(x)" ou "$(\exists x)$", e o último caso é o inverso. Os fundamentos contra o método passo-a-passo são que ele interfere com o método de matrizes, que coloca ordem na geração sucessiva de tipos de proposições e funções demandada pela teoria dos tipos, e que ele requer que nós, desde o início, lidemos com tais proposições como $(y).\phi(a, y)$, que não são elementares. Considere, por exemplo, a proposição "$\vdash: q . \supset . p \vee q$". Isso será

$$\vdash :. (p) :. (q) : q . \supset . p \vee q,$$
$$\vdash :. (q) :. (p) : q . \supset . p \vee q,$$

e então envolverá todos os valores de

$(q): p . \supset . p \vee q$, considerado como uma função de p, ou
$(p): q . \supset . p \vee q$, considerado como uma função de q.

Isso torna impossível iniciar nossa lógica com proposições elementares, como nós desejamos fazer. É inútil aumentar a definição de proposições elementares, uma vez que isso apenas aumenta os valores de q ou p nas funções acima. Assim, parece necessário iniciar com uma função elementar

$$\phi(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n),$$

antes da qual nós escrevemos, para cada x_r, ou "(x_r)" ou "$(\exists x_r)$", sendo as variáveis tomadas nesse processo me qualquer ordem que quisermos. Assim, $\phi(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ é chamada a "matriz", e o que vem antes dela é chamada de "prefixo". Assim, em

$$(\exists x):(y).\phi(x, y),$$

"$\phi(x, y)$" é a matriz e "$(\exists x):(y)$" é o prefixo. Parece, então, que uma matriz contendo n variáveis faz surgir $n!2^n$ proposições ao tomar suas variáveis em todas as ordens possíveis e distinguindo "(x_r)" e "$(\exists x_r)$" em cada caso. (Alguns deles, no entanto, são equivalentes). O processo de obter tais proposições de uma matriz será chamado "generalização", se nós pegarmos "todos os valores" ou "alguns valores", e as proposições que resultarem daí serão chamadas "proposições gerais".

Nós teremos uma oportunidade mais tarde de considerar matrizes contendo variáveis que não são indivíduos; nós podemos, portanto, dizer:

Uma "matriz" é uma função para qualquer número de variáveis (que podem ser ou não ser indivíduos), que tem proposições elementares como seus valores, e é usada para o propósito da generalização.

Uma "proposição geral" é uma derivada de uma matriz por generalização. Nós devemos adicionar mais uma definição neste momento:

Uma "proposição de primeira ordem" é uma derivada por generalização de matrizes em que todas as variáveis são indivíduos.

4. *Métodos para provar proposições gerais*

Há dois métodos fundamentais para provar proposições gerais, um para proposições universais e outro para aquelas que asserem existência. O método de provar proposições universais é como se segue. Dada uma proposição

$$\text{“} \vdash . F(p,\ q,\ r,\ \ldots)\text{”},$$

em que F é construído pelo traço e p, q, r, … são elementares, nós podemos substituí-los por funções elementares de indivíduos da maneira que nós quisermos, colocando

$$p = f_1(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n),$$
$$q = f_2(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n),$$

e assim por diante, e então asserir o resultado para todos os valores de $x_1,\ x_2,\ \ldots x_n$. O que nós então asserimos é menos que a asserção original, uma vez que p, q, r, … pode originalmente tomar todos os valores que são proposições elementares, ao passo que agora eles podem tomar apenas valores tais como $f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots$ (quaisquer dois ou mais de $f_1,\ f_2,\ f_3,$ … podem ser idênticos).

Para provar teoremas de existência, nós temos duas proposições primitivas, a saber,

*8·1. $\vdash . (\exists x, y) . \phi a | (\phi x | \phi y)$ e
*8·11. $\vdash . (\exists x) . \phi x | (\phi a | \phi b)$

Aplicando as definições a serem dadas em breve, elas asserem respectivamente

$$\phi a . \supset . (\exists x) . \phi x \text{ e}$$
$$(x) . \phi x . \supset . \phi a . \phi b.$$

Estas duas proposições primitivas devem ser assumidas, não apenas para uma variável, mas para qualquer número. Assim, nós assumimos

$\phi(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n).\supset.(\exists x_1,\ x_2,\ \ldots x_n).\phi(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n), (x_1,\ x_2,\ \ldots x_n).\phi(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n).\supset.\phi(a_1$

A proposição $(x).\phi x.\supset.\phi a.\phi b$, nesta forma, não parece adequada para provar teoremas de existência. Mas ela pode ser escrita como

$$(\exists x).\sim\phi x.\vee.\phi a.\phi b \text{ ou}$$
$$\sim\phi a \vee \sim\phi b.\supset.(\exists x).\sim\phi x,$$

forma em que ela é idêntica a $*9\cdot11$, escrevendo ϕ para $\sim\phi$. Assim, nossas duas proposições primitivas são as mesmas que $*9\cdot1$ e $*9\cdot11$.

Para propósitos de inferência, nós continuamos assumindo que de $(x).\phi x$ e $(x).\phi x \supset \psi x$ nós podemos inferir $(x).\psi x$, e de p e $p \supset q$ nós podemos inferir q, mesmo quando as funções de proposições envolvidas não são elementares.

Teoremas de existência frequentemente são obtidos as proposições primitivas acima da seguinte maneira. Suponha que nós saibamos uma proposição

$$\vdash.f(x,\ x).$$

Uma vez que $\phi x.\supset.(\exists y).\phi y$, nós podemos inferir

$$\vdash.(\exists y).f(x,\ y), \text{ i.e}$$
$$\vdash:(x):(\exists y).f(x,\ y).$$

Similarmente,

$$\vdash:(y):(\exists x).f(x,\ y).$$

Novamente, uma vez que $\phi(x,\ y).\supset.(\exists z,\ w).\phi(z,\ w)$, nós podemos inferir

$$\vdash.(\exists x,\ y).f(x,\ y) \text{ e}$$
$$\vdash.(\exists y,\ x).f(x,\ y).$$

Nós podemos ilustrar as provas tanto de proposições universais quanto de existência por simples exemplos. Nós temos

$$\vdash.(p).p \supset p.$$

Então, substituindo ϕx por p,

$$\vdash.(x).\phi x \supset \phi x.$$

Então, como no caso de $f(x,\ x)$ acima,

$$\vdash:(x):(\exists y).\phi x \supset \phi y, \vdash:(y):(\exists x).\phi x \supset \phi y, \vdash.(\exists x,\ y).\phi x \supset \phi y.$$

Além de axiomas especiais asserindo teoremas de existência (tais como o axioma da redutibilidade, o axioma multiplicativo, e o axioma do infinito), as duas proposições primitivas acima dão o único método de se provar teoremas de existência em lógica. Elas são, na verdade, sempre derivadas de proposições gerais da forma $(x).f(x,\ x)$ ou $(x).f(x,\ x,\ x)$, ou etc., pela substituição de outras variáveis por algumas das ocorrências de x.

III. PROPOSIÇÕES GERAIS DE ESCOPO LIMITADO

Em virtude de uma proposição primitiva, dado $(x).\,\phi x$ e $(x).\,\phi x \supset \psi x$, nós podemos inferir $(x).\,\psi x$. Até agora, porém, nós não introduzimos uma notação que nos permite enunciar a *implicação* (em oposição a *inferência*) correspondente. Novamente, $(\exists x).\,\phi x\ e\ (x,\ y).\,\phi x \supset \psi x$ nos permite inferir $(y).\,\psi y$; aqui, novamente, nós queremos poder enunciar a implicação correspondente. Até então, nós apenas definimos ocorrências de proposições gerais como proposições asseridas completas. Teoricamente, este é seu único uso, e não há necessidade de definir nenhum outro. Mas praticamente, é altamente conveniente poder tratá-las como partes de funções-traço. Esta é uma questão inteiramente de definição. Ao introduzir definições adequadas, proposições de primeira ordem podem ser mostradas satisfazer todas as proposições de ∗1–∗5. Então, ao usar as proposições de ∗1–∗5, não será mais necessário assumir que $p,\ q,\ r$ ... são elementares.

As definições fundamentais são dadas abaixo.

Quando uma proposição geral ocorre como parte de outra, é dito que ela tem escopo limitado. Se ela contém uma variável aparente x, o escopo de x é dito ser limitado à proposição geral em questão. Assim, em $p|\{(x).\,\phi x\}$, o escopo de x é limitado a $(x).\,\phi x$, enquanto em $(x).\,p|\phi x$, o escopo de x se estende para toda a proposição. O escopo é indicado por pontos.

O novo capítulo ∗8 (dado no Apêndice A) deve substituir o ∗9 em *Principia Mathematica*. Seu procedimento geral, porém, será explicado agora.

A ocorrência de uma proposição geral como parte de uma função-traço é definida por meio das seguintes definições:

$$\{(x).\,\phi x\}|q.=.(\exists x).\,\phi x|q \quad \text{Df,}$$
$$\{(\exists x).\,\phi x\}|q.=.(x).\,\phi x|q \quad \text{Df,}$$
$$p|\{(y).\,\psi y\}.=.(\exists y).\,p|\psi y \quad \text{Df,}$$
$$p|\{(\exists y).\,\psi y\}.=.(y).\,p|\psi y \quad \text{Df.}$$

Elas definem, em primeiro lugar, apenas o que é significado pelo traço quando ele ocorre entre duas proposições das quais uma é elementar enquanto a outra é de primeira ordem. Quando o traço ocorre entre duas proposições que são ambas de primeira ordem, nós devemos adotar a convenção de que a proposição à esquerda deve ser eliminada primeiro, tratando a da direita como se ela fosse elementar; então a da direita deve ser eliminada, em cada caso, de acordo com as definições acima. Assim,

$$\{(x).\,\phi x\}|\{(y).\,\psi y\}.=:(\exists x):\phi x|\{(y).\,\psi y\}:$$
$$=:(\exists x):(\exists y).\,\phi x|\psi y,$$
$$\{(x).\,\phi x\}|\{(\exists y).\,\psi y\}.=:(\exists x):\phi x|\{(\exists y).\,\psi y\}:$$
$$=:(\exists x):(y).\,\phi x|\psi y,$$

$$\{(\exists x).\,\phi x\}|\{(y).\,\psi y\}.=:(x):(\exists y).\,\phi x|\psi y.$$

A regra sobre a ordem da eliminação é apenas requerida por amor à definibilidade, uma vez que as duas ordens dão resultados equivalentes. Por exemplo, na última das instâncias acima, se nós tivéssemos eliminado o y antes, nós teríamos obtido

$$(\exists y):(x).\,\phi x|\psi y,$$

que requer $(x).\sim\phi x$ ou $(\exists y).\sim\psi y$, e é então verdadeiro.

E $$(x):(\exists y).\,\phi x|\psi y$$

é verdadeiro nas mesmas circunstâncias. A possibilidade de se mudar a ordem das variáveis no prefixo se dá apenas por conta da maneira em que elas ocorrem, i.e., por conta do fato de que x apenas ocorre em um lado do traço e y apenas no outro. A ordem das variáveis no prefixo é indiferente, sempre que ocorrências de uma variável estão todas de um lado de um certo traço, enquanto aquelas da outra estão todas no outro lado dele. Nós não temos em geral

$$(\exists x):(y).\,\chi(x,\ y):\equiv:(y):(\exists x).\,\chi(x,\ y);$$

aqui, o lado direito é mais frequentemente verdadeiro que o esquerdo. Mas nós temos

$$(\exists x):(y).\,\phi x|\psi y:\equiv:(y):(\exists x).\,\phi x|\psi y.$$

A possibilidade de alterar a ordem das variáveis no prefixo quando elas estão separadas por um traço é uma proposição primitiva. No geral, é conveniente colocar à esquerda as variáveis com as quais o "todo" está envolvido, e à direita aquelas com as quais o "algum" está envolvido, depois que a eliminação tiver sido terminada, sempre assumindo que as variáveis ocorrem de uma maneira à qual nossa proposição primitiva é aplicável.

Não é necessário, para a proposição primitiva acima, que o traço que separa x e y seja o traço principal, e.g.

$$p|[\{(\exists x).\,\phi x\}|\{(y).\,\psi y\}].=.\,p|[(x):(\exists y).\,\phi x|\psi y].$$

$=:(\exists x):(y).\,p|(\phi x|\psi x):$

$\equiv:(y):(\exists x).\,p|(\phi x|\psi y).$

Tudo o que é necessário é que haja *algum* traço que separe o x do y. Quando este não é o caso, a ordem não pode em geral ser mudada. Considere, por exemplo, a matriz

$$\phi x\ \vee\ \psi y.\sim\phi x\ \vee\ \sim\psi y.$$

Isso pode ser escrito como $(\phi x\ \supset\ \psi y)|(\psi y\ \supset\ \phi x)$,

ou $\{\phi x|(\psi y|\psi y)\}|\{\psi y|(\phi x|\phi x)\}.$

Aqui não há um traço que separe todas as ocorrências de x de todas aquelas de y, e na verdade, as duas proposições

$$(y):(\exists x).\,\phi x\ \vee\ \psi y.\sim\phi x\ \vee\ \sim\psi y$$
e $$(\exists x):(y).\,\phi x\ \vee\ \psi y.\sim\phi x\ \vee\ \sim\psi y$$

não são equivalentes exceto para valores especiais de ϕ e ψ.

Por meio das definições acima, nós somos capazes de derivar todas as proposições, de qualquer ordem, da matriz de proposições elementares combinadas por meio do traço. Dada qualquer matriz, contendo uma parte p, nós podemos substituir p por ϕx ou $\phi(x,\ y)$ ou etc., e continuar adicionando o prefixo (x) ou $(\exists x)$ ou $(x,\ y)$ ou $(x)\colon(\exists y)$ ou $(y)\colon(\exists x)$ ou etc. Se p e q ambos ocorrerem, nós podemos substituir p por ϕx e q por ψy, ou nós podemos substituir ambos por ϕx, ou um por ϕx e outro por alguma função-traço de ϕx.

No caso de uma proposição tal como

$$p|\{(x)\colon(\exists y).\psi(x,\ y)\},$$

nós devemos tratá-la como um caso de $p|\{(x).\phi x\}$, e primeiro eliminar x. Então,

$$p|\{(x)\colon(\exists y).\psi(x,\ y)\}.=\colon(\exists x)\colon(y).p|\psi(x,\ y).$$

Isto é, as definições de $\{(x).\phi x\}|q$ etc. devem ser aplicáveis sem mudança quando ϕx não é uma função elementar.

As definições de $\sim p,\ p \vee q,\ p.q,\ p \supset q$ devem ser tomadas inalteradas. Então,

$$\sim\{(x).\phi x\}.=\colon\{(x).\phi x\}|\{(x).\phi x\}\colon \qquad =\colon(\exists x)\colon\phi x|\{(x).\phi x\}\colon \qquad =\colon(\exists$$

Será visto que no que foi exposto acima, duas variáveis ocorrem onde apenas uma poderia ser esperada. Descobriremos, em pouco tempo, que as duas variáveis podem ser reduzidas a uma; i.e, teremos

$$(\exists x)\colon(\exists y).\phi x|\phi y\colon\equiv.(\exists x).\phi x|\phi x,(x)\colon(y).\phi x|\phi y\colon\equiv.(x).\phi x|\phi x.$$

Isso nos leva a

$$\sim\{(x).\phi x\}.\equiv.(\exists x).\sim\phi x,\sim\{(\exists x).\phi x\}.\equiv.(x).\sim\phi x.$$

Mas nós não podemos provar estas proposições no nosso estágio presente; ainda que pudéssemos, elas não seriam de muito uso para nós, pois nós ainda não sabemos que, quando duas proposições gerais são equivalentes, uma pode ser substituída pela outra como parte de uma proposição-traço sem perder o valor verdade.

Para o presente, portanto, suponha que nós temos uma função-traço em que p ocorre várias vezes, digamos, $p|(p|p)$, e nós queremos substituir p por $(x).\phi x$; nós devemos escrever a segunda ocorrência de p como "$(y).\phi y$", e a terceira como "$(z).\phi z$". Assim, a proposição resultante conterá tantas variáveis separadas quantas são as ocorrências de p.

As proposições primitivas requeridas, que já foram mencionadas, são quatro em número. Elas são as seguintes:

(1) $\vdash.(\exists x,\ y).\phi a|(\phi x|\phi y)$, i.e., $\vdash\colon\phi a.\supset.(\exists x).x$.

(2) $\vdash.(\exists x).\phi x|(\phi a|\phi b)$, i.e., $\vdash\colon(x).\phi x.\supset.\phi a.\phi b$.

(3) A regra de inferência estendida, i.e., de $(x).\phi x$ e $(x).\phi x \supset \psi x$ nós podemos inferir $(x).\psi x$, mesmo quando ϕ e ψ não são elementares
(4) Se todas as ocorrências de x estão separadas de todas as ocorrências de y por um certo traço, a ordem de x e y pode ser mudada no prefixo, i.e.

Para $(\exists x):(y)\phi x|\psi y$ nós podemos substituir $(y):(\exists x).\phi x|\psi y$, e *vice-versa*, mesmo quando esta é a única parte de toda a proposição asserida.

As proposições primitivas acima devem ser assumidas não apenas para uma variável, mas para qualquer número.

Por meios das proposições primitivas acima, pode-se provar que todas as proposições de $*1$–$*5$ se aplicam igualmente quando uma ou mais das proposições $p,\ q,\ r,\ \ldots$ envolvidas não são elementares. Para este propósito, nós fazemos uso do trabalho de Nicod, que provou que as proposições primitivas de $*1$ podem ser todas deduzidas de

$\vdash.\,p \supset p$ e
$\vdash.\,p \supset p.\supset.\,s|q \supset p|s,$

junto com a regra de inferência: "Dado p e $p|(q|r)$, podemos inferir r".

Assim, tudo o que temos que fazer é mostrar que as proposições acima permanecem verdadeiras quando $p,\ q,\ s$, ou algum deles, não são elementares. Isto é feito em $*8$ no Apêndice A.

IV. FUNÇÕES COMO VARIÁVEIS

O uso essencial de uma variável é para escolher uma certa montagem de proposições elementares e nos permitir asserir que todos os membros dessa construção são verdadeiros, ou que pelo menos um membro é verdadeiro. Nós já usamos funções de indivíduos, ao substituir ϕx por p nas proposições de $*1$–$*5$, e pelas proposições primitivas de $*8$. Mas até então, nós supusemos sempre que a função é mantida constante enquanto o indivíduo varia, e nós não consideramos casos em que nós temos "$\exists\phi$", ou onde o escopo de "ϕ" é menos que toda a proposição asserida. É necessário agora considerar tais casos.

Suponha que a é uma constante. Então "ϕa" denotará, para os vários valores de ϕ, todas as várias proposições elementares das quais a é um constituinte. Isto é uma montagem de proposições elementares diferente de qualquer uma que pode ser obtida pela variação de indivíduos; consequentemente, ela dá origem a novas proposições gerais. Os valores da função continuam sendo proposições elementares, assim como o argumento é um indivíduo; mas elas são uma nova montagem de proposições elementares, diferentes das montagens prévias.

Como teremos a oportunidade de considerar posteriormente funções cujos valores não são proposições elementares, nós distinguiremos aquelas que têm proposições elementares como seus valores por um ponto de exclamação entre a letra denotando a função e a letra denotando o argumento. Assim, "$\phi ! x$" é uma função de duas variáveis, x e $\phi ! \hat{z}$. Ela é uma matriz, uma vez que ela não contém variáveis aparentes e tem proposições elementares como seus valores. Nós devemos, daqui em diante, escrever "$\phi ! x$" onde nós tivemos até então escrito ϕx.

Se nós substituirmos x por uma constante a, nós podemos formar proposições como

$$(\phi).\phi ! a,\ (\exists \phi).\phi ! a.$$

Estas não são proposições elementares, e não são, portanto, da forma $\phi ! a$. A asserção de tais proposições é derivada de matrizes pelo método de $*8$. As proposições primitivas de $*8$ devem ser aplicadas quando as variáveis, ou alguma delas, são funções elementares assim como quando elas são todas indivíduos.

Uma função só pode ocorrer em uma matriz através de seus valores[9]. Para obter uma matriz, proceda, como antes, escrevendo $\phi ! x,\ \psi ! y,\ \chi ! z,\ ...$ no lugar de $p,\ q,\ r,\ ...$ em alguma proposição molecular construída por meio do traço. Nós podemos, então, aplicar as regras de $*8$ a $\phi,\ \psi,\ \chi,\ ...$ assim como a $x,\ y,\ z,\ ...$. A diferença entre uma função de um indivíduo e uma função de uma função elementar de indivíduos é que, na primeira, a passagem de um valor para outra é feita ao se fazer a mesma afirmação sobre um indivíduo diferente, enquanto que na segunda, ela é feita ao se fazer uma afirmação diferente sobre o mesmo indivíduo. Assim, a passagem de "Sócrates é mortal" para "Platão é mortal" é uma passagem de $f ! x$ para $f ! y$, mas a passagem de "Sócrates é mortal" para "Sócrates é sábio" é uma passagem de $\phi ! a$ para $\psi ! a$. Variação funcional está envolvida em proposições como: "Napoleão tinha todas as características de um grande general".

Tomando a coleção de proposições elementares, toda matriz tem valores que pertencem a essa coleção. Toda proposição geral resulta de alguma matriz por generalização[10]. Toda matriz intrinsecamente determina uma certa classificação de proposições elementares, que por sua vez determina o escopo da generalização daquela matriz. Assim, "$x\ ama\ Sócrates$" escolhe uma certa coleção de proposições, generalizadas em "$(x).x\ ama\ Sócrates$" e "$(\exists x).x\ ama\ Sócrates$". Mas "$\phi ! Sócrates$" escolhe aquela, entre as proposições elementares, que menciona Sócrates. As generalizações "$(\phi).\phi ! Sócrates$" e "$(\exists \phi).! Sócrates$" envolve uma classe de proposições elementares que não podem ser obtidas de uma variável individual. Mas qualquer valor de "$\phi ! Sócrates$" é uma proposição elementar ordinária; a novidade introduzida pela variável ϕ é uma novidade de classificação, não

[9] Esta assunção é fundamental na seguinte teoria. Ela tem suas dificuldades, mas para o momento nós as ignoraremos. Ela toma o lugar (não tão adequadamente) do axioma da redutibilidade. Ela é discutida no Apêndice C.
[10] Em uma proposição da lógica, todas as variáveis na matriz devem ser generalizadas. Em outras proposições gerais, como "todos os homens são mortais", algumas das variáveis na matriz são substituídas por constantes.

de material classificado. Por outro lado, $(x). x\ ama\ Sócrates$, $\phi! Sócrates$, etc. são proposições novas, não contidas dentre as proposições elementares. É da conta de ∗8 mostrar que estas proposições obedecem às mesmas regras que as proposições elementares. O método de prova torna irrelevante o que as variáveis são, contanto que todas as funções em questão tenham valores que são proposições elementares. As variáveis podem ser elas próprias funções elementares, como elas são em ∗1–∗5.

Uma função de variável que tem valores que não são proposições elementares inicia um novo conjunto. Mas variáveis deste tipo parecem desnecessárias. Todas as proposições elementares são um valor de $\phi! \hat{x}$; portanto,

$$(p). fp. \equiv. (\phi,\ x). f(\phi! x) \colon (\exists p). fp. \equiv. (\exists\phi,\ x). f(\phi! x).$$

Assim, todas as proposições de segunda ordem em que a variável é uma proposição elementar pode ser derivada de matrizes elementares. A questão de outras proposições de segunda ordem será lidada na próxima seção. Uma função de duas variáveis, digamos, $\phi(x,\ y)$, seleciona uma certa classe de classes de proposições. Nós devemos ter a classe $\phi(a,\ y)$, para um dado a e uma variável y; então a classe de todas as classes $\phi(a,\ y)$ conforme a varia. Se nós devemos considerar nossa função como dando classes $\phi(a,\ y)$ ou $\phi(x,\ b)$ depende da ordem da generalização adotada. Então, "$(\exists x) \colon (y)$" envolve $\phi(a,\ y)$, mas "$(y) \colon (\exists x)$" envolve $\phi(x,\ b)$.

Considere agora a matriz $\phi! x$ como uma função de duas variáveis. Se nós primeiro variarmos x, mantendo ϕ fixado (o que parece ser a ordem mais natural), nós formamos uma classe de proposições $\phi! x,\ \phi! y,\ \phi! z,\ \ldots$ que difere somente pela substituição de um indivíduo por outro. Tendo feito uma tal classe, nós fazemos outra, e assim por diante, até que nós tenhamos feito isso de todas as maneiras possíveis. Mas agora suponha que nós variamos ϕ primeiro, mantendo x fixado e igual a a. Nós então formamos primeiro a classe de todas as proposições da forma $\phi! a$, i.e, todas as proposições elementares das quais a é um constituinte; nós então formamos a classe $\phi! b$; e assim por diante. O conjunto de proposições que são valores de $\phi! a$ é um conjunto não obtível pela variação de indivíduos, i.e, não da forma fx [para f constante e x variável]. Isso é o que faz ϕ ser um novo tipo de variável, diferente de x. Isso também é o motivo de a generalização da forma $(\phi). F! (\phi! \hat{z},\ x)$ dar uma função que não é da forma $f! x$ [para f constante]. Observe também que enquanto que a é um constituinte de $f! a$, f não é; assim, a matriz $\phi! x$ tem a peculiaridade de que, quando um valor é atribuído a x, este valor é um constituinte do resultado, mas quando um valor é atribuído a ϕ, este valor é absorvido na proposição resultante, e desaparece completamente. Nós podemos definir uma função $\phi! \hat{x}$ como aquela similaridade entre proposições que existem quando uma resulta da outra pela substituição de um indivíduo por outro.

Nós vimos que há matrizes contendo, como variáveis, funções de indivíduos. Nós podemos denotar qualquer matriz desse tipo por

$$f!\,(\phi!\,\hat{z},\ \psi!\,\hat{z},\ \chi!\,\hat{z},\ \dots\ x,\ y,\ z,\ \dots\ ).$$

Uma vez que uma função pode ocorre apenas através de suas variáveis, $\phi!\,\hat{z}$ (e.g.) pode apenas ocorrer na matriz acima através da ocorrência de $\phi!\,x,\ \phi!\,y,\ \phi!\,z,\ \dots$ ou de $\phi!\,a,\ \phi!\,b,\ \phi!\,c,\ \dots$, onde a, b e c são constantes. Constantes não ocorrem em lógica, isto é, a, b e c, que nós supusemos constantes, não devem ser consideradas como sendo obtidas por qualquer atribuição extra-lógica de valores a variáveis. Elas podem, portanto, ser absorvidas no $x,\ y,\ z,\ \dots$. Agora, $x,\ y\ e\ z$, em si mesmos, apenas aparecerão em lógica como argumentos para funções de variáveis. Consequentemente, qualquer matriz que contenha as variáveis $\phi!\,\hat{z},\ \psi!\,\hat{z},\ \chi!\,\hat{z},\ x,\ y,\ z$ e nenhuma outra, se ela é do tipo que pode ocorrer explicitamente na lógica, resultará da substituição de $\phi!\,x,\ \phi!\,y,\ \phi!\,z,$ $\psi!\,x,\ \psi!\,y,\ \psi!\,z,\ \chi!\,x,\ \chi!\,y,\ \chi!\,z$, ou algum deles, por proposições elementares em alguma função-traço.

É necessário aqui explicar o que se quer dizer quando nós falamos de uma "matriz que pode ocorrer explicitamente na lógica", ou, como nós podemos chamá-la, uma "matriz lógica". Uma matriz lógica é uma que não contém constantes. Assim, $p|q$ é uma matriz lógica; bem como $\phi!\,x$, onde ϕ e x são ambas variáveis. Tomando duas proposições elementares quaisquer, nós devemos obter uma matriz lógica se nós substituiremos todos os seus componentes e constituintes por variáveis. Outras matrizes resultam das matrizes lógicas ao atribuir valores a algumas de suas variáveis. Há, porém, várias maneiras de se analisar uma proposição, e, portanto, várias matrizes lógicas podem ser derivadas de uma dada proposição. Então, uma proposição que é um valor de $p|q$ também será um valor de $(\phi!\,x)|(\psi!\,y)$ e de $\chi!\,(x,\ y)$. Diferentes formas são requeridas para diferentes propósitos. Mas todas as formas de matrizes requeridas explicitamente na lógica são matrizes lógicas como as definidas acima. Isto é meramente uma ilustração do fato de que a lógica visa sempre a completa generalidade. O teste de uma matriz lógica é que ela pode ser expressa sem introduzir qualquer símbolo além daqueles da lógica, e.g., nós não devemos requerer o símbolo "Sócrates".

Considere a expressão

$$f!\,(\phi!\,\hat{z},\ \psi!\,\hat{z},\ \chi!\,\hat{z},\ \dots,\ x,\ y,\ z).$$

Quando um valor é atribuído a f, isso representa uma matriz contendo as variáveis $\phi,\ \psi,\ \chi,\ \dots,\ x,\ y,\ z,\ \dots$. Mas enquanto f permanece não atribuído, isso é uma matriz de um novo tipo, contento a nova variável f. Nós chamamos f uma "função de segunda ordem", porque ela toma funções como seus argumentos. Quando um valor é atribuído, não apenas a f, mas também a $\phi,\ \psi,\ \chi,\ \dots,\ x,\ y,\ z,\ \dots$, nós obtemos uma proposição elementar; mas quando um valor é atribuído a f sozinho, nós obtemos uma matriz contendo como variáveis apenas funções de primeira ordem e indivíduos. Isto é análogo ao que acontece quando nós consideramos a matriz $\phi!\,x$. Se nós dermos valores tanto a ϕ quando a x, nós obtemos uma proposição elementar;

mas se nós dermos um valor a ϕ sozinho, nós obtemos uma matriz contendo apenas um indivíduo como variável.

Não há uma matriz da forma $f!(\phi!\hat{z})$. As únicas matrizes nas quais $\phi!\hat{z}$ é o único argumento são aquelas contendo $\phi!a$, $\phi!b$, $\phi!c$, …, onde a, b, c, … são constantes; mas estas não são matrizes lógicas, sendo derivadas da matriz lógica $\phi!x$. Uma vez que ϕ pode apenas aparecer através de seus valores, ele deve aparecer, numa matriz lógica, com um ou mais argumentos variáveis. As funções lógicas mais simples de ϕ sozinho são $(x).\phi!x$ e $(\exists x).\phi!x$, mas elas não são matrizes. Uma matriz lógica

$$f!(\phi!\hat{z}, x_1, x_2, \dots x_n)$$

sempre é derivada de uma função-traço

$$F(p_1, p_2, p_3, \dots p_n)$$

pela substituição de $\phi!x_1$, $\phi!x_2$, … $\phi!x_b$ por p_1, p_2, … p_n. Este é o único método de construir tais matrizes. (Nós podemos, porém, ter $x_s = x_s$ para alguns valores de r e s).

Funções de segunda ordem têm duas propriedades conectadas que funções de primeira ordem não têm. A primeira delas é que, quando um valor é atribuído a f, o resultado pode ser uma matriz lógica; o segundo é que certos valores constantes de f podem ser atribuídos sem que se saia da lógica.

Para tomar o primeiro ponto: $f!(\phi, \hat{z}, x)$, por exemplo, é uma matriz contendo três variáveis, f, ϕ *e* x. As seguintes matrizes lógicas (dentre um número infinito) resultam da de cima pela atribuição de um valor a f: $\phi!x$, $(\phi!x)|(\phi!x)$, $\phi!x \supset \phi!x$, etc. Similarmente, $\phi!x \supset \phi!y$, que é uma matriz lógica, resulta da atribuição de um valor a f em $f!(\phi!\hat{z}, x, y)$. Em todos estes três casos, o valor constante atribuído a f é um que pode ser expresso em símbolos lógicos sozinho (que era a segunda propriedade de f). Este não é o caso com $\phi!x$: para atribuir um valor a ϕ, nós devemos introduzir o que nós podemos chamar de "constantes empíricas", como "Sócrates" e "mortalidade" e "ser grego". As funções de x que podem ser formadas sem que se saia da lógica devem envolver uma função como uma variável generalizada; elas são (no caso mais simples) como $(\phi).\phi!x$ e $(\exists\phi).\phi!x$.

Até certo ponto, porém, a peculiaridade acima de funções de segunda ordem e de ordens maiores é arbitrária. Poderíamos ter adotado na lógica os símbolos

$$R_1(x),\ R_2(x, y),\ R_3(x, y, z),\ \dots,$$

onde R, representa um predicado variável, R_2 uma relação diádica variável (em intensão), e assim por diante. Cada um dos símbolos

$R_1(x)$, $R_2(x, y)$, $R_3(x, y, z)$, ..., é uma matriz lógica, de modo que, se nós a utilizássemos, nós teríamos matrizes lógicas não contendo funções variáveis. Talvez valha a pena nos lembrarmos do significado de "$\phi ! a$", onde a é constante. O significado é como se segue. Tome qualquer número finito de proposições das várias formas $R_1(x)$, $R_2(x, y)$, ... e combine-as por meio do traço de uma maneira desejada, permitindo que qualquer uma delas seja repetida qualquer número finito de vezes. Se pelo menos uma delas tiver a como um constituinte, i.e, se for da forma

$$R_n(a, b_1, b_2, \dots b_{n-1}),$$

então a proposição molecular que nós construímos é da forma $\phi ! a$, i.e., é um valor de "$\phi ! a$" com um ϕ adequado. Isso, obviamente, também vale para a própria proposição $R_n(a, b_1, b_2, \dots b_n - 1)$. É claro que a lógica das proposições, e ainda mais as proposições gerais relativas a determinado argumento, seria intolerantemente complicada se nós nos abstivéssemos do uso de funções variáveis; mas dificilmente pode-se dizer que seria impossível. Quanto à questão sobre matrizes, nós poderíamos formar uma matriz $f!(R_1, x)$, da qual $R_1(x)$ seria um valor. Isto é, as propriedades de matrizes de segunda ordem que nós estivemos discutindo também pertenceriam a matrizes contendo universais variáveis. Elas não podem pertencer a matrizes contendo apenas indivíduos variáveis.

Ao atribuir $\phi ! \hat{z}$ e x a $f!(\phi ! \hat{z}, x)$, enquanto se deixa f variável, nós obtemos uma construção de proposições elementares que não devem ser obtidas por meio de variáveis representando indivíduos e funções de primeira ordem. É por isso que a nova variável f é útil.

Nós podemos proceder da mesma maneira para matrizes

$$F!\{f!(\hat{\phi}! \hat{z}, \hat{x}), g!(\hat{\phi}! \hat{z}, \hat{x}), \dots \psi ! \hat{z}, \chi ! \hat{z}, \dots x, y, \dots\}$$

e assim por diante indefinidamente. Isso meramente representa novas maneiras de agrupar proposições elementares, levando a novos tipos de generalidade.

V. FUNÇÕES DIFERENTES DE MATRIZES

Quando uma matriz contendo várias variáveis, funções de algumas delas podem ser obtidas ao tornar as outras em variáveis aparentes. Funções obtidas desta maneira não são matrizes, e seus valores não são proposições elementares. Os exemplos mais simples são

$$(y).\,\phi !(x, y) \;e\; (\exists y).\,\phi !(x, y).$$

Quando nós temos uma proposição geral $(\phi).\,F\{\phi ! \hat{z}, x, y, \dots\}$, os únicos valores que ϕ pode tomar são matrizes, de maneira que funções contendo variáveis aparentes não estão incluídas. Nós podemos, se quisermos, introduzir uma nova variável, para denotar não apenas funções tais como $\phi!\,\hat{x}$, mas também como

$$(y).\,\phi!\,(\hat{x},\ y),\ (y,\ z).\,\phi!\,(\hat{x},\ y,\ z),\ \ \ldots\ (\exists y).\,\phi!\,(\hat{x},\ y),\ \ \ldots;$$

Em uma palavra, para denotar todas as funções de uma variável que podem ser derivadas pela generalização de matrizes que contêm apenas variáveis individuais. Denotemos qualquer tal função por $\phi_1 x$, ou $\psi_1 x$, ou $\chi_1 x$, ou etc. Aqui, o sufixo 1 tem a intenção de indicar que os valores das funções podem ser proposições de primeira ordem, resultando de generalização em respeito a indivíduos. Em virtude de ∗8, nenhum dano pode vir da inclusão de tais funções e matrizes como valores de variáveis únicas.

Teoricamente, é desnecessário introduzir tais variáveis como $\phi 1$, porque elas podem ser substituídas por uma conjunção ou disjunção infinita. Assim, e.g.

$$(\phi_1).\,\phi_1 x. \equiv : (\phi).\,\phi!\,x : (\phi,\ y).\,\phi!\,(x,\ y) : (\phi) : (\exists y).\,\phi!\,(x,\ y) :\ etc., (\exists\phi_1).\,\phi_1 x. \equiv : (\exists\phi).\,\phi!\,x :$$

e geralmente, dado qualquer prefixo $(\phi_1).\,f_1(\phi_1\hat{z},\ x)$ e $(\exists\phi_1).\,f!\,(\phi_1\hat{z},\ x)$. Coloque

$$(\phi_1).\,f!\,(\phi_1\hat{z},\ x). =: (\phi).\,f!\,\{(y).\,\phi!\,(\hat{z},\ y),\ x\} : (\phi).\,f!\,(\exists y).\,\phi!\,(\hat{z},\ y),\ x\},$$

onde $f!\,\{(y).\,\phi!\,(\hat{z},\ y),\ x\}$ é construído como se segue: sempre que, em $f!\,\{\phi!\,\hat{z},\ x\}$, um valor de ϕ, digamos, $\phi!\,a$, ocorre, substitua $(y).\,\phi!\,(a,\ y)$, e desenvolva pelas definições que estão no começo de 8∗. $f!\,\{(\exists y).\,\phi!\,(\hat{z},\ y),\ x\}$ é construída de maneira similar. Similarmente, coloque

$$(\phi_2).\,f!\,(\phi_2!\,\hat{z},\ x). =: (\phi).\,f!\,\{(y,\ w).\,\phi!\,(\hat{z},\ y,\ w),\ x\} :$$
$$(\phi).\,f!\,\{(y) : (\exists w).\,\phi!\,(\hat{z},\ y,\ w),\ x\} :\ etc.,$$

onde "etc." cobre os prefixos $(\exists y) : (w).$, $(\exists y,\ w).$, $(w) : (\exists y)$. Nós definimos $\phi 3,\ \phi 4,\ \ldots$ similarmente. Então,

$$(\phi_1).\,f!\,(\phi_1\hat{z},\ x). =: (\phi_1).\,f!\,(\phi_1\hat{z},\ x) : (\phi_2).\,f!\,(\phi_2\hat{z},\ x) :\ etc.$$

Este processo depende do fato de que $f!\,(\phi!\,\hat{z},\ x)$, para cada valor de ϕ e x, seja uma proposição construída a partir de proposições elementares pelo traço, e que ∗8 nos permita substituir qualquer uma delas por uma proposição que não é elementar. $(\exists\phi_1).\,f!\,(\phi_1\hat{z},\ x)$ é definido por uma *disjunção* exatamente análoga.

É óbvio que, na prática, uma conjunção infinita ou disjunção como as de acima não podem ser manipuladas sem assunções *ad hoc*. Nós podemos conseguir resultados para qualquer segmento da conjunção ou disjunção infinita, e nós podemos "ver" que estes resultados são válidos. Mas nós não podemos provar isso, porque a indução matemática não é aplicável. Portanto, nós adotamos certas proposições primitivas, que asserem apenas que o que nós podemos provar em cada caso é válido geralmente. Por meios disso, torna-se possível manipular tais variáveis como ϕ_1.

Da mesma maneira, nós podemos introduzir $f_1(\phi_1\hat{z},\ \hat{x})$, onde qualquer número de indivíduos e funções ψ_1, χ_1, ... podem aparecer como variáveis aparentes.

Nenhuma dificuldade essencial surge neste processo contanto que as variáveis aparentes envolvidas em uma função não são de ordem maior que que o argumento para a função. Por exemplo, $x \epsilon D‘R$, que é $(\exists y).xRy$, pode ser tratado sem perigo como se fosse da forma $\phi!\, x$. Em virtude de *8, $\phi_1 x$ pode ser substituído por $\phi!\, x$ sem interferir com a verdade de qualquer proposição lógica da qual $\phi!\, x$ é uma parte. De maneira similar, qualquer proposição lógica que vale em relação a $f!\,(\phi_1\hat{z},\ x)$ valerá em relação a $f_1(\phi_1\hat{z},\ x)$.

Mas quando a variável aparente é de ordem maior que a do argumento, uma nova situação surge. Os casos mais simples são

$$(\phi).f!\,(\phi!\,\hat{z},\ x),\ (\exists\phi).f!\,(\phi!\,\hat{z},\ x).$$

Estas são funções de x, mas obviamente não está incluída entre os valores para $\phi!\, x$ (onde ϕ é o argumento). Se nós adotarmos uma nova variável ϕ_2, que é para incluir funções em que $\phi!\,\hat{z}$ pode ser uma variável aparente, nós obteremos outras novas funções

$$(\phi_2).f!\,(\phi_2\hat{z},\ x),\ (\exists\phi_2).f!\,(\phi_2\hat{z},\ x),$$

que novamente não estão entre os valores para $\phi_2 x$ (onde ϕ_2 é o argumento), porque a totalidade dos valores de $\phi_2\hat{z}$, que agora está envolvido, é diferente da totalidade dos valores de $\phi!\,\hat{z}$, que esteve envolvido anteriormente. Por mais que nós possamos ampliar o significado de ϕ, uma função de x em que ϕ ocorre como variável aparente tem um significado correspondentemente ampliado, de maneira que, apesar de ϕ poder ser definida,

$$(\phi).f!\,(\phi\hat{z},\ x)\ e\ (\exists\phi).f!\,(\phi\hat{z},\ x)$$

não podem nunca ser valores para ϕx. Tentar fazê-los ser valores para ϕx é tentar pegar a própria sombra. É impossível obter uma variável que abrange entre seus valores todas as possíveis funções de indivíduos.

Nós denotamos por $\phi_2 x$ uma função de x em que ϕ_2 é uma variável aparente, mas não há qualquer variável de ordem maior. De maneira similar, $\phi_3 x$ conterá ϕ_2 como variável aparente, e assim por diante.

A essência da questão é que uma variável pode viajar através de qualquer totalidade bem definida de valores, desde que esses valores sejam todos tais que qualquer um possa substituir qualquer outro significativamente em qualquer contexto. Ao construir $\phi_1 x$, a única totalidade envolvida é aquela de indivíduos, que já é pressuposta. Mas quando nós permitimos que ϕ seja uma variável aparente em função de x, nós ampliamos a totalidade de funções de x, por mais que ϕ apareça como uma variável aparente.

A outra condição, aquela de significância, é totalmente fornecida pelas definições de ∗8, junto com o princípio de que uma função pode apenas ocorrer através de seus valores. Em virtude do princípio, uma função de uma função é uma função-traço de valores da função. E em virtude das definições em ∗8, um valor de qualquer função pode significantemente substituir qualquer proposição em uma função-traço, porque proposições contendo qualquer número de variáveis aparentes podem sempre ser substituídas por proposições elementares e entre si em qualquer função-traço. O que é necessário para a significância é que toda proposição completa asserida deva ser derivada de uma matriz por generalização, e que, na matriz, a substituição de valores constantes por variáveis deve sempre resultar, no final das contas, em uma função-traço de uma proposição atômica. Nós dizemos "no final das contas" porque, quando tais variáveis como $\phi_2 \hat{z}$ são admitidas, a substituição de um valor para ϕ_2 pode produzir uma proposição ainda contendo variáveis aparentes, e nesta proposição, as variáveis aparentes devem ser substituídas por constantes antes que nós cheguemos a uma função-traço de proposições atômicas. Nós podemos introduzir variáveis requerendo vários de tais estágios, mas o final sempre tem que ser o mesmo: uma função-traço de proposições atômicas.

Parece, no entanto, apesar de que possa ser difícil provar isso formalmente, que as funções ϕ_1, f_1 não introduzem qualquer proposição que não possa ser expressa sem elas. Vamos tomar primeiro uma ilustração bem simples. Considere a proposição

$$(\exists \phi_1) . \phi_1 x . \phi_1 a, \text{ que nós chamaremos } f(x, a).$$

Uma vez que ϕ_1 inclui todos os possíveis valores de $\phi!$ e também vários outros valores em seu alcance, $f(x, a)$ pode parecer fazer uma asserção menor que a que seria feita por

$$(\exists \phi) . \phi! x . \phi! a, \text{ que nós chamaremos } f_0(x, a).$$

Mas. na verdade, $f(x, a) . \supset . f_0(x, a)$. Isso pode ser visto como se segue: $\phi_1 x$ tem um dos vários conjuntos de formas:

$(y) . \phi!(x, y), \ (y, z) . \phi!(x, y, z), \ \ldots,$

$(\exists y) . \phi!(x, y), \ (\exists y, z) . \phi!(x, y, z), \ \ldots,$

$(y) : (\exists z) . \phi!(x, y, z), \ (\exists y) : (z) . \phi!(x, y, z), \ \ldots \ .$

Suponha primeiro que $\phi_1 x . = . (y) . \phi!(x, y)$. Então,

$$\begin{aligned} \phi_1 x . \phi_1 a . \equiv &: (y) . \phi!(x, y) : (y) . \phi!(a, y) : \\ &\supset : \phi!(x, b) . \phi!(a, b) : \\ &\supset : (\exists \phi) . \phi! x . \phi! a . \end{aligned}$$

Agora, suponha que $\phi_1 x. =. (\exists y). \phi! (x, y)$. Então,

$$\phi_1 x. \phi_1 a. \equiv: (\exists y). \phi! (x, y): (\exists z). \phi! (a, z):$$

$\supset: (\exists y, z): \phi! (x, y) \vee \phi! (x, z). \phi! (a, y) \vee \phi! (a, z):$

$\supset: (\exists \phi). \phi! x. \phi! a,$

porque $\phi! (x, y) \vee \phi! (x, z)$ é da forma $\phi! x$, quando y e z são fixados. É óbvio que este método de prova se aplica aos outros casos mencionados acima.

Então,

$$(\exists \phi_1). \phi_1 x. \phi_1 a. \equiv. (\exists \phi). \phi! x. \phi! a.$$

Nós podemos nos certificar de que o mesmo resultado se aplica na forma geral

$$(\exists \phi_1). f! (\phi_1 \hat{z}, x). \equiv. (\exists \phi). f! (\phi! \hat{z}, x)$$

por um argumento similar. Nós sabemos que $f! (\phi! \hat{z}, x)$ é derido de alguma função-traço

$$F(p, q, r, ...)$$

ao substituir $\phi! x$, $\phi! a$, $\phi! b$, … (onde a, b, … são constantes) por algumas das proposições p, q, r, … e $g_1! x$, $g_2! x$, $g_3! x$, … (onde g_1, g_2, g_3, … são constantes) por outros de p, q, r, …, enquanto se substitui qualquer proposição remanescente p, q, r, … por proposições constantes. Considere um caso típico; suponha

$$f! (\phi! \hat{z}, x). =. (\phi! a) | \{(\phi! x) | (\phi! b)\}.$$

Então, temos que provar

$$\phi_1 a | (\phi_1 x | \phi! b). \supset. (\exists \phi). \phi! a | (\phi! x | \phi! b),$$

onde $\phi_1 x$ pode ter qualquer das formas enumeradas acima.

Suponha primeiro que $\phi_1 x. =. (y). \phi! (x, y)$. Então,

$$\phi_1 a | (\phi_1 x | \phi_1 b). =: (\exists y): (z, w). \phi! (a, y) | \{\phi! (x, z) | \phi! (b, w)\}:$$

$$\supset: (\exists y). \phi! (a, y) | \{\phi! (x, y) | \phi! (b, y)\}:$$

$$\supset: (\exists \phi). \phi! a | (\phi! x | \phi! b)$$

porque, para um dado y, $\phi! (x, y)$ é da forma $\phi! x$.

Suponha, então, que $\phi_1 x. =. (\exists y). \phi! (x, y)$. Então,

$$\phi_1 a | (\phi_1 x | \phi_1 b). =: (y): (\exists z, w). \phi! (a, y) | \{\phi! (x, z) | \phi! (b, w)\}:$$

$$\supset: (\exists \psi). \psi! a | (\psi! x | \psi! b),$$

colocando $\psi! x. =. \phi! (x, z) \vee \phi! (x, w)$. Os outros casos podem ser lidados de maneira similar. Consequentemente o resultado se segue.

Considere a seguir a proposição correlativa

$$(\phi_1). f! (\phi_1 \hat{z}, x). \equiv. (\phi). f! (\phi_1 \hat{z}, x).$$

Aqui, é a implicação inversa que necessita de prova, i.e.,

$$(\phi). f! (\phi! \hat{z}, x). \supset. (\phi_1). f! (\phi_1 \hat{z}, x).$$

Isso se segue do caso prévio por transposição. Ele também pode ser visto independentemente como se segue. Suponha, como antes, que

$$f!\,(\phi_1\hat{z},\ x).=.\,(\phi_1 a)|(\phi_1 x|\phi_1 b),$$

e considere primeiro $\qquad \phi_1 x.=.\,(y).\,\phi!\,(x,\ y).$

Então, $(\phi_1 a)|(\phi_1 x|\phi_1 b).=:(\exists y):(z,\ w).\,\phi!\,(a,\ y)|\{\phi!\,(x,\ z)|\phi!\,(b,\ w)\}.$

Assim, nós requeremos que, dado

$$(\psi).\,(\psi!\,a)|(\psi!\,x|\psi!\,b),$$

nós teremos $(\exists y):(z,\ w).\,\phi!\,(a,\ y)|\{\phi!\,(x,\ z)|\phi!\,(b,\ w)\}.$

Agora,

$(\psi).\,\psi!\,a|(\psi!\,x|\psi!\,b).\supset:.\,\phi!\,(a,\ z).\supset.\,\phi!\,(x,\ z).\,\phi!\,(b,\ z):$

$\phi!\,(a,\ w).\supset.\,\phi!\,(x,\ w).\,\phi!\,(b,\ w):.$

$\supset:.\,\phi!\,(a,\ z).\,\phi!\,(a,\ w).\supset.\,\phi!\,(x,\ z).\,\phi!\,(b,\ w):.$

$\supset:.\,\phi!\,(a,\ w).\supset:\phi!\,(a,\ z).\supset.\,\phi!\,(x,\ z).\,\phi!\,(b,\ w)\ (1)$

Também, $\qquad \sim\phi!\,(a,\ w).\supset:\phi!\,(a,\ w).\supset.\,\phi!\,(x,\ z).\,\phi!\,(b,\ w)\ (2)$

$(1).\,(2).\supset:.\,(\psi).\,\psi!\,a|(\psi!\,x|\psi!\,b):\supset:.\,(\exists y):\phi!\,(a,\ y).\supset.\,\phi!\,(b,\ w),$

que era o que deveria ser provado.

Considere agora $\qquad \phi_1 x.=.\,(\exists y).\,\phi!\,(x,\ y).$

Então, $(\phi_1 a)|(\phi_1 x|\phi 1 b).=:(y):(\exists z,\ w).\,\phi!\,(a,\ y)|\{\phi!\,(x,\ z)|\phi!\,(b,\ w)\}.$

Neste caso, nós meramente colocamos z=w=y e o resultado se segue.

O método será o mesmo em qualquer outro caso. Portanto, geralmente:

$$(\phi_1).\,f!\,(\phi_1\hat{z},\ x).\equiv.\,(\phi).\,f!\,(\phi!\,\hat{z},\ x).$$

Apesar de os argumentos acima não representarem provas formais, eles são suficientes para certificar que, de fato, qualquer proposição geral sobre $\phi!\,\hat{z}$ também é verdadeira sobre $\phi_1\hat{z}$. Isso nos dá, no que diz respeito a tais funções, tudo o que poderia ter sido obtido pelo axioma da redutibilidade.

Uma vez que a prova só pode ser conduzida em cada caso separado, é necessário introduzir uma proposição primitiva dizendo que o resultado vale sempre. Esta proposição primitiva é

$$\vdash:(\phi).\,f!\,(\phi!\,\hat{z},\ x).\supset.\,f!\,(\phi_1\hat{z},\ x) \qquad \text{Pp.}$$

Como uma ilustração: suponha que nós provamos alguma propriedade de todas as classes definidas por funções da forma $\phi!\,\hat{z}$; a proposição primitiva acima nos permite substituir a classe $D‘R$, onde R é a relação definida por $\phi!\,(\hat{x},\ \hat{y})$, ou por $(\exists\hat{z}).\,\phi!\,(\hat{x},\ \hat{y},\ z)$, ou etc. Sempre que uma classe ou relação é definida por uma função não contendo variáveis aparentes, exceto indivíduos, a proposição primitiva acima nos permite tratá-la como se ela fosse definida por uma matriz.

Nós temos agora que considerar funções da forma $\phi_2 x$, onde

$$\phi_2 x . =. (\phi). f!(\phi! \hat{z},\ x)\ ou\ \phi_2 x . =. (\exists\phi). f!(\phi! \hat{z},\ x).$$

Nós queremos descobrir se, ou sob quais circunstâncias, nós temos

$$(\phi). g!(\phi! \hat{z},\ x). \supset. g!(\phi_2 \hat{z},\ x).$$

Vamos começar com um importante caso particular. Considere

$$g!(\phi! \hat{z},\ x). =. \phi! a \supset \phi! x.$$

Então, $(\phi). g!(\phi! \hat{z},\ x). =. x = a$, de acordo com $*13\cdot1$.

Nós queremos provar

$$(\phi). \phi! a \supset \phi! x. \supset. \phi 2a \supset \phi 2x,$$

i.e. $$(\phi). \phi! a \supset \phi! x. \supset: (\phi). f!(\phi! \hat{z},\ a). \supset. (\phi). f!(\phi! \hat{z},\ x):$$
$$(\exists\phi). f!(\phi! \hat{z},\ a). \supset. (\exists\phi). f!(\phi! \hat{z},\ x).$$

Agora, $f!(\phi! \hat{z},\ x)$ deve ser derivado de alguma função-traço

$$F(p,\ q,\ r,\ ...)$$

pela substituição os valores $\phi! x,\ \phi! b,\ \phi! c$, …, onde b, c, … são constantes, por p, q, r, …. Assim que ϕ é atribuído, isso tem a forma de $\psi! x$. Consequentemente,

$$(\phi). \phi! a \supset \phi! x. \supset: (\phi): f!(\phi! \hat{z},\ a). \supset. f!(\phi! \hat{z},\ x):$$
$$\supset: (\phi). f!(\phi! \hat{z},\ a). \supset. (\phi). f!(\phi! \hat{z},\ x):$$
$$(\exists\phi). f!(\phi! \hat{z},\ a). \supset. (\exists\phi). f!(\phi! \hat{z},\ x).$$

Então geralmente $(\phi). \phi! a \supset \phi! x. \supset. (\phi_2). \phi_2 a \supset \phi_2 x$ sem a necessidade de qualquer axioma da redutibilidade.

Não se deve, porém, assumir que (A) é sempre verdadeiro. O procedimento é como se segue: $f!(\phi! \hat{z},\ x)$ resulta de alguma função traço

$$F(p,\ q,\ r,\ ...)$$

pela substituição de alguns de alguns dos p, q, r, … os valores $\phi! x,\ \phi! a,\ \phi! b$, … (a, b, … sendo constantes). Nós assumimos que, e.g.

$$\phi_2 x. =. (\phi) f!(\phi! \hat{z},\ x).$$

Assim, $$\phi_2 x. =. (\phi). F(\phi! x,\ \phi! a,\ \phi! b,\ ...). \qquad \text{(B)}$$

O que nós queremos descobrir é se

$$(\phi). g!(\phi! \hat{z},\ x). \supset. g!(\phi_2 \hat{z},\ x).$$

Agora, $g!(\phi! \hat{z},\ x)$ será derivado de uma função-traço

$$G(p,\ q,\ r,\ ...)$$

ao substituir $\phi! x,\ \phi! a',\ \phi! b'$, … por algum de p, q, r, …. Para obter $g!(\phi_2 \hat{z},\ x)$, nós temos que colocar $\phi_2 x,\ \phi_2 a',\ \phi_2 b'$, … em $G(p,\ q,\ r,\ ...)$, em vez de $\phi! x,\ \phi! a',\ \phi! b'$, …. Obteremos assim uma nova matriz.

Se é sabido que $(\phi). g!(\phi! \hat{z},\ x)$ é verdadeiro porque $G(p,\ q,\ r,\ ...)$ é sempre verdadeiro, então $g!(\phi_2 \hat{z},\ x)$ é verdadeiro em virtude de $*8$, porque ele é obtido de $G(p,\ q,\ r,\ ...)$ pela substituição das proposições $\phi_2 x,\ \phi_2 a',\ \phi_2 b'$, que contêm variáveis aparentes, por algum de p, q, r, ….

Nós temos então as seguintes importantes proposições:

Sempre que se sabe que $(\phi).\, g!\,(\phi!\,\hat{z},\, x)$ é verdadeiro porque $g!\,(\phi!\,\hat{z},\, x)$ é sempre um valor de uma função-traço

$$G(p,\, q,\, r,\, ...),$$

que é verdadeiro para todos os valores de p, q, r, …, então $g!\,(\phi 2\hat{z},\, x)$ é sempre verdadeiro, bem como (é claro) $(\phi 2).\, g!\,(\phi 2\hat{z},\, x)$.

Isso, porém, não cobre o caso em que $(\phi).\, g!\,(\phi!\,\hat{z},\, x)$ não é uma verdade da lógica, mas uma hipótese, que pode ser verdadeira para alguns valores de x e falso para outros. Quando este é o caso, a inferência para $g!\,(\phi 2\hat{z},\, x)$ é algumas vezes legítima e algumas vezes não; os vários casos devem ser investigados separadamente. Nós devemos ver uma importante ilustração da falha da inferência em conexão com a indução matemática.

VI. CLASSES

A teoria de classes é ao mesmo tempo simplificada em uma direção e complicada em outra pela assunção de que funções ocorrem apenas através de seus valores e pelo abandono do axioma da redutibilidade.

De acordo com nossa teoria presente, todas as funções de funções são extensionais, i.e.

$$\phi x \equiv_x \psi x. \supset. f\left(\phi \hat{z}\right) \equiv f(\psi \hat{z}).$$

Isso é óbvio, uma vez que ϕ só pode ocorrer em $f(\phi\hat{z})$ pela substituição de valores de ϕ por p, q, r, … em uma função-traço, e, se $\phi x \equiv \psi x$, a substituição de ϕx por p em uma função-traço dá o mesmo valor verdade à função de verdade que a substituição de ψx. Consequentemente, não há mais razões para distinguir funções e classes, pois nós temos, em virtude do que foi dito acima,

$$\phi x \equiv_x \psi x. \supset. \phi \hat{x} = \psi \hat{x}.$$

Nós devemos continuar usando a notação $\hat{x}(\phi x)$, que geralmente é mais conveniente que $\phi\hat{x}$; mas não haverá mais nenhuma diferença entre o significado dos dois símbolos. Então, classes, distintas de funções, perdem até aquele ser sombrio que elas retêm em ∗20. O mesmo, é claro, se aplica a relações em extensão. Isso, até então, é uma simplificação.

Por outro lado, nós agora temos que distinguir classes de diferentes ordens compostas de membros da mesma ordem. Tomando classes de indivíduos como o caso mais simples, $\hat{x}(\phi!\, x)$ não deve ser distinto de $\hat{x}(\phi_2 x)$, e assim por diante. Em virtude da proposição do final da última seção, as propriedades lógicas gerais de classes serão as mesmas para classes de todas as ordens. Portanto, e.g.

$$\alpha\subset\beta.\,\beta\subset\gamma.\supset.\,\alpha\subset\gamma$$

valerá para quaisquer que sejam as ordens de α, β, γ, respectivamente. Em outros tipos de casos, porém, problemas surgem. Considere, num primeiro momento, $p\text{‘}\kappa$ e $s\text{‘}\kappa$. Nós temos

$$x\epsilon p\text{'}\kappa.\equiv:\alpha\epsilon\kappa.\supset_{\alpha}.\,x\epsilon\alpha.$$

Então, p‘ϰ é uma classe de ordem maior que qualquer um dos membros de ϰ. Consequentemente, a hipótese $(\alpha).\,f\alpha$ pode não implicar $f(p\text{‘}\kappa)$, se α é da ordem dos membros de ϰ. Há um tipo de prova inventada por Zermelo, da qual o exemplo mais simples é sua segunda prova do teorema de Schöder-Bernstein (dado em ∗73). Este tipo de prova consiste em definir uma certa classe de classes ϰ, e então mostrar que $p\text{‘}\kappa$ ϵ ϰ. Em face disso, “$p\text{‘}\kappa\,\epsilon\,\kappa$” é impossível, uma vez que $p\text{‘}\kappa$ não é da mesma ordem que os membros de ϰ. Isso, porém, não é tudo o que tem que ser dito. Uma classe de classes ϰ é sempre definida por alguma função da forma

$$\left(x_1, x_2, \ldots\right):\left(\exists y_1,\ y_2,\ \ldots\right).\,F\left(x_1\epsilon\alpha,\ x_2\epsilon\alpha,\ \ldots y_1\epsilon\alpha,\ y_2\epsilon\alpha,\ \ldots\right),$$

onde F é uma função-traço, e “$\alpha\epsilon\kappa$” significa que a função acima é verdadeira. Pode ocorrer que a função acima é verdadeira quando p‘ϰ é substituído por α, e o resultado é interpretado por ∗8. Isso nos justifica em asserir p‘ϰ ϵ ϰ?

Vamos tomar uma ilustração que é importante em conexão com a indução matemática. Considere

$$\kappa = \hat{\alpha}(R\text{''}\alpha\subset\alpha.\,\alpha\epsilon\alpha).$$

Então, $R\text{''}p\text{'}\kappa\subset p\text{'}\kappa.\,\alpha\epsilon p\text{'}\kappa$ (ver ∗40·81)

de maneira que, $p\text{'}\kappa\epsilon\kappa$. Isto é, se nós substituirmos p’ϰ por α na função definidora de ϰ, e aplicarmos ∗8, obteremos uma proposição verdadeira. Pela definição de ∗90,

$$\overleftarrow{R_*}\text{'}a = p\text{'}k.$$

Então, $\overleftarrow{R_*}\text{'}a$ é uma classe de segunda ordem. Consequentemente, se nós tivermos uma hipótese $(\alpha).f\alpha$, onde α é uma classe de primeira ordem, nós podemos assumir

$$(\alpha).\,f\alpha.\supset.\,f(\overleftarrow{R_*}\text{'}a).$$

(A)

Pela proposição do fim da última seção, se $(\alpha).\,f\alpha$ é deduzido por lógica de uma função-traço de proposições elementares universalmente verdadeira, $f(\overleftarrow{R_*}\text{'}a)$ também será verdadeiro. Assim, nós podemos substituir $\overleftarrow{R_*}\text{'}a$ por α em qualquer proposição asserida “$\vdash.\,f\alpha$” que ocorra em *Principia Mathematica*. Mas quando $(\alpha).\,f\alpha$ é uma hipótese, não uma verdade universal, a implicação (A) não é, *prima facie*, necessariamente verdadeiro.

Por exemplo, se $\kappa = \hat{\alpha}(\breve{R}''\alpha\subset\alpha.\,\alpha\epsilon\alpha)$, nós temos

$$\alpha\epsilon\kappa.\supset:\alpha\cap\beta\epsilon\kappa.\equiv.\breve{R}''(\alpha\cap\beta)\subset\beta.\,\alpha\epsilon\beta.$$

Consequentemente, $\alpha\epsilon\kappa.\,\breve{R}''(\alpha\cap\beta)\subset\beta.\,\alpha\epsilon\beta.\supset.\,p'\kappa\subset\beta$ (1)

Em muitas das proposições de ∗90, como até então provado, nós substituímos p'ϰ por α, de onde nós obtemos

$$\breve{R}''\left(\beta\cap p'\kappa\right)\subset\beta.\,\alpha\epsilon\beta.\supset.\,p'\kappa\subset\beta \qquad (2)$$

i.e.

$$z\epsilon\beta.\,\alpha R_*z.\supset_{z,w}.\,w\epsilon\beta:\alpha\epsilon\beta.\,\alpha R_*x:\supset.\,x\epsilon\beta$$

ou

$$\alpha R_*x.\supset:.\,z\epsilon\beta.\,\alpha R_*z.\supset_{z,w}.\,w\epsilon\beta:\alpha\epsilon\beta:\supset.\,x\epsilon\beta.$$

Esta é uma forma de indução mais poderosa que aquela usada na definição de αR_*x.

Mas a prova não é válida, porque nós não temos o direito de substituir $p'\kappa$ por α ao passar de (1) para (2). Portanto, as provas que usem esta forma de indução deverão ser reconstruídas.

Veremos que a forma à qual a maioria das inferências falaciosas podem ser reduzidas é a seguinte:

Dado "$\vdash.(x).f(x,x)$", podemos inferir "$\vdash:(x):(\exists y).f(x,y)$". Então, dado "$\vdash.(\alpha).f(\alpha,\alpha)$", podemos inferir "$\vdash:(\alpha):(\exists\beta).f(\alpha,\beta)$". Mas isso depende da possibilidade de que $\alpha=\beta$. Agora, se α é de uma ordem e β é de outra, nós não sabemos que $\alpha=\beta$ é possível. Então, suponha que temos

$$\alpha\epsilon\supset_{\alpha}.\,g\alpha$$

E nós queremos inferir $g\beta$, onde β é uma classe de ordem maior que satisfaz $\beta\epsilon\kappa$. A proposição

$$(\beta):.\,\alpha\epsilon\kappa.\supset_{\alpha}.\,g\alpha:\supset:\beta\epsilon\kappa.\supset.\,g\beta$$

se torna, quando desenvolvida por ∗8,

$$(\beta)::(\exists\alpha):.\,\alpha\epsilon\kappa.\supset.\,g\alpha:\supset:\beta\epsilon\kappa.\supset.\,g\beta.$$

Isso é válido apenas se $\alpha=\beta$ é possível. Consequentemente, a inferência é falaciosa se β é de ordem maior que α.

Apliquemos estas considerações à prova de Zermelo do teorema de Schröder-Bernstein, dado em ∗73·8 ff. Nós temos uma classe de classes

$$\kappa=\hat{\alpha}(\alpha\subset D'R.\,\beta-\text{Cl}'R\subset\alpha.\,\breve{R}''\alpha\subset\alpha)$$

E nós provamos $p'\kappa\epsilon\kappa$(∗ 73·81), que é admissível no sentido limitado explicado acima. Nós então adicionamos a hipótese

$$x \sim \epsilon(\beta - \text{Ɑ}'R) \cup R''p'\kappa$$

e continuamos para provar $p'\kappa - \iota'x\epsilon\kappa$ (na quarta linha da prova de $*73\cdot82$). Isso também é admissível no sentido limitado. Nas na próxima linha da mesma prova, nós fazemos um uso disso que não é admissível, argumentando de $p'\kappa - \iota'x\epsilon\kappa$ para $p'\kappa \subset p'\kappa - \iota'x$, porque

$$\alpha\epsilon\kappa. \supset_{\alpha}. p'\kappa \subset \alpha.$$

A inferência de

$$\alpha\epsilon\kappa. \supset_{\alpha}. p'\kappa \subset \alpha \text{ para } p'\kappa - \iota'x\epsilon\kappa. \supset. p'\kappa \subset p'\kappa - \iota'x$$

é válida apenas se $p'\kappa - \iota'x$ é uma classe da mesma ordem que a dos membros de κ. Pois, quando $\alpha\epsilon\kappa. \supset_{\alpha}. p'\kappa \subset \alpha$ é escrito, ele vira

$$(\alpha) :: : (\exists\beta) ::. (x) :: \alpha\epsilon\kappa. \supset :. \beta\epsilon\kappa. \supset. x\epsilon\beta : \supset. x\epsilon\alpha.$$

Isso é deduzido de

$$\alpha\epsilon\kappa. \supset :. \alpha\epsilon\kappa. \supset. x\epsilon\alpha : \supset. x\epsilon\alpha$$

pelo princípio de que $f(a, a)$ implica $(\exists\beta). f(\alpha, \beta)$. Mas, aqui, β deve ser da mesma ordem que α, enquanto que em nosso caso, α e β não são da mesma ordem, se $\alpha = p'\kappa - \iota'x$ e β é um membro ordinário de $\varkappa$. Neste ponto, portanto, onde nós inferirmos $p'\kappa \subset p'\kappa - \iota'x$, a prova não funciona.

No entanto, é fácil remediar este defeito na prova. Tudo o que precisamos é de

$$x \sim \epsilon(\beta - \text{Ɑ}'R) \cup R''p'\kappa. \supset. x \sim \epsilon p'\kappa$$

ou, inversamente,

$$x\epsilon p'\kappa. \supset. \; x\epsilon(\beta - \text{Ɑ}'R) \cup R''p'\kappa.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
x\epsilon p'\kappa. \supset :. \alpha\epsilon\kappa. \supset_{\alpha} &: \alpha - \iota'x \sim \epsilon\kappa : \\
&\supset_{\alpha} : \sim(\beta - \text{Ɑ}'R \subset \alpha - \iota'x). \vee. \sim\{R''(\alpha - \iota'x) \subset \alpha - \iota'x\} : \\
&\supset_{\alpha} : x\epsilon\beta - \text{Ɑ}'R. \vee. x\epsilon R''(\alpha - \iota'x) \\
\supset :. x\epsilon\beta - \text{Ɑ}'R &: \vee : \alpha\epsilon\kappa. \supset_{\alpha}. x\epsilon R''\alpha
\end{aligned}$$

Consequentemente, por $*72\cdot341$,

$$x\epsilon p'\kappa. \supset. x\epsilon(\beta - \text{Ɑ}'R) \cup R''p'\kappa,$$

que nos dá o resultado requerido.

Nós assumimos que $\alpha - \iota'x$ não é de ordem maior que α; isso pode ser assegurado tomando α como sendo de pelo menos segunda ordem, uma vez que $\iota'x$, e, portanto, $-\iota'x$, é de segunda ordem. Nós podemos sempre assumir que nossas classes ascendem a uma determinada ordem, mas não indefinidamente.

Então, o teorema de Schröder-Bernstein sobrevive.

Outra dificuldade surge em relação a subclasses. Assumamos

$$Cl'\alpha = \hat{\beta}(\beta \subset \alpha) \quad \text{Df.}$$

Agora, "$\beta \subset \alpha$" é significante quando β é de ordem maior que α, dado que seus membros são do mesmo tipo que os de α. Mas quando nós temos

$$\beta \subset \alpha . \supset_{\beta} . f\beta,$$

o β deve ser de algum tipo definido. Como uma regra, nós devemos ser capazes de mostrar que uma proposição desse tipo vale para qualquer tipo de β, se nós pudermos mostrar que ela vale quando o tipo de β é o mesmo de α. Consequentemente, nenhuma dificuldade surge até nós considerarmos a proposição de Cantor $2^{n} > n$, que resulta da proposição

$$\sim\{(Cl'\alpha)\ sm\ \alpha\}$$

que é provado em ∗102. A prova é como se segue:

$$R\epsilon 1\to 1 . D'R = \alpha . \text{ᗡ}'R \subset Cl'\alpha . \xi = \hat{x}\{x\epsilon\alpha - R'x\} . \supset :$$
$$y\epsilon\alpha . y\epsilon R'y . \supset_{y} . y \sim\epsilon \xi : y\epsilon\alpha . y \sim\epsilon R'y . \supset_{y} . y\epsilon\xi : \supset : y\epsilon\alpha . \supset_{y} . \xi \neq R'y :$$
$$\supset : \xi \sim\epsilon \text{ᗡ}'R.$$

Como esta proposição é crucial, nós entraremos nela um pouco minuciosamente.

Seja $\alpha = \hat{x}(A!\,x)$, e seja

$$xR\{\hat{z}(\phi!\,z)\} . = . f!\,(\phi!\,\hat{z}, x).$$

Então, por nossos dados,

$$x\epsilon\alpha - R'x . \equiv : A!\,x : f!\left(\phi!\,\hat{z}, x\right) . \supset_{\phi} . \sim\phi!\,x.$$

Então, $$\xi = \hat{x}\left\{(\phi) : A!\,x : f!\left(\phi!\,\hat{z}, x\right) . \supset . \sim\phi!\,x\right\}.$$

Assim, ξ é definido por uma função em que ϕ aparece como uma variável. Se nós aumentarmos o alcance inicial de ϕ, nós deveremos aumentar o alcance dos valores envolvidos na definição de ξ. Portanto, não há maneira de escapar do resultado que ξ é de ordem maior que as subclasses de α contempladas na definição de $Cl'\alpha$. Consequentemente, a prova de $2^{n} > n$ colapsa quando o axioma da redutibilidade não é assumido. Nós devemos encontrar, porém, que as proposições continuam verdadeiras quando n é finito.

No que diz respeito a relações, questões exatamente similares surgem em relação a classes. Uma relação não deve mais ser distinguida de uma função de duas variáveis, e nós temos

$$\phi(\hat{x}, \hat{y}) = \psi(\hat{x}, \hat{y}) . \equiv : \phi(x, y) . \equiv_{z,y} . \psi(x, y).$$

As dificuldades em relação a $\dot{p}'\lambda$ e $Rl'P$ são menos importantes que aquelas em relação a $p'\kappa$ e $Cl'\alpha$, porque $\dot{p}'\lambda$ e $Rl'P$ são menos usados. Mas uma dificuldade muito séria ocorre em relação à similaridade. Nós temos

$$\alpha\, sm\, \beta . \equiv . (\exists R) . R \epsilon 1 \to 1 . \alpha = D' R . \beta = \text{Ꙩ}' R .$$

Aqui, R deve ser confinado a algum tipo; mas, para qualquer tipo que nós escolhermos, deve haver um correlato de tipo superior pelo qual α e β podem ser correlacionados. Então, não podemos nunca provar $\sim(\alpha\, sm\, \beta)$, exceto nos casos especiais em que α ou β é finito. Esta dificuldade foi ilustrada pelo teorema de Cantor $2^n > n$, que nós já examinamos. Quase todas as nossas proposições estão preocupadas em provar que duas classes *são* similares, e todas elas podem ser interpretadas para permanecer válidas. Mas as poucas proposições que estão preocupadas em provar que duas classes *não* são similares colapsam, exceto onde pelo menos um dos dois é finito.

VII. INDUÇÃO MATEMÁTICA

Todas as proposições sobre indução matemática na Parte II, Seção E e parte III, Seção C, permanecem válidas, quando interpretadas adequadamente. Mas as provas de muitos deles se tornam falaciosas quando o axioma da redutibilidade não é assumido, e em alguns casos, novas provas podem ser obtidas com trabalho considerável. A dificuldade se torna aparente na observação da definição de "xR_*x" em $*90$. Ao omitir o fator "$x \epsilon C'R$", que é irrelevante para nossos propósitos, a definição de "xR_*y" pode ser escrita

$$zRw . \supset_{z,w} . \phi ! z \supset \phi ! w : \supset_{\phi} . \phi ! x \supset \phi ! y, \qquad \text{(A)}$$

i.e., "y tem toda propriedade hereditária elementar possuída por x". Nós podemos tomar, em vez de propriedades elementares, qualquer outra ordem de propriedades; como nós veremos mais tarde, é vantajoso tomar propriedades de terceira ordem quando R é uma relação de um para muitos ou de muitos para um, e de quinta ordem em outros casos. Mas para propósitos preliminares, não faz diferença que ordem de propriedades nós tomamos, e, portanto, por uma questão de definição, tomamos propriedades elementares para começar. A dificuldade é que, se ϕ_2 é uma propriedade de segunda ordem, nós não podemos deduzir de (A)

$$zRw . \supset_{z,w} . \phi_2 z \supset \phi_2 w : \supset . \phi_2 x \supset \phi_2 y . \qquad \text{(B)}$$

Suponha, por exemplo, que $\phi_2 z . = . (\phi) . f!\left(\phi ! \hat{z}, z\right)$; então, de (A) nós podemos deduzir

$$zRw . \supset_{z,w} . f!\left(\phi ! \hat{z}, z\right) \supset_{\phi} f!\left(\phi ! \hat{z}, x\right) : \supset : f!\left(\phi ! \hat{z}, x\right) . \supset_{\phi} . f!\left(\phi ! \hat{z}, y\right) :$$
$$\supset : \phi_2 x . \supset . \phi_2 y . \qquad \text{(C)}$$

Consequentemente, para aplicar a indução matemática a propriedades de segunda ordem, não é suficiente que ela seja hereditária, mas ela deve ser composta de propriedades elementares hereditárias. Isto é, se a propriedade em questão é $\phi_2 z$, onde $\phi_2 z$ é

$$(\phi).\, f!\,(\phi!\,\hat{z}, z) \text{ ou } (\exists\phi).\, f!\left(\phi!\,\hat{z},\ z\right),$$

isto não é suficiente para que se tenha

$$zRw.\supset_{z,w}.\, \phi_2 z \supset \phi_2 w,$$

mas nós precisamos ter, para cada ϕ elementar,

$$zRw.\supset_{z,w}.\, f!\left(\phi!\,\hat{z}, z\right) \supset f!\left(\phi!\,\hat{z}, w\right).$$

Uma consequência inconveniente é que, *prima facie*, uma propriedade indutiva não deve ser da forma

$$xR_*z.\,\phi!\,z$$

ou $$S\epsilon Potid' R.\,\phi!\,S$$

ou $$\alpha\epsilon NC\ induz.\,\phi!\,\alpha.$$

Isto é inconveniente, porque frequentemente tais propriedades são hereditárias quando ϕ sozinho não é, i.e., nós podemos ter

$$zR_*z.\,\phi!\,z.\,zRw.\supset_{z,w}.\,xR_*w.\,\phi!\,w$$

quando nós não tivermos

$$\phi!\,z.\,zRw.\supset_{z,w}.\,\phi!\,w,$$

e de maneira similar para outros casos.

Estas considerações fazem necessário reexaminar todas as provas indutivas. Em alguns casos, elas continuam válidas, em outros, elas são facilmente retificadas; em outros, ainda, a retificação é trabalhosa, mas é sempre possível. O método de retificação é explicado no apêndice B a este volume.

No entanto, não há, até onde podemos descobrir, qualquer maneira pela qual nossas presentes proposições primitivas possam ser feitas adequadas a relações bem ordenadas e dedekindianas. Os usos práticos das relações dedekindianas dependem de ∗211·63—·692, que leva a ∗214·3—·34, mostrando que as séries de segmentos de uma série é dedekindiano. É sobre isso que a teoria dos números reais repousa, sendo números reais definidos como segmentos de séries de racionais. Este assunto é tratado em ∗310. Se nós fôssemos tomar como duvidosa a proposição de que a série de números reais é dedekindiana, a análise colapsaria.

As provas desta proposição em *Principia Mathematica* dependem do axioma da redutibilidade, uma vez que elas dependem de ∗211·64, que assere

$$\lambda \subset D'P_\epsilon.\supset.\, s'\lambda\epsilon D'P_\epsilon.$$

Pelas razões explicadas acima, se α é da ordem dos membros de λ, $(\alpha).\, f\alpha$ pode não implicar $f(s'\lambda)$, porque $s'\lambda$ é uma classe de ordem maior que a dos membros de λ. Assim, apesar de nós termos

$$D'P_\epsilon = \hat{\alpha}\{(\exists\beta).\alpha = P''\beta\},$$

$$s'\lambda = P''s'\breve{P}_\epsilon''\lambda,$$

nós ainda não podemos inferir $s'\lambda\epsilon D'P_\epsilon$, exceto quando $s'\lambda$ ou $s'\breve{P}_\epsilon''\lambda$ é, por alguma razão especial, da mesma ordem que os membros de λ. Este será o caso quando λ for finito, mas não necessariamente de outra forma. Consequentemente, a teoria dos irracionais requererá uma reconstrução.

Dificuldades exatamente similares surgem em relação a séries bem-ordenadas. A teoria de séries bem-ordenadas repousa sobre a definição ∗250·01:

$$Bord = \hat{P}(Cl\, ex' C'P \subset \text{ᗡ}'min_P) \text{ Df},$$

do que se segue $\quad P\epsilon\, Bord. \equiv : \alpha \subset C'P. \exists!\,\alpha. \supset_\alpha. \exists!\,\alpha - \breve{P}''\alpha.$

Ao fazer deduções, nós constantemente substituímos alguma classe construída de ordem maior que $C'P$ por α. Por exemplo, em ∗250·122, nós substituímos por α a classe $C'P \cap p'\overleftarrow{P}''(\alpha \cap C'P)$, que é geralmente de ordem maior que α. Se esta substituição for ilegítima, nós não poderemos provar que uma classe contida em $C'P$ e tendo sucessores deve ter um sucessor imediato, proposição sem a qual a teoria das séries bem-ordenadas seria impossível. Esta dificuldade particular pode ser superada, mas é óbvio que muitas proposições importantes devem colapsar.

Pode ser possível sacrificar infinitas séries bem-ordenadas para rigor lógico, mas a teoria dos números reais é uma parte integral da matemática ordinária, e dificilmente pode ser objeto de dúvidas razoáveis. Portanto, nós estamos justificados em supor que alguns axiomas lógicos que são verdadeiros irão justifica-las. O axioma requerido pode ser mais restrito que o axioma da redutibilidade, mas, se assim for, resta descobri-lo.

Os trabalhos seguintes estão entre as contribuições para a lógica matemática desde a publicação da primeira edição de *Principia Mathematica*.

D. HILBERT. Axiomatisches Denken, *Mathematische Annalen*, Vol. 78, Die logischen Grunglagen der Mathematik, ib. Vol. 88. Neue Begründung der Mathematik, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1922.

P. BERNAYS. Ueber Hilbert's Gedanken zur Grunglegung der Arithmetik, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Vol. 31.

H. BEHMANN. Beiträge zur Algebra der Logik. *Mathematische Annalen*, Vol. 86.

L. CHWISTEK. Ueber die Autinomien der Prinzipien der Mathematik, *Mathematik Zeitschrift*, Vol.14. The Theory of Constructive Types. *Annales de la Société Mathématique de Pologne*, 1923. (Dr. Chwistek gentilmente nos permitiu ler em MS. uma versão mais longa com o mesmo título).

H. WEIL. *Das Kontinuum*, Veit, 1918. Ueber die neue Grunglagenkrise der Mathematik, *Mathematische Zeitschrift,* Vol. 10. Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik, *Mathamatische Zeitschrift*, Vol. 20.

L. E. J. BROUWER. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz des ausgeschlossenen Dritten. *Verhandelingen d. K. Akademie v. Wetenschappen,* Amsterdam, 1918, 1919. Intuitionistische Mengenlehre, *Jahresbericht des deutschen Mathematiker-Vereiningung,* Vol. 28.

A. TAJTELBAUM-TARSKI. Sur le terme primitif de la logistique, *Fundamenta Mathematicae*, Tom. IV. Sur les "truth-functions" au send de MM. Russell et Whitehead, *ib.* Tom. V. Sur quelques théorèmes qui equivalente à l'axiome du choix, *ib.*

F. BERNSTEIN. Die Mengenlehre Georg Cantor's und der Finitismus, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Vol. 28.

J. KÖNIG. Neue Grunglagen der Logik, *Arithmetik und Mengenlehre*, Veit, 1914.

C. I. LEWIS. A *Survey of Symbolic Logic*, University of California, 1918.

H. M. SHEFFER. Total determinations of deductive systems with special reference to the Algebra of Logic. *Bulletin of the American Mathametical Society*, Vol. XVI. *Trans. Amer.Math Soc.* Vol. XIV. pp. 481–488. *The general theory of notational relativity*, Cambridge, Mass. 1921.

J. G. P. NICOD. A reduction in the number of the primitive propositions of logic. *Proc. Camb. Phil. Soc.* Vol. XIX.

L. WITTGENSTEIN. *Tractatus Logico-Philosophicus*, Kegan Paul, 1922.

M. SCHÖNWINKEL. Ueber die Bausteine der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, Vol. 92.

PREFÁCIO

A lógica matemática que nos ocupa na Parte I do presente trabalho foi construída sob orientação de três diferentes propósitos. Em primeiro lugar, ela visa efetuar a maior análise possível das ideias com as quais ela lida e dos processos pelos quais ela conduz demonstrações, e diminuir ao máximo o número de ideias indefinidas de proposições indemonstradas (chamadas respectivamente ideias *primitivas* e proposições *primitivas*) das quais ela inicia. Em segundo lugar, ela é enquadrada com visão à expressão perfeitamente precisa, em seus símbolos, das proposições matemáticas: garantir tal expressão, e garanti-la na notação mais simples e conveniente possível, é o motivo principal motivo na escolha dos tópicos. Em terceiro lugar, o sistema é especialmente enquadrado para resolver os paradoxos que, nos anos recentes, perturbou estudantes de lógica simbólica e de teoria dos agregados; acredita-se que a teoria dos tipos, conforme estabelecida a seguir, leva tanto à evitação das contradições e à detecção da falácia específica que os gerou.

Dos três propósitos acima, o primeiro e o terceiro frequentemente nos compelem a adotar métodos, definições e notações que são mais complicadas ou mais difíceis do que seriam se nós tivéssemos em vista apenas o segundo objeto sozinho. Isso se aplica especialmente à teoria das expressões descritivas (∗14 e ∗30) e à teoria das classes e relações (∗20 e ∗21). Nestes dois pontos, e em menor grau nos outros, fez-se necessário fazer um sacrifício de lucidez à correção. No entanto, o sacrifício é principalmente apenas temporário: em cada caso, a notação finalmente adotada, apesar de seu significado real ser bem complicado, tem um significado aparentemente simples, que, exceto em certos pontos cruciais, pode ser substituído em pensamento pelo significado real. Portanto, é conveniente, e uma explanação preliminar da notação, tratar estes significados aparentemente simples como ideias primitivas, *i.e.*, como ideias introduzidas sem definição. Quando a notação se torna mais ou menos familiar, é mais fácil seguir as explicações mais complicadas que nós acreditamos serem mais corretas. No corpo do trabalho, onde é necessário aderir rigidamente à ordem lógica estrita, a ordem mais simples de desenvolvimento não poderia ser adotada; é, portanto, dada na Introdução. As explicações dadas no Capítulo I da Introdução são como colocar lucidez antes da correção; as explicações completas são parcialmente fornecidas nos Capítulos seguintes da Introdução, parcialmente dadas no corpo do trabalho.

O uso de um simbolismo, em vez de palavras, em todas as partes do livro que visam incorporar raciocínio demonstrativo estritamente acurado, nos foi forçada pela busca consistente pelos três propósitos acima. As razões para esta extensão do simbolismo além das regiões familiares de números e ideias aliadas são muitas:

(1) As ideias aqui empregadas são mais abstratas que aquelas familiarmente consideradas na linguagem. Consequentemente, não há palavras usadas principalmente nos sentidos consistentes exatos que são necessários aqui. Qualquer

uso de palavras requereria limitações não naturais a seus significados ordinários, o que seria, na verdade, mais difícil de se lembrar consistentemente do que as definições de símbolos completamente novos.

(2) A estrutura gramática da linguagem é adaptada para uma ampla variedade de usos. Então, não há uma simplicidade única em representar os poucos processos e ideias simples, embora altamente abstratos, que surgem nos trens dedutivos de raciocínio empregados aqui. De fato, a simplicidade muito abstrata das ideias deste trabalho derrota a linguagem. A linguagem pode representar ideias complexas mais facilmente. A proposição "uma baleia é grande" representa a linguagem em seu melhor, dando uma expressão concisa a um fato complicado; enquanto a verdadeira análise de "um é um número" leva, na linguagem, a uma prolixidade intolerável. Consequentemente, concisão é ganhada ao se usar um simbolismo designado especialmente para representar as ideias e processos de dedução que ocorrem neste trabalho.

(3) A adaptação das regras do simbolismo aos processos de dedução ajuda a intuição em regiões abstratas demais para que a imaginação apresente prontamente à mente a verdadeira relação entre as ideias empregadas. Pois, várias colocações de símbolos se tornam familiares como representando colocações importantes de ideias; e, por sua vez, as possíveis relações – de acordo com as regras do simbolismo – entre estas colocações de símbolos se tornam familiares, e estas outras colocações representam relações ainda mais complicadas entre as ideias abstratas. E então a mente é finalmente levada a construir trens de raciocínio em regiões do pensamento em que a imaginação seria completamente incapaz de sustentar a si mesmo sem a ajuda simbólica. A linguagem ordinária não produz tal ajuda. Sua estrutura gramática não representa unicamente as relações entre as ideias envolvidas. Assim, "uma baleia é grande" e "um é um número" ambos parecem iguais, de modo que o olho não dá ajuda à imaginação.

(4) A concisão do simbolismo permite que uma proposição inteira seja representada a olho nu como um todo, ou no máximo em duas ou três partes divididas onde as quebras naturais, representadas no simbolismo, ocorrem. Esta é uma propriedade humilde, mas é de fato muito importante em conexão com as vantagens enumeradas no título (3).

(5) A obtenção dos objetos primeiramente mencionados deste trabalho, a saber, a completa enumeração de todas as ideias e passos no raciocínio empregado na matemática, necessita tanto de concisão e da apresentação de cada proposição com o máximo de formalidade, de uma forma o mais característico de si mesmo possível.

Mais luz sobre os métodos e simbolismos deste livro será lançada por uma leve consideração sobre os limites de seu emprego útil:

(α) A maioria das investigações matemáticas está preocupada não com a análise do processo completo de raciocínio, mas com um resumo da prova que seja suficientemente convincente para uma mente devidamente instruída. Para tais investigações, a apresentação detalhada dos passos do raciocínio certamente é desnecessária, dado que os detalhes são levados longe o suficiente para evitar erros. Nesta conexão, pode-se lembrar que as investigações de Weierstrass e outros da mesma escola mostraram que, mesmo em tópicos comuns do pensamento matemático, muito mais detalhe é necessário do que as gerações prévias de matemáticos anteciparam.

(β) Na proporção em que a imaginação funciona facilmente em qualquer região do pensamento, o simbolismo se torna (exceto para finalidade expressa da análise) apenas necessário como uma taquigrafia conveniente para registrar resultados obtidos sem sua ajuda. É um objeto subsidiário deste trabalho mostrar que, com a ajuda do simbolismo, o raciocínio dedutivo pode ser estendido a regiões do pensamento geralmente não passível de tratamento matemático. E até que as ideias de tais ramos do conhecimento se tornem mais familiares, o tipo detalhado de raciocínio, que também é requerido para análise dos passos, é apropriado para a investigação de verdades gerais em relação a estes assuntos.

CAPÍTULO I

EXPLANAÇÕES PRELIMINARES DE IDEIAS E NOTAÇÕES

A notação adotada no presente trabalho é baseada na de Peano, e as seguintes explanações são até certo ponto modeladas naquelas que ele prefixa em seu *Formulario Mathematico*. Seu uso de pontos como colchetes é adotado, bem como vários de seus símbolos.

Variáveis. A ideia de uma variável, como ocorre no presente trabalho, é mais geral que aquela que é explicitamente utilizada na matemática ordinária. Na matemática ordinária, uma variável geralmente significa um número ou quantidade indeterminada. Na lógica matemática, qualquer símbolo cujo significado não é determinado é chamado de *variável*, e as várias determinações das quais seu significado é suscetível são chamadas de *valores* da variável. Os valores podem ser conjuntos de entidades, proposições, funções, classes ou relações, de acordo com as circunstâncias. Se um enunciado é feito sobre "Sr. A e Sr. B", "Sr. A" e "Sr. B" são variáveis cujos valores estão restritos a homens. Uma variável pode ter um intervalo de valores convencionalmente atribuído, ou pode (na ausência de qualquer indicação de um intervalo de valores) ter como intervalo de valores todas as determinações que tornam significativo o enunciado em que ela ocorre. Assim quando um livro de lógica assere que "A é A", sem qualquer indicação do que A possa ser, o que se quer dizer é que *qualquer* enunciado da forma "A é A" é verdadeiro. Nós podemos chamar uma variável de *restrita* quando seus valores são restritos a apenas alguns daqueles de que ela é capaz; de outra forma, chamaremos de *irrestrita*. Assim, quando uma variável irrestrita ocorre, ela representa qualquer objeto tal que o enunciado em questão possa ser feito significativamente (*i.e.*, verdadeiramente ou falsamente) em relação a este objeto. Para os propósitos da lógica, a variável irrestrita é mais conveniente que a restrita, e nós sempre a empregaremos. Descobriremos que a variável irrestrita ainda está sujeita a limitações impostas pela maneira de sua ocorrência, *i.e.*, coisas que podem ser ditas significantemente em relação à proposição não podem ser ditas significantemente em relação a uma classe ou uma relação, e assim por diante. Mas as limitações para as quais a variável irrestrita está sujeita não precisam ser explicitamente indicadas, uma vez que elas são os limites da significância do enunciado em que a variável ocorre, e são, portanto, intrinsecamente determinadas por este enunciado. Isto será explicado mais detalhadamente mais tarde[11].

Resumindo, os três fatos relevantes relacionados ao uso da variável são: (1) que uma variável é ambígua em sua denotação e, consequentemente, indefinida; (2) que uma variável preserva uma identidade reconhecível em várias ocorrências no mesmo contexto, de maneira que muitas variáveis podem correr juntas no mesmo contexto, cada uma com sua identidade inseparável; e (3) que o intervalo de possíveis determinações de duas variáveis pode ser o mesmo, de maneira que uma

[11] Cf. Capítulo II da Introdução.

determinação possível de uma variável também é uma determinação possível da outra, ou o intervalo das duas variáveis pode ser diferente, de maneira que, se uma determinação possível de uma variável é dada à outra, a frase completa resultante é sem significado em vez de se tornar uma proposição completamente desambígua (verdadeira ou falsa), como seria o caso se todas as suas variáveis tivessem recebido determinações *adequadas*.

O uso de várias letras. Variáveis serão denotadas por letras simples, da mesma maneira que certas constantes; mas uma letra que uma vez foi atribuída a uma constante por uma definição não deverá ser utilizada depois para denotar uma variável. As letras pequenas do alfabeto ordinário serão todas usadas para variáveis, exceto p e s depois de ∗40, em que significados constantes são atribuídos a estas duas letras. As seguintes letras maiúsculas receberão significado constante: B, C, D, E, F, I e J. Dentre as letras gregas minúsculas, nós daremos significado constante a ε, ι e (em um estágio posterior) a η, θ e ω. Certas letras regras maiúsculas serão, de tempos em tempos, introduzidas para constantes, mas letras gregas maiúsculas não serão usadas para variáveis. Das letras restantes, p, q e r serão chamadas *letras proposicionais*, e significarão proposições variáveis (exceto que, de ∗40 para frente, p não deve ser usada para uma variável); f, g, ϕ, ψ, χ, θ e (até ∗33) F serão chamadas *letras funcionais*, e serão usadas para funções variáveis.

As letras gregas minúsculas ainda não mencionadas serão usadas para variáveis cujos valores são classes, e serão referidas simplesmente como *letras gregas*. Letras maiúsculas ordinárias ainda não mencionadas serão usadas para variáveis cujos valores são relações, e serão referidas simplesmente como *letras maiúsculas*. Letras minúsculas ordinárias além de p, q, r, s, f e g serão usadas para variáveis com valores dos quais não se sabe se são funções, classes ou relações; estas letras serão referidas simplesmente como *letras latinas minúsculas*.

Depois da parte inicial do trabalho, proposições e funções variáveis dificilmente ocorrerão. Nós teremos, então, três tipos principais de variáveis: classes variáveis, denotadas por letras gregas pequenas; relações variáveis, denotadas por letras maiúsculas; e variáveis não necessariamente dadas como classes ou relações, que serão denotadas por letras latinas minúsculas.

Além do uso de letras gregas minúsculas para classes variáveis, letras maiúsculas para relações variáveis e letras latinas pequenas para variáveis de tipo completamente indeterminado pelo contexto (estas surgem da possibilidade de "ambiguidade sistemática", explicada mais tarde nas explicações da teoria dos tipos), o leitor precisa apenas se lembrar de que todas as letras representam variáveis, a menos que elas sejam definidas como constantes em algum momento prévio no livro. Em geral, a estrutura de contexto determina o escopo das variáveis contidas nele; mas a indicação especial da natureza das variáveis empregadas, como aqui proposta, economiza um considerável trabalho de pensamento.

As funções fundamentais de proposições. Um agregado de proposições, consideradas como todos determinados não necessariamente não ambiguamente, em uma única proposição mais complexa que seus constituintes, é uma função *com proposições como argumentos*. A ideia geral de tal agregado de proposição, ou de variáveis representando proposições, não será empregada neste trabalho. Mas há quatro casos especiais que são de fundamental importância, uma vez que todos os agregados de proposições subordinadas em uma proposição complexa que ocorre na sequência são formados a partir delas passo-a-passo.

Elas são (1) a Função Contraditória, (2) a Soma Lógica, ou Função Disjuntiva, (3) o Produto Lógico, ou Função Conjuntiva, e (4) a Função Implicativa. Estas funções, no sentido em que são requeridas neste trabalho, não são independentes; e se duas delas são tomadas como ideias primitivas indefinidas, as outras duas podem ser definidas em termos delas. É até certo ponto – apesar de não completamente – arbitrário quais funções serão tomadas como primitivas. Simplicidade de ideias primitivas e simetria de tratamento parece ser ganho ao se tomar as duas primeiras funções como ideias primitivas.

A Função Contraditória com argumento p, onde p é qualquer proposição, é a proposição que é a contraditória de p, isto é, a proposição asserindo que p não é verdadeiro. Isto é denotado por $\sim p$. Então, $\sim p$ é a função contraditória com p como argumento, e significa a negação da proposição p. Ela também será referida pela proposição não-p. Assim, $\sim p$ significa não-p, que significa a negação de p.

A Soma Lógica é uma função proposicional com dois argumentos, p e q, e é a proposição asserindo p ou q de maneira disjuntiva, isto é, asserindo que pelo menos um dos dois, p ou q, é verdadeiro. Isto é denotado por $p \vee q$. Então, $p \vee q$ é a soma lógica com p e q como argumentos. Isso também é chamado de soma lógica de p e q. Consequentemente, $p \vee q$ significa que pelo menos p ou q é verdadeiro, não excluindo o caso em que ambos são verdadeiros.

O Produto Lógico é uma função proposicional com dois argumentos, p e q, e é a proposição asserindo p e q conjuntivamente, isto é, asserindo que ambos, p e q, são verdadeiros. Isto é denotado por $p.q$, ou – para fazer com que os pontos ajam como colchetes da maneira que será explicada posteriormente – por $p:q$, ou por $p:.q$, ou por $p::q$. Então, $p.q$ é o produto lógico com p e q como argumentos. Ele também é chamado de produto lógico de p e q. Consequentemente, $p.q$ significa que tanto p quanto q são verdadeiros. Pode-se ver facilmente que esta função pode ser definida em termos das duas funções precedentes. Pois, quando p e q são ambos verdadeiros, deve ser falso que $\sim p$ ou $\sim q$ é verdadeiro. Assim, neste livro, $p.q$ é meramente uma forma encurtada de simbolismo para

$$\sim(\sim p \vee \sim q).$$

Se qualquer ideia adicional for anexada à proposição "ambos, p e q, são verdadeiros", ela não será necessária aqui.

A Função Implicativa é uma função proposicional com dois argumentos, p e q, e é a proposição que diz que não-p ou q é verdadeiro, isto é, é a proposição $\sim p \vee q$. Então, se p é verdadeiro, $\sim p$ é falso, e, consequentemente, a única alternativa que resta para a proposição $\sim p \vee q$ é que q seja verdadeiro. Em outras palavras, se p e $\sim p \vee q$ são ambos verdadeiros, então q é verdadeiro. Neste sentido, a proposição $\sim p \vee q$ será citada como afirmando que p implica q. A ideia contida nesta proposição fundamental é tão importante que ela requer um simbolismo que, com simplicidade direta, representa a proposição como conectando p e q sem a intervenção de $\sim p$. Mas "implica", como usado aqui, expressa nada além da conexão entre p e q também expressa pela disjunção "não-p ou q". O símbolo empregado para "p implica q", i.e., para "$\sim p \vee q$" é "$p \supset q$". Este símbolo também pode ser lido como "se p, então q". A associação da implicação com o uso de uma variável aparente produz uma ideia chamada "implicação formal". Isto é explicado depois: é uma ideia derivada da "implicação" como aqui foi definida. Quando for necessário discriminar explicitamente "implicação" de "implicação formal", ela será chamada "implicação matéria.". Assim, "implicação material" é simplesmente a "implicação" aqui definida. O processo de inferência, que no uso comum é confundido com a implicação, será explicado imediatamente.

Estas quatro funções de proposições são as funções proposicionais constantes fundamentais (i.e., definidas) com *proposições como argumentos*, e todas as outras funções proposicionais constantes com proposições como argumentos, na medida em que são requeridas neste trabalho, são formadas a partir delas por passos sucessivos. Nenhuma função proposicional *variável* desse tipo ocorrerá neste trabalho.

Equivalência. O exemplo mais simples de formação de uma função de proposições mais complexas pelo uso destas quatro formas fundamentais é fornecido pela "equivalência". Duas proposições p e q são ditas "equivalentes" quando p implica q e q implica p. Esta relação entre p e q é denotada por "$p \equiv q$", e significa "$(p \supset q).(q \supset p)$". Pode-se ver facilmente que duas proposições são equivalentes quando, e apenas quando, elas são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Equivalência surge na escala da importância quando falamos de "implicação formal" e então de "equivalência formal". Não se deve supor que duas proposições equivalentes sejam em qualquer sentido idênticas, ou mesmo remotamente preocupadas com o mesmo assunto. Assim, "Newton foi um homem" e "o Sol é quente" são equivalentes, sendo ambas verdadeiras, e "Newton não foi um homem" e "o Sol é frio" são equivalentes, sendo ambas falsas. Mas aqui nós antecipamos deduções que seguem mais diante do nosso raciocínio. A equivalência, em sua origem, é meramente a implicação mútua como enunciada acima.

Valores-verdade. O "valor-verdade" de uma proposição é *verdade* se ela for verdadeira, e *falsidade* se ela for falsa[12]. Será observado que os valores-verdade de $p \vee q$, $p.q$, $p \supset q$, $\sim p$ e $p \equiv q$ dependem apenas daqueles de p e q; nomeadamente,

[12] Esta frase é devido a Frege.

o valor-verdade de “$p \lor q$” é verdade se o valor-verdade de p ou de q é verdade, e falsidade caso contrário; o de “$p. q$” é verdade se o de p e de q forem ambos verdade, e falsidade caso contrário; o de “$p \supset q$” é verdade se o de p é falsidade ou o de q é verdade; o de “$\sim p$” é o oposto do de p; e o de “$p \equiv q$” é verdade se p e q têm o mesmo valor-verdade, e falsidade caso contrário. Agora, as únicas maneiras pelas quais proposições aparecerão no presente trabalho são derivadas do que foi dito acima por combinação e repetição. Consequentemente, é fácil ver (apesar de não se possível provar formalmente exceto em cada caso particular) que se uma proposição p ocorrer em qualquer proposição $f(p)$ com a qual teremos ocasião de lidar, o valor-verdade de $f(p)$ dependerá não da proposição particular p, mas apenas de seu valor-verdade; i.e., se $p \equiv q$, nós teremos $f(p) \equiv f(q)$. Assim, sempre que se sabe que duas proposições são equivalentes, uma pode ser substituída pela outra em qualquer fórmula com a qual teremos ocasião de lidar.

Nós podemos chamar uma função $f(p)$ de “função-verdade” quando seu argumento p é uma proposição, e o valor-verdade de $f(p)$ depender apenas do valor-verdade de p. Tais funções não são de maneira alguma as únicas funções comuns de proposições. Por exemplo, “A acredita que p” é uma função de p que variará seu valor-verdade para diferentes argumentos tendo o mesmo valor-verdade: A pode acreditar em uma proposição verdadeira sem acreditar em outra, e pode acreditar em uma proposição falsa sem acreditar em outra. Tais funções não são excluídas da nossa consideração, e estão incluídas no escopo de quaisquer proposições gerais que nós façamos sobre funções; mas as funções particulares de proposições que nós teremos oportunidade de construir ou considerar explicitamente são todas funções-verdade. Este fato está proximamente conectado com uma característica da matemática, a saber, que a matemática está sempre preocupada com extensões em vez de intensões. A conexão, se não estiver óbvia agora, ficará óbvia quando considerarmos a teoria das classes e relações.

Sinal de asserção. O sinal “$\vdash$”, chamado de “sinal de asserção”, significa que o que se segue é asserido. É necessário distinguir uma proposição completa, que nós asserimos, de proposições subordinadas contidas nela mas não asseridas. Na linguagem escrita ordinária, uma sentença contida entre pontos finais denota uma proposição asserida, e se ela for falsa, o livro está em erro. O sinal “$\vdash$”, prefixado a uma proposição, serve a este mesmo propósito em nosso simbolismo. Por exemplo, se “” ocorre, isso deve ser tomado como uma asserção completa, convencendo os autores do erro a menos que a proposição “$p \supset p$” seja verdadeira (como é). Também, uma proposição enunciada em símbolos sem o sinal “$\vdash$” prefixado não é asserida, e é meramente colocada em consideração, ou como uma parte subordinada a uma proposição asserida.

Inferência. O processo de inferência é como se segue: uma proposição “p” é asserida, e uma proposição “p implica q” é asserida, e então, como consequência, a proposição “q” é asserida. A confiança na inferência é a crença de que se as duas proposições iniciais não estão erradas, a asserção final não está errada. Consequentemente, em símbolos, onde p e q certamente têm determinações especiais, sempre que

"$\vdash p$" e "$\vdash (p \supset q)$"

ocorrem, então "$\vdash q$" ocorrerá se desejar colocá-lo em registro. O processo de inferência não pode ser reduzido a símbolos. Seu único registro é a ocorrência de "$\vdash q$". Certamente, é conveniente, mesmo sob risco de repetição, escrever "$\vdash p$" e "$\vdash (p \supset q)$" em uma justaposição estreita antes de proceder a "$\vdash q$" como resultado de uma inferência. Quando isso for feito, por uma questão de dar atenção à inferência que estiver sendo feita, nós escreveremos

"$\vdash p \supset \vdash q$",

que deve ser considerada como uma mera abreviação do enunciado triplo

"$\vdash p$" e "$\vdash (p \supset q)$" e "$\vdash q$".

Assim, "$\vdash p \supset \vdash q$" pode ser lido "$p$, portanto q", sendo de fato a mesma abreviação, essencialmente, que isso é; pois "p, portanto q" não enuncia explicitamente que p implica q, o que é parte de seu significado. Uma inferência é largar uma premissa verdadeira[13]; é a dissolução de uma implicação.

O uso de pontos. Pontos na linha dos símbolos têm dois usos, um para colocar proposições entre parênteses, e outro para indicar o produto lógico de duas proposições. Pontos imediatamente precedidos por "$\vee$", ou "$\supset$", ou "$\equiv$", ou "$\vdash$", ou por "(x)", "(x, y)", "(x, y, z)" ... ou "$(\exists x)$", "$(\exists x, y)$", "$(\exists x, y, z)$" ... ou "$[(\iota x)(\phi x)]$", ou "$[R'y]$" ou expressões análogas, servem para colocar proposições entre parênteses; pontos ocorrendo em outras circunstâncias servem para marcar o produto lógico. O princípio geral é que um número maior de pontos indica um parêntese externo e um número menor indica um parêntese interno. A regra exata quanto ao escopo dos parênteses indicado por pontos é alcançada dividindo-se as ocorrências de pontos em três grupos, que nós chamaremos I, II e III. O grupo I consiste de pontos adjacentes a um sinal de implicação $(\supset)$, ou de equivalência $(\equiv)$, ou de disjunção $(\vee)$, ou de igualdade por definição $(= Df)$. O grupo II consiste de pontos seguidos de colchetes indicativos de uma variável aparente, como (x), (x, y), $(\exists x)$, $(\exists x, y)$, $[(\iota x)(\phi x)]$, ou expressões análogas.[14] O grupo III consiste de pontos que interpõem entre proposições para indicar um produto lógico. O grupo I tem força maior que o grupo II, e o grupo II tem mais força que o grupo III. O escopo dos parênteses é indicado por qualquer coleção de pontos se estende para trás ou para frente além de qualquer número menor de pontos, ou qualquer número igual de um grupo de menor força, até chegarmos ao final da proposição asserida ou a um número maior de pontos, ou um número igual pertencendo a um grupo de força igual ou

[13] *"An inference is the dropping of a true premiss"*

[14] O significado destas expressões será explicado depois, e exemplos de usos de pontos em conexão com elas serão dados em pp. 16, 17.

superior. Pontos indicando um produto lógico têm um escopo que funciona tanto para frente quanto para trás; outros pontos só funcionam longe do sinal adjacente de disjunção, implicação ou equivalência, ou à frente do símbolo adjacente de um dos outros tipos enumerados no grupo II.

Alguns exemplos servirão para ilustrar o uso dos pontos.

"$p \vee q . \supset . q \vee p$" significa a proposição "'p ou q' implica 'q ou p'". Quando nós *asserimos* esta proposição, em vez de meramente considera-la, nós escrevemos

$$\text{“}\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p\text{”},$$

onde os dois pontos após o sinal de asserção mostram que o que é asserido é o todo que segue o sinal de asserção, já que não há outros dois pontos em outro lugar. Se nós tivéssemos escrito "$p : \vee : q . \supset . q \vee p$", isso significaria a proposição "p é verdadeiro ou q implica 'q ou p'". Se nós desejássemos asserir isso, nós deveríamos colocar três pontos depois do sinal de asserção. Se nós tivéssemos escrito "$p \vee q . \supset . q : \vee : p$", isso significaria a proposição "'p ou q' implica q, ou p é verdadeiro". As formas " $p . \vee . q . \supset . q \vee p$" e "$p \vee q . \supset . q . \vee . p$" não têm significado.

"$p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$" significará "se p implica q, então se p implica r, p implica r". Se nós quisermos asserir isso (o que é verdadeiro), nós escrevemos

$$\text{“}\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r\text{”}.$$

Novamente, "$p \supset q . \supset . q \supset r : \supset . p \supset r$" significará "se '$p$ implica q' implica 'q implica r', então p implica r". Isso geralmente é falso. (Observe que "$p \supset q$" é às vezes mais convenientemente lido como "p implica q", e às vezes como "se p, então q"). "$p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r$". Nesta fórmula, o primeiro ponto indica um produto lógico; consequentemente, o escopo do segundo ponto se estende para trás até o começo da proposição. "$p \supset q : q \supset r . \supset . p \supset r$" significa "$p$ implica q; e se q implica r, então p implica r". (Isso geralmente não é verdadeiro). Aqui, os dois pontos indicam um produto lógico; uma vez que os dois pontos não ocorrem em nenhum outro lugar, o escopo destes dois pontos se estende para trás até o começo da proposição, e para frente até o final.

"$p \vee q . \supset :. p . \vee . q \supset r : \supset . p \vee r$" significa "se p ou q é verdadeiro, então se p ou 'q implica r' é verdadeiro, se segue que p ou r é verdadeiro". Se isso for asserido, então nós devemos colocar quatro pontos depois do sinal de asserção:

$$\text{“}\vdash :: p \vee q : p . \vee . q \supset r : \supset . p \vee r\text{”}.$$

(Esta proposição será provada no corpo do trabalho; ela é $*2{\cdot}75$). Se nós desejamos asserir (o que é equivalente ao que foi dito acima) a proposição: "se p ou q é verdadeiro, e p ou 'q implica r' é verdadeiro, então p ou r é verdadeiro", nós escrevemos

$$\text{“}\vdash :. p \vee q : p . \vee . q \supset r : \supset . p \vee r\text{”}.$$

Aqui, o primeiro par de pontos indica um produto lógico, enquanto o segundo não. Então, o escopo do segundo par de pontos passa sobre o primeiro, e vai até atingir os três pontos depois do símbolo de asserção.

Outros usos para os pontos seguirão os mesmos princípios, e serão explicados conforme forem introduzidos. Ao ler uma proposição, os pontos devem ser percebidos primeiro, como eles mostram sua estrutura. Em uma proposição contendo vários sinais de implicação ou equivalência, aquele com o maior número de pontos antes ou depois é o operador principal: tudo que vem antes dele é dito implicar ou ser equivalente a tudo o que vai depois dele.

Definições. Uma definição é uma declaração de que um certo símbolo ou combinação de símbolos recentemente introduzida significa o mesmo que uma certa outra combinação de símbolos cujo significado já é conhecido. Ou, se a combinação de símbolos definidora é uma que só adquire significado quando combinada de maneira adequada com outros símbolos[15], isso significa que qualquer combinação de símbolos nas quais os símbolos ou combinação de símbolos recentemente introduzida ocorrem deve ter aquele significado (se tiver qualquer significado) que resulta da substituição da combinação de símbolos definidora pelos símbolos ou combinação de símbolos recentemente definidos em qualquer lugar que os últimos ocorrerem. Nós daremos os nomes de *definiendum* e *definiens*, respectivamente, ao que é definido e àquilo que é definido como o significado. Nós expressamos uma definição colocando o *definiendum* à esquerda e o *definiens* à direita, com o sinal "=" entre eles, e as letras "Df" à direita do *definiens*. Deve-se entender que o sinal "=" e as letras "Df" devem ser considerados como formando juntos um único símbolo. O sinal "=", sem as letras "Df", terão um significado diferente, que será explicado em breve.

Um exemplo de definição é

$$p \supset q . = . \sim p \vee q \qquad \text{Df.}$$

Deve-se observar que uma definição não é, estritamente falando, parte do assunto em que ela ocorre, pois, uma definição está preocupada inteiramente com os símbolos, não com o que eles simbolizam. Além disso, ela não é verdadeira ou falsa, sendo a expressão de uma volição, não de uma proposição. (Por esta razão, definições não são precedidas por um sinal de asserção). Teoricamente, é desnecessário dar uma definição: nós podemos sempre usar o *definiens*, e então dispensar completamente o *definiendum*. Então, apesar de nós utilizarmos definições e não definirmos "definição", "definição" não aparece entre nossas ideias primitivas, porque as definições não são parte do nosso assunto, mas são, estritamente falando, meras conveniências tipográficas. Praticamente, é claro, se nós não introduzirmos definições, muito rapidamente nossas fórmulas se tornariam tão longas que não seriam manejáveis; mas, teoricamente, todas as definições são supérfluas.

---

15 Este caso será completamente considerado no Capítulo III da Introdução. Não precisa mais nos preocupar no momento.

Apesar do fato de que definições são teoricamente supérfluas, nunca é, porém, verdade que elas frequentemente transmitem mais informações importantes que está contida nas proposições em que elas são usadas. Isso surge de duas causas. Primeiro, uma definição geralmente implica que o *definiens* é digno de consideração cuidadosa. Por isso, a coleção de definições incorpora nossa escolha de assuntos e nosso julgamento sobre o que é mais importante. Segundo, quando o que é definido é (como frequentemente ocorre) algo já familiar, como números cardinais ou ordinais, a definição contém uma análise de uma ideia comum, e pode, portanto, expressar um avanço notável. A definição de Cantor do continuum ilustra isso: sua definição leva ao enunciado de que o que ele define é o objeto que tem as propriedades comumente associadas com a palavra "continuum", apesar de que o que precisamente constitui estas propriedades nunca havia sido conhecido. Em tais casos, uma definição é uma "definição definitiva" [*making definite*]: ela dá determinação a uma ideia que previamente era mais ou menos vaga.

Por estas razões, descobriremos que, no que se segue, as definições são o que são mais importantes, e o que mais merece a atenção prolongada do leitor.

Alguns comentários especiais devem ser feitos em relação a variáveis ocorrendo no *definiens* e no *definiendum*. Mas eles serão adiados até que a noção de "variável aparente" seja introduzida, quando o assunto puder ser considerado como um todo.

Sumário dos enunciados precedentes. Há, acima, três ideias primitivas que não são "definidas", mas apenas descritivamente explicadas. Sua primitividade é apenas relativa à nossa exposição da conexão lógica e não é absoluta; apesar de, é claro, tal exposição ganhar em importância de acordo com a simplicidade de suas ideias primitivas. Estas ideias são simbolizadas por "$\sim p$" e "$p \vee q$", e por "$\vdash$" prefixado a uma proposição.

Três definições foram introduzidas:

$$p.q. =. \sim(\sim p \vee \sim q) \quad \text{Df,}$$
$$p \supset q. =. \sim p \vee q \quad \text{Df,}$$
$$p \equiv q. =. p \supset q. q \supset p \quad \text{Df.}$$

Proposições primitivas. Algumas proposições devem ser assumidas sem provas, uma vez que toda inferência procede de proposições previamente asseridas. Estas, no que diz respeito às funções de proposições mencionadas acima, se encontrarão asseridas em $*1$, onde a exposição formal e contínua do assunto começa. Tais proposições serão chamadas "proposições primitivas". Elas, como as ideias primitivas, são até certo ponto uma questão de escolha arbitrária; apesar de que, como no caso anterior, um sistema lógico cresce em importância conforme as proposições primitivas são poucas e simples. Será visto que graças à fraqueza da imaginação ao lidar com ideias abstratas muito simples, nenhum estresse muito grande pode ser colocado sobre sua obviedade. Elas são óbvias à mente instruída, mas também há muitas proposições que não podem ser verdadeiras, por serem desprovadas por suas consequências contraditórias. A prova de um sistema lógico é sua adequação e sua coerência[16]. Isto é:

[16] N.T.: Aqui, Russell está falando sobre as propriedades de completude e de correção.

(1) o sistema deve conter, entre suas deduções, todas aquelas proposições que nós acreditamos serem verdadeiras e capazes de dedução de premissas lógicas sozinhas, apesar de possivelmente elas requererem alguma leve limitação na forma de um aumento no rigor na enunciação; e (2) o sistema não deve levar a contradições, isto é, ao perseguir nossas inferências, nós nunca devemos ser levados a asserir tanto p quanto não-p, i.e., ambos "$\vdash . p$" e "$\vdash . \sim p$" não podem aparecer legitimamente.

A seguir estão as proposições primitivas empregadas no cálculo de proposições. As letras "Pp" significam "proposições primitivas".

(1) Qualquer coisa implicada por uma premissa verdadeira é verdadeiro Pp.
Esta é a regra que justifica a inferência.

(2) $\vdash : p \vee p . \supset . p$ Pp,

i.e., se p ou p é verdadeiro, então p é verdadeiro.

(3) $\vdash : q . \supset . p \vee q$ Pp,

i.e., se q é verdadeiro, então p ou q é verdadeiro.

(4) $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ Pp,

i.e., se p ou q é verdadeiro, então q ou p é verdadeiro.

(5) $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$ Pp,

i.e., se p é verdadeiro ou "q ou r" é verdadeiro, então q é verdadeiro ou "p ou r" é verdadeiro.

(6) $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ Pp,

i.e., se q implica r, então "p ou q implica "p ou r".

(7) Além das proposições primitivas acima, nós requeremos uma proposição primitiva chamada "o axioma da identificação de variáveis reais". Quando nós tivermos asserido separadamente duas funções diferentes de x, onde x é indeterminado, frequentemente será importante saber se nós podemos identificar o x de uma asserção com o x da outra. Este será o caso – como nosso axioma nos permite inferir – se ambas as asserções apresentam x como argumento para alguma função, isto é, se ϕx é um constituinte de ambas as asserções (para qualquer função proposicional que ϕ possa ser) ou, mais geralmente, se $\phi(x, y, z, ...)$ é um constituinte de uma asserção, e $\phi(x, u, v, ...)$ é um constituinte de outra. Este axioma introduz noções que ainda não foram explicadas; para uma conta completa, veja os comentários acompanhando $*3 \cdot 03$, $*1 \cdot 7$, $*1 \cdot 71$ e $*1 \cdot 72$ (que é o enunciado deste axioma) no corpo do trabalho, bem como a explicação das funções proposicionais e asserções ambíguas a ser dada em breve.

Algumas proposições simples. Além das proposições primitivas que nós já mencionamos, a seguir estão algumas das propriedades elementares mais importantes de proposições que aparecem nas deduções.

A lei do terceiro excluído:

$$\vdash . p \vee \sim p .$$

Isto é o $*2 \cdot 11$ abaixo. Indicaremos entre parênteses os números dados às seguintes proposições no corpo do nosso trabalho.

A lei de contradição ($*3 \cdot 24$):

$$\vdash . \sim (p . \sim p).$$

A lei da dupla negação ($*4 \cdot 13$):

$$\vdash . p \equiv \sim (\sim p).$$

O princípio da *transposição*, i.e, "se p implica q, então não-q implica não-p", e vice-versa: este princípio tem várias formas, a saber

$$(*4 \cdot 1) \qquad \vdash : p \supset q . \equiv . \sim q \supset \sim p,$$
$$(*4 \cdot 11) \qquad \vdash : p \equiv q . \equiv . \sim p \equiv \sim q,$$
$$(*4 \cdot 14) \qquad \vdash :. p . q . \supset . r : \equiv : p . \sim r . \supset . q,$$

bem como outras que são variantes destas.

A lei da tautologia, nas duas formas:

$$(*4 \cdot 24) \qquad \vdash : p . \equiv . p . p,$$
$$(*4 \cdot 25) \qquad \vdash : p . \equiv . p \vee p,$$

i.e., "p é verdadeiro" é equivalente a "p é verdadeiro e p é verdadeiro", bem como a "p é verdadeiro ou p é verdadeiro". De um ponto de vista formal, é através da lei da tautologia e suas consequências que a álgebra da lógica é principalmente distinguida da álgebra ordinária.

A lei a absorção:

$$(*4 \cdot 71) \qquad \vdash :. p \supset q . \equiv : p . \equiv . p . q$$

i.e., "p implica q" é equivalente a "p é equivalente a $p . q$". Esta é chama de lei da absorção porque ela mostra que o fator q no produto é absorvido pelo fator p, se p implica q. Este princípio nos permite substituir uma implicação $(p \supset q)$ por uma equivalência $(p . \equiv . p . q)$ sempre que for conveniente.

Um princípio análogo e muito importante é o seguinte:

$$(*4 \cdot 73) \qquad \vdash :. q . \supset : p . \equiv . p . q.$$

A soma e a multiplicação lógica de proposições obedecem às leis associativa e comutativa, e a distributiva de duas formas, a saber,

$$(*4 \cdot 4) \qquad \vdash :. p . q \vee r . \equiv : p . q . \vee . p . r,$$
$$(*4 \cdot 41) \qquad \vdash :. p . \vee . q . r : \equiv : p \vee q . p \vee r.$$

A segunda destas distingue as relações de soma e multiplicação lógica da soma e multiplicação aritmética.

Funções proposicionais. Seja ϕx um enunciado contendo uma variável x tal que ele se torna uma proposição quando a x é dado qualquer determinado significado fixado. Então, ϕx é chamado "função proposicional"; ele não é uma proposição, uma vez que graças à ambiguidade de x, ele não faz qualquer asserção. Assim, "x está machucado" realmente não faz qualquer asserção, até que nós digamos quem é x. No entanto, graças à individualidade retida pela variável ambígua x, este é um exemplo ambíguo da coleção de proposições alcançadas, fornecendo todas as possíveis determinações para x em "x está machucado" que produzem uma proposição, verdadeira ou falsa. Ainda, se "x está machucado" e "y está machucado" ocorrem *no mesmo contexto*, onde y é outra variável, então de acordo com as determinações dadas a x e y, eles podem ser determinados como sendo (possivelmente) a mesma proposição ou como sendo (possivelmente) proposições diferentes. Mas além de algumas determinações dadas a x e y, eles retêm naquele contexto suas diferenciações ambíguas. Então, "x está machucado" é um "valor" ambíguo de uma função proposicional. Quando nós quisermos falar da função proposicional correspondente a "x está machucado", nós escreveremos "$\hat{x}$ está machucado". Assim, "$\hat{x}$ está machucado" é a função proposicional e "x está machucado" é um valor ambíguo daquela função. Por consequência, apesar de "x está machucado" e "y está machucado" *ocorrendo no mesmo contexto* poderem ser distinguidos, "$\hat{x}$ está machucado" e "$\hat{y}$ está machucado" não transmitem qualquer distinção de significado. Mais geralmente, ϕx é um valor ambíguo da função proposicional $\phi\hat{x}$, e quando uma significação definida a substitui x , ϕa é um valor não ambíguo para $\phi\hat{x}$.

Funções são o tipo fundamental, do qual os tipos mais usuais de funções, como "$sin\, x$", ou "$log\, x$", ou "o pai de x", são derivados. Estas funções derivadas serão consideradas depois, e são chamadas "funções descritivas". As funções de proposições consideradas acima são um caso particular de funções proposicionais.

A extensão [range] de valores e variação total. Dessa forma, correspondendo a qualquer função proposicional $\phi\hat{x}$ há uma extensão [*range*], ou coleção, de valores, consistindo em todas as proposições (verdadeiras ou falsas) que podem ser obtidas ao dar toda determinação possível a x em ϕx. Um valor de x para o qual ϕx é verdadeiro é dito "satisfazer" $\phi\hat{x}$. Agora, em relação à verdade ou falsidade de proposições dessa extensão, três casos importantes devem ser notados e simbolizados. Estes casos são dados por três proposições das quais pelo menos uma deve ser verdadeira. Ou (1) todas as proposições da extensão são verdadeiras, ou (2) algumas proposições da extensão são verdadeiras, ou (3) nenhuma proposição da extensão é verdadeira. O enunciado (1) é simbolizado por "$(x).\,\phi x$", e (2) é simbolizado por "$(\exists x).\,\phi x$". Nenhuma definição destes símbolos é dada, que, portanto, incorporam duas novas ideias primitivas em nosso sistema. O símbolo "$(x).\,\phi x$" deve ser lido "ϕx sempre", ou "ϕx é sempre verdadeiro", ou "ϕx é verdadeiro para todos os possíveis valores de x". O símbolo "$(\exists x).\,\phi x$" pode ser lido como "existe um x para o qual ϕx é verdadeiro", ou "há um x que satisfaz $\phi\hat{x}$", e então se conforma com a forma natural de expressão do pensamento.

A proposição (3) pode ser expressa em termos das ideias fundamentais que agora temos em mãos. Para fazer isso, note que "$\sim\phi x$" significa a contraditória de $\phi\hat{x}$. Consequentemente, $\sim\phi\hat{x}$ é outra função proposicional tal que cada valor de $\phi\hat{x}$ contradiz um valor de $\sim\phi\hat{x}$ e vice-versa. Então, "$(x).\sim\phi x$" simboliza a proposição de que todo valor de $\phi\hat{x}$ não é verdadeiro. Este é o número (3) enunciado acima.

É um erro óbvio, apesar de ser facilmente cometido, assumir que os casos (1) e (3) são contraditórios entre si. O simbolismo expressa esta falácia de vez, pois (1) é $(x).\phi x$, e (3) é $(x).\sim\phi x$, enquanto que a contraditória de (1) é $\sim\{(x).\phi x\}$. Por uma questão de brevidade no simbolismo, uma definição é feita, a saber,

$$\sim(x).\phi x. =. \sim\{(x).\phi x\} \quad \text{Df.}$$

Definições cujo objetivo é obter alguma vantagem trivial na brevidade por um ligeiro ajuste nos símbolos serão consideradas de "importância meramente simbólica", em contraste àquelas definições que solicitam consideração de uma ideia importante.

A proposição $(x).\phi x$ é chamada de a "variação total" da função $\phi\hat{x}$.

Por motivos que serão explicados no Capítulo II, nós não tomamos a negação como uma ideia primitiva quando lidamos com proposições da forma $(x).\phi x$ e $(\exists x).\phi x$, mas nós *definimos* a negação de $(x).\phi x$, i.e., de "ϕx é sempre verdadeiro", como sendo "ϕx é algumas vezes falso", i.e., "$(\exists x).\sim\phi x$", e, similarmente, nós *definimos* a negação de $(\exists x).\phi x$ como sendo $(x).\sim\phi x$. Então, nós temos

$$\sim\{(x).\phi x\}. =. (\exists x).\sim\phi x \qquad \text{Df,}$$
$$\sim\{(\exists x).\phi x\}. =. (x).\sim\phi x \qquad \text{Df.}$$

De maneira similar, nós definimos uma disjunção em que uma das proposições é da forma "$(x).\phi x$" ou "$(\exists x).\phi x$" em termos de uma disjunção de proposições que não têm essa forma, tendo

$$(x).\phi x.\vee.p := . (x).\phi x \vee p \qquad \text{Df,}$$

i.e., "ϕx é sempre verdadeiro, ou p é verdadeiro" significa "'ϕx ou p' é sempre verdadeiro", com definições similares em outros casos. Este assunto será resumido no Capítulo II, e em ∗9 no corpo do trabalho.

Variáveis aparentes. O símbolo $(x).\phi x$ denota uma proposição definida, e não há distinção de significado entre "$(x).\phi x$" e "$(y).\phi y$" quando eles ocorrem no mesmo contexto. Então, "x" em "$(x).\phi x$" não é um constituinte ambíguo de qualquer expressão em que "$(x).\phi x$" ocorre; e tal expressão não deixa de fornecer um significado determinado por conta da ambiguidade do x em "ϕx". O símbolo "$(x).\phi x$" tem certa analogia ao símbolo

$$"\int_a^b \phi(x)dx",$$

para a integração definida, uma vez que em nenhum dos casos a expressão é uma função de x.

A extensão de x em "$(x).\,\phi x$" ou "$(\exists x).\,\phi x$" estende sobre o campo completo de valores para x para os quais "ϕx" tem valor, e, consequentemente, o significado de "$(x).\,\phi x$" ou de "$(\exists x).\,\phi x$" envolve a suposição de que tal campo é determinado. O x que ocorre em "$(x).\,\phi x$" ou em "$(\exists x).\,\phi x$" é chamado (seguindo Peano) de "variável aparente. Se segue do significado de "$(\exists x).\,\phi x$" que o x nesta expressão também é uma variável aparente. Uma proposição em que x ocorre como variável aparente não é uma função de x. Assim, e.g., "$(x).\,x = x$" significa "tudo é igual a si mesmo". Esta é uma constante absoluta, não uma função de uma variável x. Este é o motivo de x ser chamado de variável *aparente* nestes casos.

Além da "*extensão*" de x em "$(x).\,\phi x$" ou "$(\exists x).\,\phi x$", que é o campo de valores que x pode ter, nós falaremos do "*escopo*" de x, significando a função da qual todos os alguns valores estão sendo afirmados. Se nós estamos asserindo todos (ou alguns) os valores de "ϕx", "ϕx" é o escopo de x; se nós estamos asserindo todos (ou alguns) os valores de "$\phi x \supset p$", "$\phi x \supset p$" é o escopo de x; se nós estamos asserindo todos (ou alguns) os valores de "$\phi x \supset \psi x$", "$\phi x \supset \psi x$" será o escopo de x, e assim por diante. O escopo de x é indicado pelo número de pontos depois de "(x)" ou "$(\exists x)$"; isto é, o escopo se estende para frente até que cheguemos a um número igual de pontos que não indicam um produto lógico, ou um número maior indicando um produto lógico, ou o final da proposição asserida em que "(x)" ou "$(\exists x)$" ocorre, o que acontecer primeiro[17]. Assim, e.g.,

$$\text{“}(x) : \phi x . \supset . \psi x\text{”}$$

significará "ϕx sempre implica ψx", mas

$$\text{“}(x).\,\phi x . \supset . \psi x\text{”}$$

significará "se ϕx é sempre verdadeiro, então ψx é verdadeiro para o argumento x".

Note que na implicação

$$(x).\,\phi x . \supset . \psi x,$$

os dois x's não têm conexão um com o outro. Já que apenas um ponto se segue do x entre parênteses, o escopo do primeiro x é limitado ao "ϕx" que segue imediatamente o x entre parênteses. Geralmente é mais claro escrever

$(x).\,\phi x . \supset . \psi y$

ao invés de $(x).\,\phi x . \supset . \psi x,$

já que o uso de letras diferentes enfatiza a ausência de conexão entre as duas variáveis; mas não há necessidade lógica de se utilizar letras diferentes, e *às vezes* é conveniente usar a mesma letra.

[17] Isso concorda com as regras para as ocorrências de pontos dos tipos do Grupo II como explicado acima, pp. 9 e 10.

Asserções ambíguas e a variável real. Qualquer valor "ϕx" da função $\phi\hat{x}$ pode ser asserido. Tal asserção de um membro ambíguo dos valores de $\phi\hat{x}$ é simbolizado por

$$\text{“}\vdash . \phi x\text{”}.$$

Uma asserção ambígua desse tipo é uma ideia primitiva, que não pode ser definida em termos da asserção de proposições. Esta ideia primitiva é uma que incorpora o uso de variáveis. Além da asserção ambígua, a consideração de "ϕx", que é um membro ambíguo dos valores de $\phi\hat{x}$, seria de pouca consequência. Quando nós estamos considerando ou asserindo "ϕx", a variável x é chamada de "variável real". Considere, por exemplo, a lei do terceiro excluído na forma que ela tradicionalmente ocorre na lógica formal:

"a é b ou não b".

Aqui, a e b são variáveis reais: conforme elas variam, diferentes proposições são expressas, apesar de todas serem verdadeiras. Ao passo que a e b são indeterminados, como na enunciação acima, nenhuma proposição definida é asserida, mas o que é asserido é *qualquer* valor da função proposicional em questão. Isso só pode ser legitimamente asserido se, para qualquer valor que escolhamos, este valor é verdadeiro, i.e., se todos os valores são verdadeiros. Então, a forma acima da lei do terceiro excluído é equivalente a

"$(a, b). a$ é b ou não b",

i.e., a "é sempre verdadeiro que a é b ou não b". Mas esses dois, apesar de equivalentes, não são idênticos, e nós veremos que é necessário distingui-los.

Ao asserir algo contendo uma variável real, como, por exemplo, em

$$\text{“}\vdash . x = x\text{”},$$

nós asserimos *qualquer* valor de uma função proposicional. Quando nós asserimos algo contendo uma variável aparente, como em

$$\text{“}\vdash . (x). x = x\text{”},$$

ou $$\text{“}\vdash . (\exists x). x = x\text{”},$$

nós asserimos, no primeiro caso, *todos* os valores, e no segundo caso, *algum* valor (indeterminado) da função proposicional em questão. É claro que nós podemos asserir legitimamente "*qualquer* valor" apenas se *todos* os valores forem verdadeiros; pois, do contrário, uma vez que o valor das variáveis ainda precisa ser determinado, ele pode ser determinado de modo a resultar em uma proposição falsa. Então, na instância acima, uma vez que nós temos

$$\vdash . x = x,$$

Nós podemos inferir $$\vdash . (x). x = x.$$

E, geralmente, dada uma asserção contendo uma variável real x, nós podemos transformar a variável real em uma variável aparente ao se colocar o x entre parênteses no começo, seguido por tantos pontos quantos há depois do sinal de asserção.

Quando nós asserimos algo contendo uma variável real, nós não podemos estritamente dizer estarmos asserindo uma *proposição*, pois, nós apenas obtemos uma proposição definida ao atribuir um valor à variável, e então nossa asserção apenas se aplica a um caso definido, de maneira que ele não tenha a mesma força de antes. Quando o que nós asserimos contém uma variável real, nós asserimos uma proposição totalmente indeterminada de todas as proposições que resultam da atribuição de vários valores à variável. Será conveniente falar de tais asserções como *asserindo uma função proposicional.* As fórmulas ordinárias da matemática contêm tais asserções; por exemplo,

$$“sin^2 x + cos^2 x = 1”$$

não assere esse ou aquele caso particular da fórmula, nem assere que a fórmula vale para *todos* os valores de x, apesar de ela ser equivalente a esta última asserção; ela apenas assere que a fórmula vale, deixando x totalmente indeterminado; e ela pode fazer isso legitimamente, porque, apesar de x poder ser indeterminado, resulta uma proposição verdadeira.

Apesar de uma asserção contendo uma variável real não asserir, estritamente, uma proposição, será dito que ela assere uma proposição exceto quando a natureza da asserção ambígua envolvida estiver sob discussão.

Definição e variáveis reais. Quando o *definiens* contém uma ou mais variáveis reais, o *definiendum* também deve contê-las. Pois, neste caso, nós temos uma função de variáveis reais, e o *definiendum* deve ter o mesmo significado que o *definiens* para todos os valores destas variáveis, o que requer que o símbolo que é o *definiendum* contenha as letras que representam as variáveis reais. A regra nem sempre é observada por matemáticos, e sua violação às vezes causa importantes confusões de pensamento, notadamente na geometria e na filosofia do espaço.

Nas definições dadas acima de “$p.q$”, “$p \supset q$” e “$p \equiv q$”, p e q são variáveis reais, e, portanto, aparecem em ambos os lugares da definição. Na definição de “$\sim\{(x). \phi x\}$”, apenas a função considerada, a saber, $\phi \hat{z}$, é uma variável real; então, no que diz respeito à regra em questão, x não precisa aparecer na esquerda. Mas quando uma variável real é uma função, é necessário indicar como o argumento será fornecido, e, portanto, não há objeções à omissão de variáveis aparentes onde (como no caso diante de nós) elas são o argumento da função que é uma variável real. Isso aparece mais claramente se, em vez de uma função geral $\phi \hat{x}$, nós tomarmos alguma função particular, digamos “$\hat{x} = a$”, e considerarmos a definição de $\sim\{(x). x = a\}$. Nossa definição dá

$$\sim\{(x). x = a\}. =. (\exists x). \sim(x = a) \quad \text{Df.}$$

Mas se nós adotarmos uma notação em que o valor ambíguo “$x = a$”, contendo a variável aparente x, não ocorre no *definiendum*, nós devemos ter que construir uma notação empregando a própria função, a saber, “$\hat{x} = a$”.Isso não envolve uma variável aparente, mas seria grosseiro na prática. De fato, nós achamos conveniente e possível – exceto nas porções explanatórias – manter o uso explícito dos símbolos do tipo "$\phi\hat{x}$" como constantes [e.g., $\hat{x} = a$] ou como variáveis reais, quase completamente fora deste trabalho.

Proposições conectando variáveis aparentes e reais. As proposições mais importantes conectando variáveis reais e aparentes são as seguintes:

(1) "Quando uma função proposicional pode ser asserida, a proposição de que todos os valores da função são verdadeiros também pode". Mais brevemente, se menos exato, "o que vale para qualquer um, por mais escolhido que seja, vale para todos". Isso traduz a si próprio na regra de que quando uma variável ocorre numa asserção, nós podemos transformá-la numa variável aparente ao colocar a letra que a representa entre parênteses imediatamente após o sinal de asserção.

(2) "O que vale para todos, vale para qualquer um", i.e.,

$$\vdash : (x). \phi x. \supset \phi y.$$

Isso enuncia "se ϕx é sempre verdadeiro, então ϕy é verdadeiro".

(3) "Se ϕx é verdadeiro, então ϕy é às vezes verdadeiro", i.e.,

$$\vdash : \phi y. \supset. (\exists x). \phi x.$$

Uma proposição da forma "$(\exists x). \phi x$" asserida expressa um "teorema de existência", a saber, "existe um x para o qual ϕx é verdadeiro". A proposição acima dá o que na prática é a única forma de se provar teoremas de existência: nós sempre temos que encontrar algum y particular para o qual ϕy vale, e, a partir disso, inferir "$(\exists x). \phi x$". Se nós assumíssemos o que é chamado de axioma multiplicativo, ou o axioma equivalente enunciado por Zermelo, isso daria, em uma importante classe de casos, um teorema de existência em que nenhuma instância particular de sua verdade poderia ser encontrada.

Em virtude de "$\vdash : (x). \phi x. \supset. \phi y$" e "$\vdash : \phi y. \supset. (\exists x). \phi x$" nós temos "$\vdash : (x). \phi x. \supset. (\exists x). \phi x$", i.e., "o que é sempre verdadeiro é às vezes verdadeiro". Este não seria o caso se nada existisse; então, nossas assunções contêm a assunção de que algo existe. Isso está envolvido com o princípio de que o que vale para todos, vale para qualquer um; pois, isso não seria verdadeiro se não houvesse "qualquer um".

(4) "Se ϕx é sempre verdadeiro, e ψx é sempre verdadeiro, então '$\phi x. \psi x$' é sempre verdadeiro", i.e.,

$$\vdash :. (x). \phi x : (x). \psi x : \supset. (x). \phi x. \psi x.$$

(Isso requer que ϕ e ψ sejam funções que tomam argumentos do mesmo *tipo*. Nós explicaremos este requerimento em um estágio posterior). O inverso também vale; i.e., nós temos

$$\vdash :. (x). \phi x. \psi x. \supset : (x). \phi x : (x). \psi x.$$

É até certo ponto opcional qual das proposições conectando variáveis reais e variáveis aparentes é tomada como proposição primitiva. As proposições primitivas assumidas, neste assunto, no corpo do trabalho (∗9), são as seguintes:

(1) $$\vdash : \phi x . \supset . (\exists z) . \phi z.$$

(2) $$\vdash : \phi x \vee \phi y . \supset . (\exists z) . \phi z,$$

i.e., se ϕx fpr verdadeiro, ou ϕy for verdadeiro, então $(\exists z) . \phi z$ é verdadeiro. (Para a necessidade desta proposição primitiva, veja os comentários em ∗9·11 no corpo do trabalho).

Implicação formal e equivalência formal. Quando uma implicação, digamos, $\phi x . \supset . \psi x$, é dita valer sempre, i.e., quando $(x) : \phi x . \supset . \psi x$, nós dizemos que ϕx *implica formalmente* ψx; e proposições da forma "$(x) : \phi x . \supset . \psi x$" serão chamadas de *implicação formal*. Nas instâncias comuns da implicação, como "'Sócrates é um homem' implica 'Sócrates é mortal'", nós temos uma proposição da forma "$\phi x . \supset . \psi x$" em um caso em que "$(x) : \phi x . \supset . \psi x$" é verdadeiro. Em tal caso, nós sentimos a implicação como um caso particular de uma implicação formal. Então, aconteceu que implicações que não casos particulares de implicações formais não foram consideradas como implicações. Também há um fundamento prático para negligenciar tais implicações, pois, falando de maneira geral, elas só podem ser *conhecidas* quando já se sabe se sua hipótese é falsa ou se sua conclusão é verdadeira; e em nenhum destes casos elas servem para nos fazer conhecer a conclusão, uma vez que no primeiro caso a conclusão não precisa ser verdadeira, e no segundo, ela já é conhecida. Então, tais implicações não servem o propósito para o qual as implicações são principalmente úteis, a saber, aquele de fazer com que saibamos, por dedução, conclusões sobre as quais nós éramos previamente ignorantes. Implicações *formais*, por outro lado, servem a este propósito, devido ao fato psicológico de que nós frequentemente sabemos "$(x) : \phi x . \supset . \psi x$" e ϕy, em casos em que ψy (que se segue destas premissas) não pode ser facilmente conhecido diretamente.

Estas razões, apesar de não garantirem a completa negligência de implicações que não são instâncias de implicações formais, são razões que fazem implicações formais muito importantes. Uma implicação formal afirma que, para todos os possíveis valores de x, se a hipótese ϕx for verdadeira, a conclusão ψx é verdadeira. Uma vez que "$\phi x . \supset . \psi x$" sempre será verdadeiro quando ϕx for falso, são apenas os valores de x que fazem ϕx verdadeiro que são *importantes* em uma implicação formal; o que é efetivamente afirmado é que, para todos estes valores, ψx é verdadeiro. Então, proposições da forma "Todo α é β", "nenhum α é β", afirmam implicações formais, uma vez que o primeiro (da maneira que aparece aí) afirma

$$(x) : x \text{ é um } \alpha . \supset . x \text{ é um } \beta,$$

enquanto o segundo afirma

$$(x) : x \text{ é um } \alpha . \supset . x \text{ não é um } \beta.$$

E qualquer implicação formal “(x): $\phi x . \supset . \psi x$” pode ser interpretado como: “Todos os valores de x que satisfazem[18] ϕx satisfazem ψx”, enquanto a implicação formal “(x): $\phi x . \supset . \sim \psi x$” pode ser interpretada como: “Nenhum valor de x que satisfaz ϕx satisfaz ψx”.

De maneira similar, para “algum α é β” nós temos a fórmula

$$(\exists x) . x \text{ é um } \alpha . x \text{ é um } \beta,$$

e para “algum α não é β” a fórmula

$$(\exists x) . x \text{ é um } \alpha . x \text{ não é um } \beta.$$

Duas funções ϕx e ψx são chamadas *formalmente equivalentes* quando uma sempre implica a outra, i.e., quando

$$(x) : \phi x . \equiv . \psi x,$$

e uma proposição dessa forma é chamada de *equivalência formal*. Em virtude do que foi dito sobre valores-verdade, se ϕx e ψx forem formalmente equivalentes, qualquer uma delas pode substituir a outra em qualquer função-verdade. Consequentemente, para todos os propósitos da matemática ou do presente trabalho, $\phi \hat{z}$ pode substituir $\psi \hat{z}$ ou vice-versa em qualquer proposição com a qual nós lidarmos. Agora, dizer que ϕx e ψx são formalmente equivalentes é o mesmo que dizer que $\phi \hat{z}$ e $\psi \hat{z}$ têm a mesma *extensão*, i.e., que qualquer valor de x que satisfaz uma delas satisfaz a outra.

Assim, sempre que uma função constante ocorrer em nosso trabalho, o valor-verdade da proposição em que ela ocorre depende apenas da extensão da função. Uma proposição contendo uma função $\phi \hat{z}$ e tendo esta propriedade (i.e., seu valor verdade depende da extensão de $\phi \hat{z}$) será chamada de uma *função extensional* de $\phi \hat{z}$. Então, as funções de funções com as quais nós estaremos especialmente preocupados serão todas funções extensionais de funções.

O que acabou de ser dito explica a conexão (notada acima) entre o fato de que funções de proposições com as quais a matemática está especialmente preocupada são todas funções-verdade e o fato de que a matemática está preocupada com extensões em vez de intensões.

Abreviação conveniente. As seguintes definições nos dão alternativas e frequentemente nos dão notações mais convenientes:

$$\phi x . \supset_x . \psi x := : (x) : \phi x . \supset . \psi x, \text{ Df},$$

$$\phi x . \equiv_x . \psi x := : (x) : \phi x . \equiv . \psi x \text{ Df}.$$

A notação “$\phi x . \supset_x . \psi x$” é graças à Peano, que, no entanto, não tem notação para a ideia geral “$(x) . \phi x$”. Pode-se tomar como um exercício para o uso de pontos como parênteses que nós poderíamos ter escrito

$$\phi x \supset_x \psi x . = . (x) . \phi x \supset \psi x \text{ Df},$$

[18] Um valor de x é dito *satisfazer* ϕx ou x quando ϕx é verdadeiro para aquele valor de x.

$$\phi x \equiv_x \psi x . = . (x) . \phi x \equiv \psi x \text{ Df.}$$

Na prática, porém, quando $\phi\hat{x}$ e $\psi\hat{x}$ são funções especiais, não é possível empregar menos pontos do que na primeira forma, e frequentemente são requeridos mais.

As seguintes definições dão notações abreviadas para funções com duas ou mais variáveis:

$$(x, y) . \phi(x, y) . =: (x) : (y) . \phi(x, y) \text{ Df,}$$

e assim por diante para qualquer número de variáveis.

Identidade. A função proposicional "x é idêntico a y" é expressa por

$$x = y.$$

Isso será definido (cf. ∗13·01), mas, graças a certos pontos difíceis envolvidos na definição, nós omitiremos isso aqui (cf. Capítulo II). Nós temos, é claro,

$$\vdash . x = x \quad \text{(a lei da identidade),}$$
$$\vdash : x = y . \equiv . y = x,$$
$$\vdash : x = y . y = z . \supset . x = z.$$

O primeiro deles expressa a propriedade de *reflexividade* da identidade: uma relação é chamada *reflexiva* quando ela vale entre um termo e ele mesmo, universalmente ou sempre que ela vale para aquele termo e algum termo. A segunda proposição acima expressa que a identidade é uma relação *simétrica*: uma relação é chamada *simétrica* se, sempre que ela vale entre x e y, ela também vale entre y e x. A terceira proposição expressa que a identidade é uma relação *transitiva*: uma relação é chamada *transitiva* se, sempre que ela vale entre x e y e entre y e z, ela também vale entre x e z.

Nós veremos que nenhuma definição nova para o sinal de identidade é requerida na matemática: todas as equações matemáticas em que o sinal de identidade é usado da maneira ordinária expressa alguma identidade, e, então, usa o sinal de identidade no sentido acima.

Se x e y são idênticos, um pode substituir o outro em qualquer proposição sem alterar o valor-verdade da proposição; então, nós temos

$$\vdash : x = y . \supset . \phi x \equiv \phi y.$$

Esta é uma propriedade fundamental da identidade, da qual as propriedades remanescentes se seguem principalmente.

Pode-se pensar que a identidade não teria tanta importância, uma vez que ela só pode valer entre x e y se x e y forem símbolos diferentes para o mesmo objeto. Esta visão, porém, não se aplica ao que nós chamamos de "expressões descritivas" [*descriptive phrases*], i.e., "o tal-e-tal". É em relação a estas frases que a identidade é importante, como nós veremos em breve. Uma proposição como "Scott foi o autor de Waverley" expressa uma identidade em que há uma expressão descritiva (a saber, "o autor de Waverley"); isso ilustra como, em tais casos, a asserção da identidade pode ser importante. É essencialmente o mesmo caso quando o jornal diz "a identidade do criminoso não foi revelada". Em um tal caso, o criminoso é conhecido por uma frase descritiva, a saber, "o homem que fez o ato", e nós queremos encontrar um x do qual é verdade que "$x =$ o homem que fez o ato". Quando um tal x for encontrado, a identidade de x será revelada.

Classes e relações. Uma classe (que é o mesmo que um *múltiplo* [*manifold*] ou um *agregado*) é todos os objetos que satisfazem alguma função proposicional. Se α é a classe composta pelos objetos que satisfazem $\phi\hat{x}$, nós diremos que α é a classe *determinada* por $\phi\hat{x}$. Toda função proposicional, então, determina uma classe, apesar de que se a função proposicional for uma que é sempre falsa, a classe será *vazia*, i.e., não terá membros. A classe determinada pela função $\phi\hat{x}$ será representada por $\hat{z}(\phi z)$. Assim, por exemplo, se ϕx é uma equação, $\hat{z}(\phi z)$ será a classe de suas raízes; se ϕx é "x tem duas pernas e não tem penas", $\hat{z}(\phi z)$ será a classe dos homens; se ϕx é "0<x<1", $\hat{z}(\phi z)$ será a classe de funções próprias, e assim por diante.

É óbvio que a mesma classe de objetos terá várias funções determinantes. Quando não é necessário determinar uma função determinante de uma classe, a classe pode ser convenientemente representada por uma letra grega simples. Então, letras gregas, além daquelas para as quais algum significado constante é atribuído, serão usadas exclusivamente para classes.

Há dois tipos de dificuldades que surgem na lógica formal; um tipo surge em conexão com classes e relações, e o outro em conexão com funções descritivas. O ponto da dificuldade para classes e relações, no que diz respeito a classes, é que uma classe não pode ser um objeto adequado como um argumento de qualquer uma de suas funções determinantes. Se α representa uma classe e $\phi\hat{x}$ é uma de suas funções determinantes [de maneira que $\alpha = \hat{z}(\phi z)$], não é suficiente que $\phi\alpha$ seja uma proposição falsa, ela deve ser sem sentido. Assim, uma certa classificação do que parecem ser objetos em coisas de tipos essencialmente diferentes parece ser necessária. Toda esta questão é discutida no Capítulo II, na teoria dos tipos, e o tratamento formal na exposição sistemática, que forma o corpo principal deste trabalho, é guiado por esta discussão. A parte da exposição sistemática que está especialmente preocupada com a teoria das classes é $*20$, e nesta Introdução é discutida no Capítulo III. É suficiente notar aqui que, no tratamento completo de $*20$, nós evitamos a decisão sobre se classes de coisas têm, em algum sentido, existência como um objeto. Uma decisão para esta questão de qualquer maneira é indiferente para nossa lógica, apesar de talvez, se tivéssemos considerado alguma solução que considerasse as classes e as relações como, em algum sentido real, objetos, como verdadeiras e provavelmente recebidas universalmente, poderíamos ter simplificado uma ou duas definições e algumas proposições preliminares. Nossos símbolos, como

"$\hat{x}(\phi x)$" e α e outros, que representam classes e relações, são definidos meramente em seu uso, assim como ∇^2, significando

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

não tem significado além de uma função adequada de x, y e z na qual se pode operar. O resultado de nossas definições é que a maneira com que nós usamos classes corresponde, em geral, ao seu uso no pensamento e fala ordinária; e qualquer que seja a interpretação última de uma pessoa também é a interpretação última de outra. Então, de fato, nossa classificação de tipos no Capítulo II realmente executa o serviço único, apesar de essencial, de nos justificar em abster-nos de entrar em trens de raciocínio que levam a conclusões contraditórias. A justificação é que o que parecem ser proposições são, na verdade, coisas sem sentido [*nonsense*].

As definições que ocorrem na teoria das classes, pela qual a ideia de uma classe (pelo menos em uso) é baseada em outras ideias assumidas como primitivas, não podem ser entendidas sem uma discussão mais completa do que a que pode ser dada agora (cf. Capítulo II desta introdução e também ∗20). Consequentemente, neste exame preliminar, passamos a enunciar as proposições simples mais importantes que resultam destas definições, deixando o leitor empregar, em sua mente, a ideia ordinária não analisada de uma classe de coisas. Nossos símbolos, em seu uso, se conformam com o uso ordinário desta ideia na linguagem. Deve-se notar que na exposição sistemática, nosso tratamento de classes e relações não requer ideias primitivas novas, e apenas duas novas proposições primitivas, a saber, as duas formas do "Axioma da Redutibilidade" (cf. próximo Capítulo" para uma e duas variáveis, respectivamente, são necessárias.

A função proposicional "x é um membro da classe α" será expresso, seguindo Peano, pela notação

$$x \in \alpha.$$

Aqui, ϵ é escolhido por ser a inicial da palavra ἐστί. "$x\epsilon\alpha$" pode ser lido como "x é um α". Então, "$x \in$ homem" significará "x é um homem", e assim por diante. Por conveniência tipográfica, nós consideraremos

$$x \sim\in \alpha. =. \sim(x \in \alpha) \text{ Df},$$

$$x, y \in \alpha. =. x \in \alpha. y \in \alpha \text{ Df}.$$

Para "classe" nós escreveremos "Cls"; então, "$\alpha \in$ Cls" significa "α é uma classe".

Nós temos

$$\vdash: x \in \hat{x}(\phi z). \equiv. \phi x,$$

i.e., "'x é um membro da classe determinada por $\phi\hat{z}$' é equivalente a 'x satisfaz $\phi\hat{z}$', ou a 'ϕx é verdadeiro'".

Uma classe é completamente determinada quando seus membros são conhecidos, ou seja, não pode haver duas classes diferentes tendo os mesmos membros. Então, se ϕx e ψx são funções formalmente equivalentes, elas terminam a mesma classe; pois, neste caso, se x é um membro da classe determinada por $\phi \hat{x}$, e, portanto, satisfaz ϕx, x também satisfaz ψx, e é, portanto, um membro da classe determinada por $\psi \hat{x}$. Assim, nós temos

$$\vdash :. \hat{z}(\phi x) = \hat{z}(\psi z) . \equiv : \phi x . \equiv_x . \psi x.$$

As seguintes proposições são óbvias e importantes:

$$\vdash :. \alpha = \hat{z}(\phi z) . \equiv : x \in \alpha . \equiv_x . \phi x,$$

i.e., α é idêntico à classe determinada por $\phi \hat{z}$ quando, e apenas quando, "x é um α" é formalmente equivalente a ϕx;

$$\vdash :. \alpha = \beta . \equiv : x \in \alpha . \equiv_x . x \in \beta,$$

i.e., duas classes α e β são idênticas quando, e apenas quando, elas têm os mesmos membros;

$$\vdash . \hat{x}(x \in \alpha) = \alpha,$$

i.e., a classe cuja função determinante é "x é um α" é α; em outras palavras, α é a classe dos objetos que são membros de α;

$$\vdash . \hat{z}(\phi z) \in \mathrm{Cls},$$

i.e., a classe determinada pela função $\phi \hat{z}$ é uma classe.

Será visto que, de acordo com o que foi dito acima, qualquer função de uma variável pode ser substituída por uma função equivalente da forma "$x \in \alpha$". Consequentemente, qualquer função extensional de funções que vale quando seu argumento é uma função da forma "$\hat{z} \in \alpha$", para qualquer possível valor de α, também valerá quando seu argumento for qualquer função $\phi \hat{z}$. Então, variação de classes pode substituir variação de funções de uma variável em todas as proposições do tipo com o qual estaremos preocupados.

De uma maneira exatamente análoga, nós introduzimos relações duais ou diádicas, i.e., relações entre dois termos. Tais relações serão chamadas simplesmente de "relações"; relações entre mais de dois termos serão distinguidas como sendo relações *múltiplas*, ou (quando o número de seus termos for especificado), como relações triplas, quadruplas, ..., ou como relações triádica, tetrádicas, etc. Tais relações não nos preocuparão até chegarmos à Geometria. Para o presente, as únicas relações com as quais nos preocuparemos são as *duais*.

Relações, como classes, devem ser tomadas em *extensão*, i.e., se R e S são relações que valem entre os mesmos pares de termos, R e S são idênticas. Nós podemos considerar uma relação, no sentido requerido para nossos propósitos, como uma classe de pares; i.e., o par (x, y) é uma das classes de pares constituintes da relação R se x tem a relação R com y. Esta visão de relações como classes de pares não será, porém, introduzida em nosso tratamento simbólico, e é mencionada apenas para mostrar que é possível entender o significado da palavra *relação* como significando que uma relação deve ser determinada pela sua extensão.

Qualquer função $\phi(x, y)$ determina uma relação R entre x e y. Se considerarmos uma relação como sendo uma classe de pares, a relação determinada por $\phi(x, y)$ é a classe dos pares (x, y) para os quais $\phi(x, y)$ é verdadeiro. A relação determinada pela função $\phi(x, y)$ será denotada por

$$\hat{x}\hat{y}\phi(x, y).$$

Nós usaremos uma letra maiúscula para uma relação quando não for necessário especificar a função determinante. Então, sempre que uma letra maiúscula ocorrer, será entendido que ela significa uma relação.

A função proposicional "x tem a relação R com y" será expressa pela notação

$$xRy.$$

Esta notação é projetada para manter o mais próximo possível da linguagem comum, que, quando precisa expressar uma relação, geralmente a menciona em termos, como em "x ama y", "x é igual a y", "x é maior que y", e assim por diante. Para "relação" nós escrevemos "Rel"; assim, "R ϵ Rel" significa "R é uma relação".

Graças a tomarmos relações em extensão, nós temos

$$\vdash :. \hat{x}\hat{y}\phi(x. y) = \hat{x}\hat{y}\psi(x, y). \equiv : \phi(x, y). \equiv_{x,y}. \psi(x, y),$$

i.e., duas funções de duas variáveis determinam a mesma relação quando, e apenas quando, as duas funções são formalmente equivalentes.

Nós temos $$\vdash . \hat{z}\left\{\hat{x}\hat{y}\phi(x, y)\right\}w. \equiv . \phi(z, w),$$

i.e., "z tem com w a relação determinada pela função $\phi(x, y)$" é equivalente a $\phi(z, w)$;

$$\vdash :. R = \hat{x}\hat{y}\phi(x, y). \equiv : xRy. \equiv_{x,y}. \phi(x, y),$$

$$\vdash :. R = S. \equiv : xRy. \equiv_{x,y}. \phi(x, y),$$

$$\vdash . \hat{x}\hat{y}(xRy) = R,$$

$$\vdash . \left\{\hat{x}\hat{y}\phi(x, y)\right\} \in \text{Rel}.$$

Estas proposições são análogas àquelas dadas previamente para classes. Delas se resulta que qualquer função de duas variáveis é formalmente equivalente a alguma função da forma xRy; consequentemente, em funções extensionais de duas variáveis, variação de relações pode substituir variação de funções de duas variáveis.

Tanto classes quanto relações têm propriedades análogas à maioria daquelas proposições que resultam da negação e da soma lógica. O *produto lógico* de duas classes α e β é sua parte comum, i.e., é a classe dos termos que são membros de ambos. Isso é representado por $\alpha \cap \beta$. Então, nós temos

$$\alpha \cap \beta = \hat{x}(x \in \alpha . x \in \beta) \text{ Df.}$$

Isso nos dá $\vdash : x \in \alpha \cap \beta . \equiv . x \in \alpha .\ x \in \beta$,

i.e., "x é um membro do produto lógico de α e β" é equivalente ao produto lógico de "x é um membro de α" e "x é um membro de β".

De maneira similar, o *produto lógico* de duas classes α e β é a classe de termos que são membros de alguma delas; nós denotamos isso por α∪β. A definição é

$$\alpha \cup \beta = \hat{x}(x \in \alpha . \vee . x \in \beta) \text{ Df,}$$

e a conexão com a soma lógica de proposições é dada por

$$\vdash :.\ x \in \alpha \cup \beta . \equiv . x \in \alpha . \vee .\ x \in \beta.$$

A *negação* de uma classe α consiste naqueles termos x para os quais "$x \in \alpha$" pode ser *significantemente* e *verdadeiramente* negado. Veremos que há termos de outros tipos para os quais "$x \in \alpha$" não é nem verdadeiro nem falso, mas sim sem sentido. Estes termos não são membros da negação de α.

A *negação* de uma classe α é a classe dos termos de tipo adequado que não são membros dela, i.e., a classe $\hat{x}(x \sim\in \alpha)$. Nós podemos chamar esta classe de "$-\ \alpha$" (leia-se "não- α"; então, a definição é

$$-\ \alpha = \hat{x}(x \sim\in \alpha) \text{ Df,}$$

e a conexão com a negação de proposições é dada por

$$\vdash : x \in -\ \alpha . \equiv . x \sim\in \alpha.$$

No lugar da implicação nós temos a relação de *inclusão*. Uma classe α é dita estar incluída ou contida na classe β se todos os membros de α são membros de β, i.e., se $x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta$. Nós escrevemos "$\alpha \subset \beta$" para "$\alpha$ está contido em β". Então, nós temos

$$\alpha \subset \beta . = : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta \text{ Df.}$$

A maioria das fórmulas em relação a $p.q$, $p \vee q$, $\sim p$, $p \supset q$, continuam verdadeiras se nós substituirmos por $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$, $-\ \alpha$, $\alpha \subset \beta$. No lugar da equivalência, nós substituímos pela identidade; pois, "$p \equiv q$" foi definido como "$p \supset q . q \supset p$", mas "$\alpha \subset \beta . \beta \subset \alpha$" nos dá "$x \in \alpha . \equiv_x . x \in \beta$", do que se segue $\alpha = \beta$.

A seguir estão algumas proposições sobre classes que são análogas a proposições previamente vistas sobre proposições:

$$\vdash . \alpha \cap \beta = -(-\alpha \cup -\beta),$$

i.e., a parte comum de α e β é a negação de "não-α ou não-β";

$$\vdash . x \in (\alpha \cup -\alpha),$$

i.e., "x é um membro de α ou de não-α";

$$\vdash . x \sim\in (\alpha \cap -\alpha),$$

i.e., "x não é um membro de ambos α e não-α";

$$\begin{aligned}
&\vdash . \alpha = -(-\alpha),\\
&\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . -\beta \subset -\alpha,\\
&\vdash : \alpha = \beta . \equiv . -\alpha = -\beta,\\
&\vdash : \alpha = \alpha \cap \alpha,\\
&\vdash : \alpha = \alpha \cup \alpha.
\end{aligned}$$

Os dois últimos são as duas formas da lei da tautologia.

A lei da absorção vale na forma

$$\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha = \alpha \cap \beta.$$

Então, por exemplo, "todos os cretenses são mentirosos" é equivalente a "cretenses são idênticos a cretenses mentirosos".

Assim como nós temos $\vdash : p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r$,

nós temos $\vdash : \alpha \subset \beta . \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \subset \gamma$.

Isso expressa o silogismo ordinário Barbara (com as premissas intercambiadas); pois "$\alpha \subset \beta$" significa o mesmo que "todos os α's são β's", de maneira que a proposição acima afirma: "Se todos os α's são β's, e todos os β's são γ's, então todos os α's são γ's". (Deve-se observar que silogismos são tradicionalmente expressos com "portanto", como se eles asserissem tanto as premissas quanto a conclusão. É claro, esta é meramente uma maneira desleixada de falar, uma vez que o que realmente é asserido é apenas a conexão de premissas com a conclusão.)

O silogismo Barbara quando a premissa menor é um sujeito individual é

$$\vdash : x \in \beta . \beta \subset \gamma . \supset . x \in \gamma,$$

e.g., "se Sócrates é um homem, e todos os homens são mortais, então Sócrates é mortal". Este não é, como foi apontado por Peano, um caso particular de "$\alpha \subset \beta, \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \subset \gamma$", uma vez que "$x \in \beta$" não é um caso particular de "$\alpha \subset \beta$". Este ponto é importante, uma vez que a lógica tradicional está aqui errada. A natureza e magnitude de seu erro ficarão mais claras em um estágio posterior.

Para relações, nós temos definições e proposições precisamente análogas. Nós temos

$$R\dot{\cap}S = \hat{x}\hat{y}(xRy.\,xSy) \text{ Df},$$

que nos leva a $\vdash: x(R\dot{\cap}S)y. \equiv. xRy.\,xSy.$

Similarmente, $R\dot{\cup}S = \hat{x}\hat{y}(xRy. \vee. xSy)$ Df,

$$\dot{-}R = \hat{x}\hat{y}\{\sim(xRy)\} \text{ Df},$$

$R\dot{\subset}S. =: xRy. \supset_{x,y}. xSy$

Geralmente, quando nós requeremos símbolos análogos, mas diferentes para relações e para classes, nós escolheremos para relações o símbolo obtido ao se adicionar um ponto, em alguma posição conveniente, ao símbolo correspondente para classes. (O ponto não deve ser colocado na linha, pois isso causaria confusão com o uso dos pontos como parênteses). Mas tais símbolos requerem e recebem uma definição especial em cada caso.

Uma classe é dita *existente* quando ela tem pelo menos um membro: "α existe" é denotado por "∃! α". Então, nós temos

$$\exists!\,\alpha. =. (\exists x).\,x \in \alpha \text{ Df.}$$

A classe que não tem membros é chamada de "classe vazia", e é denotada por "Λ". Qualquer função proposicional que é sempre falsa determina a classe vazia. Uma tal função já nos é conhecida, a saber, "x não é idêntico a x", que nós denotamos por "$x \neq x$". Então, nós podemos usar esta função para definir Λ, e temos

$$\Lambda = \hat{x}(x \neq x) \text{ Df.}$$

A classe determinada por uma função que é sempre verdadeira é chamada de *classe universal*, e é representada por V; então,

$$\mathrm{V} = \hat{x}(x = x) \text{ Df.}$$

Então, Λ é a negação de V. Nós temos

$$\vdash. (x).\,x \in \mathrm{V},$$

i.e., "'x é um membro de V' é sempre verdadeiro"; e

$$\vdash. (x).\,x \sim\in \Lambda,$$

i.e., "'x é um membro de Λ' é sempre falso". Também,

$$\vdash: \alpha = \Lambda. \equiv. \sim\exists!\,\alpha,$$

i.e., "α é a classe nula" é equivalente a "α não existe".

Para relações, nós usamos notações similares. Nós temos

$$\dot{\exists}!\,R. =. (\exists x, y).\,xRy,$$

i.e., "$\dot{\exists}!\,R$" significa que há pelo menos um par x, y entre os quais a relação R vale. $\dot{\Lambda}$ será a relação que nunca vale, $\dot{V}$ a relação que sempre vale. $\dot{V}$ praticamente nunca é requerido; $\dot{\Lambda}$ será a relação $\hat{x}\hat{y}(x \neq x.\,y \neq y)$. Nós temos

$$\vdash. (x, y). \sim(x\dot{\Lambda}y),$$

e $\vdash: R = \dot{\Lambda}. \equiv. \sim\dot{\exists}!\,R.$

Não há classes que contêm objetos de mais de um tipo. Consequentemente, há uma classe universal e uma classe nula própria para cada tipo de objeto. Mas estes símbolos não precisam ser distinguidos, uma vez que veremos que não há probabilidade de confusão. Comentários similares se aplicam a relações.

Descrições. Por "descrição" nós queremos dizer uma expressão da forma "*o* tal e tal", ou alguma forma equivalente. Para o momento, confinaremos nossa atenção ao *o* no singular. Nós usaremos esta palavra estritamente, para implicar unicidade; e.g., nós não diremos "A é *o* filho de B" se B tiver outros filhos além de A. Então, uma descrição da forma "o tal e tal" terá uma aplicação apenas no evento de haver um tal e tal e nenhum mais. Consequentemente, uma descrição requer alguma função proposicional $\phi\hat{x}$ que é satisfeita por um valor x e por nenhum outro valor; então, "o x que satisfaz $\phi\hat{x}$" é uma descrição que descreve definitivamente um certo objeto, apesar de nós podemos não saber qual objeto ela descreve. Por exemplo, se y é um homem, "x é o pai de y" deve ser verdadeiro para um, e apenas um, valor de x. Então, "o pai de y" é uma descrição de um certo homem, apesar de nós podermos não saber *qual* homem ela descreve. Uma expressão contendo "o" sempre pressupõe alguma função proposicional que não contenha "o"; assim, em vez de "x é o pai de y ", nós devemos tomar como nossa função inicial "x gerou [*begot*][19] y"; então, "o pai de y" significa o único valor de x que satisfaz esta função proposicional.

Se $\phi\hat{x}$ é uma função proposicional, o símbolo "$(\iota x)(\phi x)$" é usado em nosso simbolismo de tal maneira que ele pode ser sempre lido como "o x que satisfaz $\phi\hat{x}$". Mas nós não definimos "$(\iota x)(\phi x)$" como significando "o x que satisfaz $\phi\hat{x}$", tratando, então, esta última frase como incorporando uma ideia primitiva. Todo uso de "$(\iota x)(\phi x)$", onde ele aparentemente ocorre como um constituinte de uma proposição no lugar de um objeto, é definido em termos da ideia primitiva que já temos em mãos. Um exemplo desta definição em uso é dado pela proposição " $E!\,(\iota x)(\phi x)$", que será considerada imediatamente. O assunto completo será tratado de maneira mais completa no Capítulo III.

O símbolo deve ser comparado e contrastado com "$\hat{x}(\phi x)$", que em uso sempre pode ser lido como "os x's que satisfazem $\phi\hat{x}$". Ambos os símbolos são símbolos completos definidos apenas em uso e também serão discutidos no Capítulo III. O símbolo "$\hat{x}(\phi x)$" sempre tem uma aplicação, a saber, à classe determinada por ϕx; mas "$(\iota x)(\phi x)$" apenas tem aplicação quando $\phi\hat{x}$ é satisfeito apenas por um valor de x, nem mais nem menos. Também deve-se observar que o significado dado ao símbolo pela definição, dada imediatamente abaixo, de "$E!\,(\iota x)(\phi x)$" não

[19] N.T.: No original em inglês, o autor utilizou a palavra "*begot*", que não tem uma tradução literal adequada para o português, mas que significa o ato de gerar, porém, de maneira paterna. É importante entender isso, pois, do contrário, a função "x gerou y" não determinaria um indivíduo inequivocamente, já que dois indivíduos a satisfariam, a saber, o pai e a mãe de y.

pressupõe que nós sabemos o significado de "um". Essa também é característico da definição de qualquer outro uso de $(\iota x)(\phi x)$.

Nós agora procedemos para definir "$E!\,(\iota x)(\phi x)$" de maneira que ele possa ser lido como "o x que satisfaz ϕx existe". (Será observado que este é um significado diferente de existência daquele que nós expressamos por "∃"). Sua definição é

$$E!\,(\iota x)(\phi x). =: (\exists c): \phi x. \equiv_x . x = c \quad \text{Df,}$$

i.e., "o x que satisfaz ϕx existe" significa "há um objeto c tal que ϕx é verdadeiro quando x é c, mas não de outra maneira".

A seguir estão algumas formas equivalentes:

$$\vdash E!\,(\iota x)(\phi x). \equiv: (\exists c): \phi c: \phi x. \supset_x . x = c,$$
$$\vdash E!\,(\iota x)(\phi x). \equiv: (\exists c). \phi c: \phi x. \phi y. \supset_{x,y} . x = y,$$
$$\vdash E!\,(\iota x)(\phi x). \equiv: (\exists c): \phi c: x \neq c. \supset_x . \sim\phi x.$$

Os últimos três afirmam que "o x que satisfaz $\phi\hat{x}$ existe" é equivalente a "há um objeto c que satisfaz $\phi\hat{x}$, e todo objeto diferente de c não satisfaz $\phi\hat{x}$".

O tipo de existência definido agora cobre um grande úmero de casos. Então, por exemplo, "o Ser mais perfeito existe" significará:

$$(\exists c): x \text{ é o mais perfeito}. \equiv_x . x = c,$$

que, tomando a última das equivalências acima, é equivalente a

$$(\exists c): c \text{ é o mais perfeito}: x \neq c. \supset_x . x \text{ não é o mais perfeito.}$$

Uma proposição tal como "Apolo existe" é realmente do mesmo tipo lógico, apesar de ela não conter a palavra *o*. Pois "Apolo" significa "o objeto tendo tais e tais propriedades", por exemplo, "o objeto tendo as propriedades enumeradas no Dicionário Clássico"[20]. Se estas propriedades compõem a função proposicional ϕx, então "Apolo" significa "$(\iota x)(\phi x)$", e "Apolo existe" significa "$E!\,(\iota x)(\phi x)$". Para tomar outra ilustração, "o autor de Waverley" significa "o homem (ou o objeto) que escreveu Waverley". Então, "Scott é o autor de Waverley" é

$$\text{Scott} = (\iota x)(x \text{ escreveu Waverley}).$$

Aqui (como nós observamos antes), a importância da *identidade* em conexão com descrições ocorre claramente.

A notação "$(\iota x)(\phi x)$", que é longa e inconveniente, raramente é usada, sendo principalmente requerido utilizar outra notação, a saber, "$R‘y$", significando "o objeto tendo a relação R com y". Isto é, nós temos

$$R‘y = (\iota x)(xRy) \quad \text{Df.}$$

[20] O mesmo princípio se aplica a muitos usos de nomes próprios de objetos existentes, e.g., para todos os usos de nomes próprios para objetos conhecidos pelo falante apenas por relato, e não por familiaridade pessoal [*personal acquaintance*].

A vírgula invertida pode ser lida como "de". Assim, "$R'y$" é lido como "o R de y". Então, se R é a relação de pai para filho, "$R'y$" significa "o pai de y"; se R é a relação de filho para pai, "$R'y$" significa "o filho de y", que apenas "existirá" se y tiver um filho e nenhum mais. $R'y$ é uma função de y, mas não uma função proposicional; nós a chamaremos de função descritiva. Todas as funções ordinárias da matemática são desse tipo, como aparecerá de maneira mais completa na sequência. Assim, em nossa notação, "$sin\, y$" seria escrito "$sin\, 'y$", e "sin" significaria a relação que $sin'y$ tem com y. Em vez de uma função descritiva variável fy, nós usamos $R'y$, onde a relação variável R toma o lugar da função variável f. Uma função descritiva geralmente existirá enquanto y pertencer a um certo domínio, mas não fora desse domínio; então, se nós estivermos lidando com racionais positivos, $\sqrt{y}$ será significante se y for um quadrado perfeito, mas não caso contrário; se estivermos ligando com números reais, e concordarmos que "$\sqrt{y}$" significa a raiz quadrada *positiva* (ou, que significa a raiz quadrada negativa), $\sqrt{y}$ será significante dado que y é positivo, mas não o contrário; e assim por diante. Assim, toda função descritiva tem o que nós podemos chamar de "domínio de definição" ou um "domínio de existência", que pode ser então definido: Se a função em questão é $R'y$, seu domínio de função ou de existência será a classe daqueles argumentos y para os quais nós temos $E!\, R'y$, i.e., para os quais $E!\, (\iota x)(xRy)$, i.e., para os quais há um x, e nenhum outro, tendo a relação R com y.

Se R é uma relação, nós falaremos de $R'y$ como a "função descritiva associada". Várias relações constantes que teremos oportunidade de introduzir são apenas ou principalmente importante em relação a suas funções descritivas associadas. Em tais casos, é mais fácil (apesar de menos correto) começar atribuindo o significado das funções descritivas, e deduzindo o significado da relação do significado da função descritiva. Isso será feito nas seguintes explicações da notação.

Várias funções descritivas de relações. Se R é qualquer relação, a *inversa* de R é a relação que vale entre y e x sempre que R vale entre x e y. Então, *maior que* é o inverso de *menor que*, *antes* de *depois*, *causa* de *efeito*, *marido* de *esposa*, etc. O inverso de R é escrito[21] $Cnv‘R$ ou $\breve{R}$.[22] A definição é

$$\breve{R} = \hat{x}\hat{y}(yRx) \text{ Df},$$

$$Cnv'R = \breve{R} \text{ Df}.$$

O segundo não é uma definição formalmente correta, uma vez que nós devemos definir "Cnv" e deduzir o significado de "$Cnv‘R$". Mas, não vale a pena adotar este plano em nossa explicação introdutória, que visa a simplicidade em vez da correção formal.

Uma relação é dita *simétrica* se R=$\breve{R}$, i.e., se ela vale entre y e x sempre que ela vale entre x e y (e, portanto, vice-versa). Identidade, diversidade, concordância ou

[21] A segunda destas notações foi tomada de *Algebra und Logik der Relative*, de Schröder.
[22] N.T.: "Cnv" é a abreviação de "*converse*", do inglês.

discordância em qualquer aspecto, são relações simétricas. Uma relação é chamada *assimétrica* quando ela é incompatível com sua contrária, i.e., quando $R \dot{\cap} \breve{R} = \dot{\Lambda}$, ou, o que é equivalente,

$$xRy. \supset_{x,y}. \sim(yRx).$$

Antes e depois, maior e menor, ancestral e descendente, são assimétricos, pois são todas relações do tipo que levam a *séries*. Mas há várias relações assimétricas que não levam a séries, por exemplo, a de ser o irmão da esposa.[23] Uma relação pode não ser nem simétrica nem assimétrica; por exemplo, isso vale para a relação de inclusão entre classes: $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \alpha$ serão ambos verdadeiros se $\alpha = \beta$, mas, do contrário, apenas um deles, no máximo, será verdadeiro. A relação *irmão* não é nem simétrica nem assimétrica, pois se x é irmão de y, y pode ser irmão ou irmã de x.

Na função proposicional xRy, nós chamamos x o referente e y o *relatum*. A classe $\hat{x}(xRy)$, consistindo de todos os x que têm a relação R com y, é chamado de classe de referentes de y com respeito a R; a classe $\hat{y}(xRy)$, consistindo de todos os y com os quais x tem a relação R, é chamado de classe dos *relata* de x com respeito a R. Estas duas classes são denotadas respectivamente por $\overrightarrow{R}`y$ e $\overleftarrow{R}`x$. Então,

$$\overrightarrow{R}`y = \hat{x}(xRy) \text{ Df},$$
$$\overleftarrow{R}`x = \hat{y}(xRy) \text{ Df}.$$

A seta corre em direção a y no primeiro caso, para mostrar que nós estamos preocupados com coisas tendo a relação R com y; ela corre para longe de x no segundo caso, para mostrar que a relação R vai de x para os membros de $\overleftarrow{R}`x$. Ela corre, de fato, *de* um referente *para* um *relatum*.

As notações $\overrightarrow{R}`y$ e $\overleftarrow{R}`x$ são muito importantes, e são usadas constantemente. Se R é a relação de pai para filho, $\overrightarrow{R}`y =$ os parentes de $y$, $\overleftarrow{R}`x =$ os filhos de x. Nós temos

$$\vdash : x \in \overrightarrow{R}`y . \equiv . xRy$$

e

$$\vdash : y \in \overleftarrow{R}`x . \equiv . xRy.$$

Estas equivalências são frequentemente incorporadas na linguagem comum. Por exemplo, nós dizemos indiscriminadamente "x é um habitante de Londres", ou "x habita Londres". Se nós usarmos "R" para "habita", "x habita Londres" é "x R Londres", enquanto "x é um habitante de Londres" é "$x\overrightarrow{R}`$Londres".

Em vez de $\overrightarrow{R}$ e $\overleftarrow{R}$, nós às vezes usamos $sg`R$ e $gs`R$, onde "sg" significa "sagitta" e "gs" é "sg" ao contrário[24]. Então, nós temos

$$sg`R = \overrightarrow{R} \text{ Df},$$

[23] Esta relação não é estritamente assimétrica, mas ela é assimétrica exceto quando o irmão da esposa também é o marido da irmã. Na igreja grega, esta relação é estritamente assimétrica.
[24] N.T.: A palavra "*sagitta*" é latina, e significa "flecha".

$$gs`R = \overrightarrow{R} \text{ Df.}$$

Estas notações são às vezes mais convenientes que uma flecha quando a relação em questão é representada por uma combinação de letras, em vez de uma única letra como R. Então, e.g., nós escreveríamos $sg`(R\dot{\cap}S)$, em vez de colocar uma seta em cima de todo o comprimento de $(R\dot{\cap}S)$.

A classe de todos os termos que têm a relação R a algum outro é chamada de *domínio* de R. Então, se R é a relação de pai e filho, o domínio de R será a classe dos pais. Nós representamos o domínio de R por "$D`R$". Então, nós temos

$$D`R = \hat{x}\{(\exists y).\, xRy\} \text{ Df.}$$

De maneira similar, a classe de todos os termos com os quais algo tem a relação R é chamado de *domínio inverso* de R; é o mesmo que o domínio do inverso de R. O domínio inverso de R é representado por "$\text{Ꮷ}`R$"; Assim,

$$\text{Ꮷ}`R = \hat{y}\{(\exists x).\, xRy\} \text{ Df.}$$

A soma do domínio com o domínio inverso é chamada de *campo* [*field*], e é representada por $C`R$; então,

$$C`R = D`R \cup \text{Ꮷ}`R \text{ Df.}$$

O *campo* é importante principalmente em conexão com séries. Se R é a relação de ordenação de uma série, $C`R$ será a classe de termos de séries, $D`R$ será a totalidade de termos exceto o último (se houver), e $\text{Ꮷ}`R$ será a totalidade dos termos exceto o primeiro (se houver). O primeiro termo, se existe, é o único membro de $D`R\cap - \text{Ꮷ}`R$, uma vez que ele é o único termo que é um antecessor, mas nunca um sucessor. Similarmente, o último termo (se houver) é o único membro de $\text{Ꮷ}`R\cap - D`R$. A condição de que uma série não tenha fim é $\text{Ꮷ}`R \subset D`R$, i.e., "todo sucessor é um antecessor"; a condição para não ter começo é $D`R \subset \text{Ꮷ}`R$. Estas condições são equivalentes respectivamente para $D`R = C`R$ e $\text{Ꮷ}`R = C`R$.

O *produto relativo* de duas relações R e S é a relação que vale entre x e z quando há um termo intermediário y tal que x tem a relação R com y e y tem a relação S com z. O produto relativo de R e S é representado por R|S; assim, nós temos

$$R|S = \hat{x}\hat{z}\{(\exists y).\, xRy.\, ySz\} \text{ Df,}$$

do que se segue $\vdash : x(S)z. \equiv. (\exists y).\, xRy.\, ySz.$

Então, "tia paterna" é o produto relativo de *irmã* e *pai*; "avó paterna" é o produto relativo entre *mãe* e *pai*; "avô materno" é o produto relativo entre *pai* e *mãe*. O produto relativo não é comutativo, mas ele obedece à lei associativa, i.e.,

$$\vdash . (P|Q)|R = P|(Q|R).$$

Ele também obedece à lei distributiva em relação à adição lógica de relações, i.e., nós temos

$$\vdash . P|(Q \dot{\cup} R) = (P|Q) \dot{\cup} (P|R),$$

$$\vdash . (Q \dot{\cap} R)|P = (Q|P) \dot{\cap} (R|P).$$

Mas a respeito do *produto* lógico, nós apenas temos

$$\vdash . P|\left(Q \dot{\cap} R\right) \Subset (P|Q) \dot{\cap} (P|R),$$
$$\vdash . (Q \dot{\cap} R)|P \Subset (Q|P) \dot{\cap} (Q|R).$$

O produto relativo não obedece à lei da tautologia, i.e., nós não temos em geral R R=R. Nós temos

$$R^2 = R|R \text{ Df.}$$

Assim, avô paterno = (pai)²,
avó materna = (mãe)².

Uma relação é chamada *transitiva* quando $R^2 \Subset R$, i.e., quando, se xRy e yRz, nós sempre temos xRz, i.e., quando

$$xRy . yRz . \supset_{x,y,z} . xRz.$$

Relações que geram séries são sempre transitivas; então, e.g.,

$$x > y . y > z . \supset_{x,y,z} . x > z.$$

Se P é uma relação que gera uma série, P pode convenientemente ser lida "precede"; assim, "$xPy . yPz . \supset_{x,y,z} . xPz$" se torna "se x precede y e y precede z, então x sempre precede z". A classe de relações que gera séries é parcialmente caracterizada pelo fato de que elas são transitivas e assimétricas, e nunca relacionam um termo a si mesmo.

Se P é uma relação que gera uma série, e se nós não temos meramente $P^2 \Subset P$, mas $P^2 = P$, então P gera uma série que é *compacta* (*überall dicht*), i.e., tal que há termos entre quaisquer outros dois. Pois, neste caso, nós temos

$$xPz . \supset . (\exists y) . xPy . yPz,$$[25]

i.e., se x precede y, há um y tal que x precede y e y precede z, i.e., há um termo entre x e z. Assim, entre as relações que geram séries, aquelas que geram séries compactas são aquelas para as quais $P^2 = P$.

Muitas relações que não geram séries são transitivas, por exemplo, a identidade, ou a relação de inclusão entre classes. Tais casos surgem quando as relações não são assimétricas. Relações que são transitivas e simétricas são de uma classe importante: elas podem ser consideradas como consistindo na posse de alguma propriedade em comum.

Funções descritivas plurais. A classe de termos x que têm a relação R com algum membro de uma classe α é denotado por $R``\alpha$ ou $R_\epsilon`\alpha$. A definição é

$$R``\alpha = \hat{x}\{(\exists y) . y \in \alpha . xRy\} \text{ Df.}$$

[25] N.T.: No vocabulário moderno, esta propriedade é chamada de "densidade", e uma tal relação é dita "densa".

Assim, por exemplo, seja R a relação de *habitar*, e α a classe das cidades; então, $R``\alpha =$ habitantes da cidade. Seja $R$ a relação "menor que" entre os racionais, e $\alpha$ a classe daqueles racionais que são da forma $1 - 2^{-n}$, para valores inteiros de $n$; então, $R``\alpha$ será a totalidade dos racionais menores que algum membro de α, i.e., todos os racionais menores que 1. Se P é a relação geradora de uma série, e α é qualquer classe de membros da série, $P``\alpha$ será a totalidade dos antecessores de $\alpha$, i.e., o segmento definido por $\alpha$. Se $P$ é uma relação tal que $P`y$ sempre existe quando $y \epsilon \alpha$, $P``\alpha$ será a classe de todos os termos da forma $P`y$ para valores de y que são membros de α; i.e.,

$$P``\alpha = \hat{x}\{(\exists y). y \epsilon \alpha; x = P`y\}.$$

Então, um membro da classe "pais de um grande homem" serão os pais de y, onde y é algum grande homem. Em outros casos, isso não valerá; por exemplo, seja P a relação de um número para qualquer número do qual ele é um fator; então, $P``$ (números pares) = fator de números pares, mas esta classe não é composta de termos da forma "o fator de x", onde x é um número par, porque números não tem apenas um fator cada um.

Classes unitárias. A classe cujo único membro é x pode ser pensada como sendo idêntica a x, mas Peano e Frege mostraram que este não é o caso. (As razões do porquê este não é o caso serão explicadas de maneira preliminar no Capítulo II da Introdução). Nós denotamos por $\iota`x$ a classe cujo único membro é x; então,

$$\iota`x = \hat{y}(y = x) \text{ Df},$$

i.e., "$\iota`x$" significa "a classe dos objetos que são idênticos a x".

A classe que consiste em x e y será $\iota`x \cup \iota`y$; a classe obtida ao se adicionar x à classe α será $\alpha \cup \iota`x$; a classe obtida ao se tirar $x$ de uma classe $\alpha$ será $\alpha - \iota`x$. (Nós escrevemos $\alpha - \beta$ como uma abreviação de $\alpha \cap - \beta$).

Será observado que as classes unitárias foram definidas sem referência ao número 1; na verdade, nós usamos classes unitárias para definir o número 1. Este número é definido como a classe das classes unitárias, i.e.

$$1 = \hat{\alpha}\{(\exists x). \alpha = \iota`x\} \text{ Df}.$$

Isso leva a

$$\vdash :. \alpha \epsilon 1. \equiv : (\exists x) : y \epsilon \alpha. \equiv_y . y = x.$$

A partir disso, aparece ainda que

$$\vdash : \alpha \epsilon 1. \equiv . E! (\iota x)(x \epsilon \alpha),$$

de onde se segue

$$\vdash : \hat{z}(\phi z) \epsilon 1. \equiv . E! (\iota x)(\phi x),$$

i.e., "$\hat{z}(\phi z)$ é a classe unitária" é equivalente a "o x que satisfaz $\phi\hat{x}$ existe".

Se $\alpha \epsilon 1$, $\breve{\iota}`\alpha$ é o único membro de $\alpha$, pois o único membro de $\alpha$ é o único termo com o qual $\alpha$ tem a relação $\iota$. Assim, "$\breve{\iota}`\alpha$" toma o lugar de "$(\iota x)(\phi x)$", se α

significar $\hat{z}(\phi z)$. Na prática, "℩'α" é uma notação mais conveniente que "$(\iota x)(\phi x)$", e é geralmente usada em vez de "$(\iota x)(\phi x)$".

A consideração acima explicou a maior parte da notação lógica empregada no presente trabalho. Nas aplicações a várias partes da matemática, outras definições são introduzidas; mas os objetos definidos por estas outras definições pertencem, na maior parte, mais à matemática do que à lógica. O leitor que dominar os símbolos explicados acima verão que qualquer fórmula posterior pode ser decifrada pela ajuda de comparativamente poucas definições adicionais.

CAPÍTULO II
A TEORIA DOS TIPOS LÓGICOS

A teoria dos tipos lógicos, que será explicada no presente Capítulo, se recomendou a nós em primeira instância por sua capacidade de resolver certas contradições, das quais a mais conhecida pelos matemáticos é a de Burali-Forti, acerca do maior ordinal. Mas a teoria em questão não é completamente dependente desta recomendação indireta: ela também tem uma certa consonância com o senso comum, o que a torna inerentemente acreditável. No que se segue, portanto, devemos primeiro expor a teoria por sua conta própria, e então aplica-la para solucionar as contradições.

I. O Princípio do Círculo-Vicioso.

Uma análise dos paradoxos a serem evitados mostra que eles resultam de um certo tipo de círculo vicioso[26]. O círculo vicioso em questão surge da suposição de que uma coleção de objetos pode conter membros que só podem ser definidos por meios da coleção como um todo. Então, por exemplo, a coleção de *proposições* deverá conter uma proposição afirmando que "todas as proposições são verdadeiras ou falsas". Entretanto, parece que tal enunciado não poderia ser legítimo a menos que "todas as proposições" se referisse a alguma coleção já definida, o que não pode ser feito se novas proposições são criadas pelo enunciado sobre "todas as proposições". Nós devemos, portanto, dizer que enunciados sobre "todas as proposições" são sem sentido. De maneira mais geral, dado qualquer conjunto de objetos tais que, se supusermos que o conjunto tenha um total, ele conterá membros que pressupõe este total, então tal conjunto não pode ter um total. Ao dizer que um conjunto "não tem um total", nós queremos dizer, primariamente, que nenhum enunciado significativo pode ser feito sobre "todos os seus membros". Proposições, como a ilustração acima mostra, devem ser um conjunto sem total. O mesmo é verdadeiro, como veremos brevemente, de funções proposicionais, mesmo quando restritas àquelas que podem ter como argumento um dado objeto α. Em tais casos, é necessário dividir nosso conjunto em conjuntos menores, cada um dos quais é capaz de ter um total. É isso que a teoria visa a efetivar.

O princípio que nos permite evitar totalidades ilegítimas pode ser enunciado como se segue: "Qualquer coisa que envolva o *todo* de uma coleção não pode ser um da coleção"; ou, inversamente: "Se, dado que certa coleção tem um total, ele tiver membros apenas definíveis em termos deste total, então a dita coleção não tem um total". Nós chamaremos isso de "princípio do círculo vicioso", porque ele nos permite evitar os círculos viciosos envolvidos na assunção de totalidades ilegítimas. Argumentos que são condenados pelo princípio do círculo vicioso serão chamados "falácias círculo-viciosas". Tais argumentos, em certas circunstâncias, podem levar a

[26] Seja a última seção do presenta Capítulo. Cf. também H. Poincaré, "Les Mathématiques at la logique", *Revue de Métaphysique et de Morale*, Maio 1906, p.307.

contradições, mas frequentemente ocorre que as conclusões às quais eles levam são de fato verdadeira, apesar de os argumentos serem falaciosos. Tome, por exemplo, a lei do terceiro excluído, na forma "todas as proposições são verdadeiras ou falsas". Se desta lei nós argumentarmos que, pelo fato de a lei do terceiro excluído ser uma proposição, ela deve ser verdadeira ou falsa, nós incorreremos numa falácia círculo-viciosa. "Todas as proposições" deve, em algum sentido, ser limitada antes que ele se torne uma totalidade legítima, e qualquer limitação que a torne legítima deve fazer com que qualquer enunciado sobre a totalidade esteja fora da totalidade. Similarmente, o cético imaginário, que assere que ele não sabe de nada, e é refutado ao ser perguntado se ele sabe que ele não sabe de nada, afirma algo sem sentido, e é falaciosamente refutado por um argumento que envolve uma falácia círculo-viciosa. Para que a asserção do cético se torne significante, é necessário colocar alguma limitação nas coisas sobre as quais ele assere sua ignorância, porque as coisas sobre as quais ele pode ser ignorante formam uma totalidade ilegítima. Mas, assim que uma limitação adequada for colocada por ele sobre a coleção de proposições sobre as quais ele afirma sua ignorância, a proposição de que ele é ignorante sobre todo membro desta coleção não deve ser ela própria um dos membros da coleção. Consequentemente, qualquer ceticismo significante não está aberto à forma de refutação exposta acima.

Os paradoxos da lógica simbólica tratam de vários tipos de objetos: proposições, classes, números cardinais e ordinais, etc. Todos esses tipos de objetos, como nós mostraremos, representam totalidades ilegítimas, e são, portanto, capazes de fazerem surgir falácias círculo-viciosas. Mas por meios da teoria (a ser explicada no Capítulo III) que reduz enunciados que são verbalmente relacionados com classes e relações a enunciados que dizem respeito a funções proposicionais, os paradoxos são reduzidos .... Os paradoxos que lidam com proposições são apenas indiretamente relevantes à matemática, enquanto aqueles que tratam mais estreitamente os matemáticos .... Portanto, nós iremos proceder de uma vez para a consideração de funções proposicionais.

II. *A Natureza das Funções Proposicionais.*

Por uma "função proposicional" nós queremos dizer algo que contenha uma variável x, e que expressa uma *proposição* assim que um valor é atribuído a x. Ou seja, isso difere de uma proposição apenas pelo fato de isso é ambíguo: ela contém uma variável cujo valor não é atribuído. Ela concorda com as funções ordinárias da matemática no fato de conter uma variável não atribuída; onde ela difere é no fato de que os valores da função são proposições. Assim, e.g., "x é um homem" ou "sin x = 1" são funções proposicionais. Nós vermos que é possível incorrer numa falácia do círculo vicioso desde o início, ao admitir termos que pressupõem a função proposicional como possíveis argumentos para ela. Esta forma da falácia é muito instrutiva, e sua evitação leva, como veremos, à hierarquia dos tipos.

A pergunta sobre a natureza de uma função[27] não é de maneira alguma fácil. Pareceria, no entanto, que a característica essencial de uma função é a *ambiguidade*. Tome, por exemplo, a lei da identidade na forma "A é A", que é a forma em que ela é normalmente enunciada. É claro que, considerado psicologicamente, nós temos aqui um único julgamento. Mas o que podemos dizer sobre o objeto do julgamento? Nós não estamos julgando que Sócrates é Sócrates, nem que Platão é Platão, nem qualquer outro dos julgamentos definidos que são instâncias da lei da identidade. Mas, cada um destes julgamentos está, em certo sentido, dentro do escopo do nosso julgamento. Nós estamos, na verdade, julgando uma instância ambígua da função proposicional "A é A". Parece que temos um único pensamento que não tem um objeto definido, mas que tem como seu objeto um objeto indeterminado da função proposicional "A é A". É este tipo de ambiguidade que constitui a essência de uma função. Quando nós falamos de "ϕx", onde x não é especificado, nós queremos falar sobre um valor da função, mas não um valor definido. Nós podemos expressar isso ao dizer que "ϕx" *denota ambiguamente* ϕa, ϕb, ϕc, etc., onde ϕa, ϕb, ϕc, etc., são vários valores de "ϕx ".

Quando nós dizemos que "ϕx" denota ambiguamente ϕa, ϕb, ϕc, etc., nós queremos dizer que "ϕx" significa um os objetos ϕa, ϕb, ϕc, etc., embora não seja definido, mas indeterminado. Segue-se que "ϕx" apenas tem um significado bem definido (bem definido, isto é, exceto na medida em que é essencial ser ambíguo) se os objetos ϕa, ϕb, ϕc, etc., são bem definidos. Ou seja, uma função não é uma função bem definida a menos que todos os seus valores sejam já bem definidos. Segue-se que nenhuma função pode ter entre seus valores qualquer coisa que pressuponha a função, pois, se assim fosse, nós não poderíamos tratar os objetos denotados ambiguamente pela função como definidos até que a função fosse definida, enquanto que, inversamente, como nós vimos, a função não pode ser definida a menos que seus valores sejam definidos. Este é um caso particular, mas talvez o mais fundamental, do princípio do círculo vicioso. Uma função é o que ambiguamente denota algo de uma totalidade, a saber, os valores da função; consequentemente, esta totalidade não pode conter qualquer membro que envolva a função, uma vez que, se ela contivesse, ela conteria membros envolvendo a totalidade, que, pelo princípio do círculo vicioso, nenhuma totalidade pode fazer.

Será visto que, de acordo com a explicação acima, os valores de fuma função são pressupostos por uma função, não o contrário. É suficientemente óbvio, em qualquer caso particular, que o valor de uma função não pressupõe a função. Assim, por exemplo, a proposição "Sócrates é humano" pode ser perfeitamente apreendida sem considera-la como um valor da função "x é humano". É verdade que, inversamente, uma função pode ser apreendida sem ser necessário apreender seus valores várias vezes e individualmente. Se este não fosse o caso, nenhuma função poderia ser apreendida, uma vez que o número de valores (verdadeiros e falsos) de

[27] Quando a palavra "função" for utilizada na sequência, entende-se sempre "função proposicional". Outras funções não estarão em questão no presente Capítulo.

uma função é necessariamente infinito e necessariamente há argumentos possíveis com os quais não estamos familiarizados. O que é necessário não é que os valores sejam dados individualmente e extensinalmente, mas sim que a totalidade dos valores seja dada intensionalmente, de maneira que, em relação a qualquer objeto atribuído, é pelo menos teoricamente determinado se o dito objeto é ou não o valor da função.

É praticamente necessário distinguir a função de um valor indeterminado da função. Podemos considerar a própria função como sendo aquela que denota ambiguamente, enquanto que o valor indeterminado da função é aquilo que é ambiguamente denotado. Se o valor indeterminado for escrito como "ϕx", nós escrevemos a função como "$\phi \hat{x}$". (Qualquer outra letra pode ser usada no lugar de x). Então, nós deveríamos dizer "ϕx é uma proposição", mas "$\phi \hat{x}$ é uma função proposicional". Quando dizemos "ϕx é uma proposição", queremos enunciar algo que é verdadeiro para todos possível valor de x, apesar de não decidirmos quais valores x deve ter. Fazemos um enunciado ambíguo sobre qualquer valor da função. Mas quando dizemos "$\phi \hat{x}$ é uma função proposicional", não estamos fazendo um enunciado ambíguo. Seria mais correto dizer que estamos fazendo um enunciado sobre uma ambiguidade, tomando a visão de que uma função é uma ambiguidade. A própria função, $\phi \hat{x}$, é a única coisa que denota ambiguamente seus vários valores; enquanto ϕx, onde x não é especificado, é um dos objetos denotados, com a ambiguidade pertencendo à maneira de denotação.

Nós vimos que, de acordo com o princípio do círculo vicioso, os valores de uma função não podem conter termos definíveis apenas em termos da função. Agora, dado uma função $\phi \hat{x}$, todos os valores para a função[28] são proposições da forma ϕx. Segue-se que não podem haver proposições, da forma ϕx, em que x tem um valor que envolve $\phi \hat{x}$. (Se este fosse o caso, os valores da função não seriam todos determinados até que a função fosse determinada, enquanto que descobrimos que a função não é determinada a menos que seus valores sejam previamente determinados). Consequentemente, não pode haver algo como o valor para $\phi \hat{x}$ com o argumento $\phi \hat{x}$, ou com qualquer argumento que envolve $\phi \hat{x}$. Isto é, o símbolo "$\phi(\phi \hat{x})$" não pode expressar uma proposição, como "ϕa" expressa se ϕa for um valor para $\phi \hat{x}$. Na verdade, "$\phi(\phi \hat{x})$" deve ser um símbolo que não expressa qualquer coisa: devemos, portanto, dizer que ele não é significante. Então, dado qualquer função $\phi \hat{x}$, há argumentos para os quais a função não tem um valor, bem como argumentos para os quais ela tem um valor. Nós chamaremos os argumentos para os

[28] Nós falaremos neste Capítulo sobre "valores para x" e "valores para ϕx", significando, em cada caso, a mesma coisa, a saber, ϕa, ϕb, ϕc, etc. A distinção da fraseologia serve para evitar ambiguidade onde muitas variáveis são consideradas, especialmente quando uma delas é uma função.

quais $\phi\hat{x}$ tem um valor como "valores possíveis de x". Diremos que $\phi\hat{x}$ é "significante com o argumento x" quando $\phi\hat{x}$ tem um valor com o argumento x.

Quando é dito que, *e.g.*, "$\phi(\phi\hat{z})$" é sem sentido, e, portanto, nem verdadeiro nem falso, é necessário evitar um mal entendimento. Se "$\phi(\phi\hat{x})$" fosse interpretado como significando "o valor de $\phi\hat{z}$ com argumento $\phi\hat{z}$ é verdadeiro", isso não seria sem sentido, mas sim falso. É falso pelo mesmo motivo que "o rei da França é careca" é falso, nomeadamente porque não há uma tal coisa como "o valor de $\phi\hat{z}$ com argumento $\phi\hat{z}$". Mas quando, com algum argumento a, nós asserimos ϕa, nós não queremos significar "o valor de $\phi\hat{x}$ com o argumento a é verdadeiro"; nós queremos asserir a proposição que *é* o valor para $\phi\hat{x}$ com argumento a. Então, por exemplo, se $\phi\hat{x}$ for "$\hat{x}$ é um homem", ϕ(Sócrates) será "Sócrates é um homem", *não* "o valor para a função '$\hat{x}$ é um homem', com o argumento Sócrates, é verdadeiro". Assim, de acordo com nosso princípio de que "$\phi(\phi\hat{z})$" é sem sentido, nós não podemos negar legitimamente "a função '$\hat{x}$ é um homem' é um homem", porque isso é se sentido, mas nós podemos negar legitimamente "o valor para a função '$\hat{x}$ é um homem', com o argumento '$\hat{x}$ é um homem', é verdadeiro", não com base em o valor em questão ser falso, mas sim com base no fato de que não há um valor para a função.

Nós denotaremos pelo símbolo "$(x).\,\phi x$" a proposição "ϕx sempre[29]", i.e., a proposição que assere *todos* os valores para $\phi\hat{x}$. Esta proposição envolve a função $\phi\hat{x}$, não meramente um valor ambíguo da função. A asserção de $\phi\hat{x}$, onde x não é especificado, é uma asserção diferente daquela que assere todos os valores para $\phi\hat{x}$, pois a primeira é uma asserção ambígua, enquanto a última não é em qualquer sentido ambígua. Será observado que "$(x).\,\phi x$" não assere "ϕx com todos os valores de x", porque, como nós vimos, devem haver valores de x para os quais "ϕx" é sem sentido. O que é asserido por "$(x).\,\phi x$" é todas as proposições que são valores para $\phi\hat{x}$; consequentemente, é apenas para tais valores de x que fazem "$\phi\hat{x}$" significante, $i.\,e.$, para todos os argumentos *possíveis*, que $\phi\hat{x}$ é asserido quando nós asserimos "$(x).\,\phi x$". Então, uma maneira conveniente de ler "$(x).\,\phi x$" é "ϕx é verdadeiro para todos os possíveis valores de x". Esta é, porém, uma leitura menos precisa do que "ϕx sempre", porque a noção de *verdade* não é parte do conteúdo do que é julgado. Quando nós julgamos "todos os homens são mortais", nós julgamos verdadeiramente, mas a noção de verdade não está necessariamente em nossas mentes, assim como ela não precisa estar quando nós julgamos "Sócrates é mortal".

[29] Nós usamos "sempre" como significando "em todos os casos", não "em todos os tempos". Similarmente, "às vezes" significará "em alguns casos".

III. *Definição e Ambiguidade Sistemática de Verdade e Falsidade.*

Uma vez que "$(x).\,\phi x$" envolve a função $\phi\hat{x}$, ele deve, de acordo com nosso princípio, ser impossível como um argumento para ϕ. Isto é, o símbolo "$\phi\{(x).\,\phi x\}$" deve ser sem sentido. O princípio pareceria, à primeira vista, ter certas exceções. Tome, por exemplo, a função "$\hat{p}$ é falso", e considere a proposição "$(p).\,p$ é falso". Esta deve ser uma proposição asserindo todas as proposições da forma "p é falso". Tal proposição, estaríamos inclinados a dizer, deve ser falsa, porque "p é falso" não é sempre verdadeira. Consequentemente, nós deveríamos ser levados à proposição

"$\{(p).\,p$ é falso$\}$ é falso",

i.e., seríamos levados a uma proposição em que "$(p).\,p$ é falso" é o argumento para a função "$\hat{p}$ é falso", o que nós declaramos ser impossível. Agora, veremos que "$(p).\,p$ é falso", no que foi dito acima, pretende ser uma proposição sobre todas as proposições, e que, pela forma geral do princípio do círculo vicioso, não podem haver proposições sobre *todas* as proposições. No entanto, parece claro que, dada qualquer função, há uma proposição (verdadeira ou falsa) asserindo todos os seus valores. Consequentemente, nós somos levados à conclusão de que "p é falso" e "q é falso" nem sempre devem ser os valores, com os argumentos p e q, para uma única função "$\hat{p}$ é falso". Isso, porém, só é possível caso a palavra "falso" realmente tenha vários significados diferentes, apropriados para proposições de tipos diferentes.

Que as palavras "verdadeiro" e "falso" têm vários significados diferentes, de acordo com o tipo de proposições às quais elas são aplicadas, não é difícil de se ver. Tomemos qualquer função $\phi\hat{x}$, e seja ϕa um de seus valores. Chamemos o tipo de verdade que é aplicável a ϕa de "*primeira* verdade" [*first truth*]. (Não se deve assumir que ela seria a primeira verdade em outro contexto: isso é apenas para indicar que ela é o primeiro tipo de verdade em nosso contexto). Considere agora a proposição $(x).\,\phi x$. Se ela tem verdade do tipo apropriado para ela, isso significará que cada valor de ϕx tem "primeira verdade". Assim, se nós chamarmos o tipo de verdade que é apropriada para $(x).\,\phi x$ de "*segunda* verdade", nós podemos definir "$\{(x).\,\phi x$ tem segunda verdade$\}$" como significando "todo valor de $\phi\hat{x}$" tem primeira verdade", *i.e.*, "$(x).\,(\phi x$ tem primeira verdade)". Similarmente, se denotarmos por "$(\exists x).\,\phi x$" a proposição "ϕx às vezes", *i.e.*, como podemos de maneira menos precisa expressá-la, "ϕx para algum valor de x", veremos que $(\exists x).\,\phi x$ tem segunda verdade se houver um x para o qual ϕx tem primeira verdade; então, podemos definir "$\{(\exists x).\,\phi x\}$ tem segunda verdade" como significando "algum valor para $\phi\hat{x}$ tem primeira verdade", $i.e.$, "$(\exists x).\,(\phi x$ tem primeira verdade)". Considerações similares se aplicam à falsidade. Então, "$\{(x).\,\phi x\}$ tem segunda falsidade" significará que "todos os valores de $\phi\hat{x}$ têm primeira falsidade", $i.e.$, "$(x).\,(\phi x$ tem primeira falsidade)". Desse modo, o tipo de falsidade que pode pertencer a uma proposição geral é diferente daquele tipo que pode pertencer a uma proposição particular.

Aplicando estas considerações à proposição "$(p). p$ é falso", veremos que o tipo de falsidade em questão deve ser especificado. Se, por exemplo, quer-se dizer sobre primeira falsidade, a função "$\hat{p}$ tem primeira falsidade" é significante apenas quando p é do tipo de proposição que tem primeira falsidade ou primeira verdade. Consequentemente, "$(p). p$ é falso" será substituído por um enunciado que é equivalente a "todas as proposições tendo primeira verdade ou primeira falsidade terão primeira falsidade". Esta proposição tem *segunda* falsidade, e não é um argumento possível para a função "$\hat{p}$ tem *primeira* falsidade". Então, a aparente exceção ao princípio de que "$\phi\{(x). \phi x\}$" deve ser sem sentido desaparece.

Considerações similares nos permitirão lidar com "não-p" e com "p ou q". Pode parecer como se estas fossem funções nas quais *qualquer* proposição poderia aparecer como argumento. Mas isso é graças a uma ambiguidade sistemática nos significados de "não" e "ou", pela qual eles se adaptam a proposições de qualquer ordem. Para explicar completamente como isso ocorre, será bom começar com uma definição do tipo mais simples de *verdade* e *falsidade*.

O universo consiste de objetos tendo várias qualidades e participando de várias relações. Alguns dos objetos que ocorrem no universo são complexos. Quando um objeto é complexo, ele consiste de partes inter-relacionadas. Consideremos um objeto complexo formado de duas partes a e b que se relacionam pela relação R. O objeto complexo "a-na-relação-R-com-b" pode ser capaz de ser *percebido*; quando percebido, ele é percebido como um objeto. A atenção pode mostrar que ele é complexo; então, nós *julgamos* que a e b se relacionam por R. Tal julgamento, sendo derivado da percepção pela mera atenção, pode ser chamado de "julgamento de percepção". Este julgamento de percepção, considerado como uma ocorrência real, é uma relação de quatro termos, a saber, a, b, R e a pessoa que percebe. A percepção, pelo contrário, é uma relação de dois termos, a saber, a-na-relação-R-com-b e a pessoa que percebe. Uma vez que um objeto da percepção não pode ser nada, nós não podemos perceber "a-na-relação-R-com-b" a menos que a esteja na relação R com b. Consequentemente, um juízo de percepção, de acordo com a definição acima, deve ser verdadeiro. Isso não significa que, em um juízo que *aparece* para nós como sendo um de percepção, nós temos certeza de não estarmos em erro, uma vez que nó podemos errar em pensar que nosso julgamento realmente foi derivado meramente por análise do que foi percebido. Mas se nosso julgamento foi derivado dessa maneira, então ele deve ser verdadeiro. De fato, nós podemos definir *verdade*, no caso de tais argumentos, como consistindo no fato de que ela é uma *correspondência* complexa do pensamento discursivo que é o julgamento. Isto é, quando nós julgamos "a tem a relação R com b ", nosso julgamento é dito ser *verdadeiro* quando há um complexo "a-na-relação-R -com-b", e é dito ser *falso* quando este não é o caso. Esta é a definição de verdade e falsidade em relação a juízos desse tipo.

Veremos que, de acordo com a explicação acima, um julgamento não tem um único objeto, nomeadamente a proposição, mas vários objetos inter-relacionados. Isto é, a relação que constitui um julgamento não é uma relação de dois termos, nomeadamente a mente que julga e a proposição, mas sim uma relação de vários termos, a saber, a mente e o que são chamados de constituintes da proposição. Ou seja, quando nós julgamos (digamos) "isto é vermelho", o que ocorre é uma relação de três termos, a mente, "isto" e vermelho. Por outro lado, quando nós *percebemos* "a vermelhidão disto", há uma relação de dois termos, a saber, a mente e o objeto complexo "a vermelhidão disto". Quando um julgamento ocorre, há uma certa entidade complexa, composta pela mente e os vários objetos do juízo. Quando o juízo é *verdadeiro*, no caso do tipo dos juízos que nós estivemos considerando, há um complexo correspondente de *objetos* do juízo sozinho. A falsidade, em relação à nossa presente classe de juízos, consiste na ausência de um complexo correspondente composto dos objetos sozinhos. Segue-se da teoria acima que uma "proposição", no sentido de que uma proposição deve ser *o* objeto de um julgamento, é uma abstração falsa, porque um julgamento tem vários objetos, não um. É a diversidade dos objetos em um juízo (oposto à percepção) que leva as pessoas a dizerem de pensamentos como "discursivos", apesar de elas não parecerem terem percebido claramente o que significava esse epíteto.

Graças à pluralidade de objetos de um único juízo, segue-se que o que nós chamamos de "proposição" (no sentido em que ela é distinta da frase que a expressa) não é uma entidade única. Isto é, a frase que expressa a proposição é o que nós chamamos de um símbolo "incompleto"[30]; ele não tem significado em si mesmo, mas requer alguma suplementação para adquirir um significado completo. Este fato é de alguma forma escondido pela circunstância de que o julgamento em si mesmo fornece um suplemento suficiente, e que o juízo em si mesmo não faz qualquer adição *verbal* à proposição. Então, "a proposição 'Sócrates é humano'" usa "Sócrates é humano" de maneira que ela requer um suplemento de algum tipo antes que ela adquira um significado completo; mas quando eu julgo "Sócrates é humano", o significado é completado pelo ato de julgar, e nós não temos mais um símbolo incompleto. O fato de que proposições são "símbolos incompletos" é importante filosoficamente, e é relevante em certo ponto na lógica simbólica.

Os juízos com os quais nós lidamos até então são tais que são da mesma forma que os juízos de percepção, *i.e.*, seus assuntos são sempre particulares e definidos. Mas há vários juízos que não são dessa forma. Eles são "todos os homens são mortais", "eu conheci um homem", alguns homens são gregos". Antes de lidar com tais juízos, nós introduziremos alguns termos técnicos.

Nós daremos o nome de "*um complexo*" para qualquer objeto como "a em relação R com b", ou "a tendo a qualidade q", ou "a e b e c estão na relação S". Falando de maneira ampla, um *complexo* é qualquer coisa que ocorre no universo e não é simples. Nós chamaremos um julgamento de *elementar* quando ele meramente assere

[30] Ver Capítulo III.

tais coisas como "a tem a relação R com b", "a tem a qualidade q", ou "a e b e c estão na relação S". Então, um juízo *elementar* é verdadeiro quando há um complexo correspondente, e falso quando não há um complexo correspondente.

Mas, considere agora uma proposição como "todos os homens são mortais". Aqui, o juízo não corresponde a *um* complexo, mas a vários, a saber, "Sócrates é mortal", "Platão é mortal", "Aristóteles é mortal", etc. (Para o momento, é desnecessário investigar se cada um deles não requer mais tratamento antes que cheguemos aos complexos últimos envolvidos. Para propósitos de ilustração, "Sócrates é mortal" é aqui tratado como um juízo elementar, apesar de ele não ser um de fato, como será explicado mais tarde. Juízos elementares verdadeiros não são muito facilmente encontrados). Nós não queremos dizer para negar que pode haver alguma relação do conceito *homem* com o conceito *mortal* que pode ser *equivalente* a "todos os homens são mortais", mas em qualquer caso, esta relação não é a mesma coisa que o que nós afirmamos quando dizemos que todos os homens são mortais. Nosso juízo de que todos os homens são mortais reúne um número de juízos elementares. Ele não é, porém, composto deles, uma vez que (*e.g.*) o fato de que Sócrates é mortal não é parte do que é asserido, como pode ser visto ao se considerar o fato de que nossa asserção pode ser entendida por uma pessoa que nunca ouviu falar de Sócrates. Para entender o juízo "todos os homens são mortais", não é necessário saber quais homens existem. Nós devemos admitir, portanto, como um tipo radicalmente novo de juízo, tais asserções gerais como "todos os homens são mortais". Nós asserimos que, dado que x é humano, x é sempre mortal. Isto é, nós asserimos "x é mortal" de *todo* x que é humano. Então, nós podemos julgar (verdadeiramente ou falsamente) que *todos* os objetos que têm alguma propriedade atribuída também têm alguma outra propriedade atribuída. Isto é, dadas quaisquer funções proposicionais $\phi\hat{x}$ e $\psi\hat{x}$, há um juízo asserindo ψx de todo x para os quais nós temos ϕx. Chamaremos tais juízos de *juízos gerais.*

É evidente (como explicado acima) que a definição de *verdade* é diferente no caso de juízos gerais do que era no caso de juízos elementares. Vamos chamar o significado da *verdade* que demos aos julgamentos elementares de "verdade elementar". Então, quando afirmamos que é verdade que todos os homens são mortais, queremos dizer que todos os julgamentos da forma "x é mortal", onde x é um homem, têm verdade elementar. Podemos definir isso como "verdade da segunda ordem", ou "verdade de segunda ordem"[31]. Então, se expressarmos a proposição "todos os homens são mortais" na forma

"$(x).\ x$ é mortal, onde x é um homem",

e chamarmos este julgamento de p, então "p é verdadeiro" deve ser tomado como significando "p tem verdade de segunda ordem", que por sua vez significa

"(x).'x é mortal' tem verdade elementar, onde x é um homem".

---

[31] N.T.: No original, "*We may define this as 'truth of the second order' or 'second-order truth*".

Para evitar a necessidade de declarar explicitamente a limitação à qual nossa variável está sujeita, é conveniente substituir a interpretação acima de "todos os homens são mortais" por uma interpretação ligeiramente diferente. A proposição "todos os homens são mortais" é equivalente a "'x é um homem' implica 'x é mortal', com todos os valores possíveis de x". Aqui, x não se restringe a valores como os homens, mas pode ter qualquer valor para o qual "'x é um homem' implica 'x é mortal'" é *significativo*, isto é, verdadeiro ou falso. Tal proposição é chamada de "implicação formal". A vantagem dessa forma é que os valores que a variável pode assumir são dados pela função à qual é o argumento: os valores que a variável pode levar são todos aqueles com os quais a função é significativa.

Nós usamos o símbolo "$(x).\,\phi x$" para expressar o juízo geral que assere todos os juízos da forma "ϕx". Então, o juízo "todos os homens são mortais" é equivalente a

"(x).'x é um homem' implica 'x é um mortal'",

$i.\,e.$, (em virtude da definição de implicação) a

"$(x).\,x$ não é um homem ou x é mortal".

Como acabamos de ver, o significado de *verdade* aplicável a essa proposição não é o mesmo que o significado de *verdade* aplicável a "x é um homem" ou a "x é mortal". E geralmente, em qualquer julgamento $(x).\,\phi x$, o sentido em que esse julgamento é ou pode ser verdadeiro não é o mesmo que aquele em que ϕx é ou pode ser verdadeiro. Se ϕx é um julgamento elementar, ele é verdadeiro quando aponta para um complexo correspondente. Mas $(x).\,\phi x$ não aponta para um único complexo correspondente: os complexos correspondentes são tão numerosos quanto os valores possíveis de x.

Resulta do exposto que tal proposição como "todos os julgamentos feitos por Epimênides são verdadeiros" só será *prima facie* capaz de ser verdadeira se todos os seus julgamentos forem da mesma ordem. Se eles são de ordens variadas, das quais a enésima é a mais alta, podemos fazer n asserções da forma "todos os julgamentos da ordem m feitos por Epimênides são verdadeiros", onde m tem todos os valores até n. Mas nenhum julgamento pode incluir-se em seu próprio escopo, uma vez que esse julgamento é sempre de ordem superior aos julgamentos a que se refere.

Vamos considerar a seguir o que se entende por negação de uma proposição da forma "$(x).\,\phi x$". Observamos, para começar, que "ϕx em alguns casos" ou "ϕx às vezes" é um julgamento comparável a "ϕx em todos os casos" ou "ϕx sempre". O julgamento "ϕx às vezes" é verdadeiro se existir um ou mais valores de x para os quais ϕx é verdadeiro. Expressaremos a proposição "ϕx às vezes" pela notação "$(\exists x).\,\phi x$" onde "$\exists$" significa "existe" e todo o símbolo pode ser lido "existe um x tal que ϕx". Tomamos os dois tipos de julgamento expressos por "$(x).\,\phi x$" e "$(\exists x).\,\phi x$" como ideias primitivas. Também tomamos como ideia primitiva a negação de uma proposição *elementar*. Podemos então definir as negações de $(x).\,\phi x$ e $(\exists x).\,\phi x$. A negação de qualquer proposição p será denotada pelo símbolo "$\sim p$". Então a negação de $(x) . \phi x$ será *definida* como significando

$$\text{“}(\exists x) . \sim\phi x\text{”,}$$

e a negação de $(\exists x) . \phi x$ será *definida* como significando "$(x) . \sim\phi x$". Assim, na linguagem tradicional da lógica formal, a negação de uma afirmativa universal deve ser definida como o negativo particular, e a negação da afirmativa em particular deve ser definida como o negativo universal. Portanto, o significado da negação para tais proposições é diferente do significado da negação para proposições elementares.

Uma explicação análoga se aplicará à disjunção. Considere o enunciado "p, ou ϕx sempre". Denotaremos a disjunção de duas proposições p e q por "$p \vee q$". Então, nosso enunciado é "$p . \vee . (x) . \phi x$". Suporemos que p é uma proposição elementar, e que ϕx é sempre uma proposição elementar. Tomamos a disjunção de duas proposições elementares como uma ideia primitiva, e desejamos *definir* a disjunção

$$\text{“}p . \vee . (x) . \phi x\text{”.}$$

Isso pode ser definido como "$(x) . p \vee \phi x$", *i.e.*, "p é verdadeiro, ou ϕx é sempre verdadeiro" deve significar "'p ou ϕx' é sempre verdadeiro". Similarmente, nós definiremos

$$\text{“}p . \vee . (\exists x) . \phi x\text{”}$$

como significando "$(\exists x) . p \vee \phi x$", *i.e.*, nós definimos "p é verdadeiro ou há um x para o qual ϕx é verdadeiro" como significando "há um x para o qual p ou ϕx é verdadeiro". Similarmente, nós podemos definir uma disjunção de duas proposições universais: "$(x) . \phi x . \vee . (y) . \psi y$" será definido como significando "$(x, y) . \phi x \vee \psi y$", *i.e.*, "$\phi x$ é sempre verdadeiro ou ψy é sempre verdadeiro" significa " 'ϕx ou ψy' é sempre verdadeiro". Por este método, nós obtemos definições de disjunções contendo proposições da forma $(x) . \phi x$ ou $(\exists x) . \phi x$ em termos de disjunções de proposições elementares; mas o significado de "disjunção" não é o mesmo para proposições da forma $(x) . \phi x$ e $(\exists x) . \phi x$ do que ele era para proposições elementares.

Explicações similares podem ser dadas para a implicação e a conjunção, mas isso é desnecessário, já que elas podem ser definidas em termos da negação e a disjunção.

IV. *Por que uma Dada Função requer Argumentos de um Certo Tipo.*

As considerações até agora aduzidas em favor da visão de que uma função não pode significantemente ter como argumento qualquer coisa definida em termos da própria função foram mais ou menos indiretas. Mas uma consideração direta dos tipos de funções que têm argumentos diferentes de funções mostrará, se não estivermos enganados, que não apenas é impossível para uma função $\phi\hat{z}$ ter a si própria ou qualquer coisa derivada dela como argumento, mas que, se $\psi\hat{z}$ for outra função tal que há argumentos a para os quais tanto "ϕa" quanto "ψa" são significantes, então $\psi\hat{z}$ e qualquer coisa derivada dela não pode ser significantemente um argumento para $\phi\hat{z}$. Isso surge do fato de que uma função é essencialmente uma ambiguidade, e que, se isso ocorrer em uma proposição definida, isso deve ocorrer de tal maneira que a ambiguidade desapareça, e que resulte em um enunciado completamente não ambíguo. Algumas ilustrações tornarão isso mais claro. Então, "$(x).\,\phi x$", que nós já consideramos, é uma função de $\phi\hat{x}$; assim que $\phi\hat{x}$ é atribuído, nós temos uma proposição definida, completamente livre de ambiguidades. Mas é óbvio que nós não podemos substituir pela função algo que não é uma função: "$(x).\,\phi x$" significa "ϕx em todos os casos", e depende, para sua significância, do fato de que há "casos" de ϕx, *i.e.*, da ambiguidade que é característica de uma função. Esta instância ilustra o fato de que, quando uma função pode ocorrer significantemente como um argumento, algo que não é uma função pode ocorrer significantemente como um argumento. Mas, inversamente, quando algo que não é uma função pode ocorrer significantemente como um argumento, uma função não pode ocorrer significantemente. Tome, por exemplo, "x é um homem", e considere "$\phi\hat{x}$ é um homem". Aqui, não há qualquer coisa para eliminar a ambiguidade que constitui $\phi\hat{x}$; não há, então, nada definido que é dito ser um homem. Uma função, de fato, não é um objeto definido, que poderia ser ou não ser um homem; ela é uma mera ambiguidade esperando determinação, e para que ela ocorra significantemente, ela deve receber a determinação necessária, que ela obviamente não recebe se ela é meramente substituída por algo determinado numa proposição.[32] No entanto, este argumento não se aplica diretamente a uma afirmação como "$\{(x).\,\phi x\}$ é um homem". O senso comum diria que tal enunciado é sem sentido, mas ele não pode ser condenado com base da ambiguidade em seu sujeito. Nós precisamos aqui de uma nova objeção, a saber, a seguinte: Uma proposição não é uma entidade única, mas uma relação de várias; consequentemente, um enunciado em que uma proposição ocorre como sujeito será significante apenas se ele puder ser reduzido a um enunciado sobre os termos que aparecem na proposição. Uma proposição, bem como expressões como "o tal-e-tal", onde gramaticalmente aparece como sujeito, deve ser quebrada em seus constituintes se nós quisermos encontrar o verdadeiro sujeito ou sujeitos.[33] Mas em um tal enunciado como "p é um homem", onde p é uma proposição, isso não é possível. Consequentemente, "$\{(x).\,\phi x\}$ é um homem" é sem sentido.

V. *A Hierarquia de Funções e Proposições.*

[32] Note que enunciados a respeito da significância de uma frase contendo "z" diz respeito ao símbolo "z", e, portanto, não cai sob a regra de que a eliminação da ambiguidade funcional é necessária para a significância. Significância é uma propriedade de signos. Cf. pp. 87, 88.
[33] Cf. Capítulo III.

Nós somos, então, levados à conclusão, tanto a partir do princípio do círculo vicioso quanto da inspeção direta, de que funções para as quais um dado objeto a pode ser um argumento são incapazes de serem argumentos umas para as outras, e que elas não tem termos em comum com as funções para as quais elas podem ser argumentos. Começando com a e outros termos que podem ser argumentos para a mesma função para a qual a pode ser um argumento, chegamos próximo a funções para as quais a é um argumento possível, e então a funções para as quais tais funções são argumentos possíveis, e assim por diante. Mas a hierarquia que deve ser construída não é tão simples quando pode parecer à primeira vista. As funções que tomam a como argumento formam uma totalidade ilegítima, e elas próprias requerem divisão em uma hierarquia de funções. Isso é facilmente visto como se segue. Seja $f(\phi\hat{z}, x)$ uma função de duas variáveis, $\phi\hat{z}$ e x. Então, se, mantendo x fixado no momento, nós a asserirmos com todos os valores possíveis de ϕ, nós obtemos uma proposição:

$$(\phi).\, f(\phi\hat{z}, x).$$

Aqui, se x é variável, nós temos uma função de x; mas como esta função envolve uma totalidade de valores de $\phi\hat{z}$, ela não pode ser ela mesma um dos valores incluídos na totalidade, pelo princípio do círculo vicioso. Segue-se que a totalidade de valores de $\phi\hat{z}$ lidados em $(\phi).\, f(\phi\hat{z}, x)$ não é a totalidade de todas as funções nas quais x pode ocorrer como um argumento, e que não há uma tal totalidade como todas as funções nas quais x pode ocorrer como argumento.

Segue-se do que foi exposto que uma função em que $\phi\hat{z}$ ocorre como um argumento requer que "$\phi\hat{z}$" não represente *qualquer* função que é capaz de um dado argumento, mas deve ser restrito de tal maneira que nenhuma das funções que são valores possíveis de "$\phi\hat{z}$" envolvam qualquer referência à totalidade de tais funções. Tomemos como uma ilustração a definição de identidade. Nós podemos tentar definir "x é idêntico a y" como significando "tudo que for verdadeiro de x é verdadeiro de y ", *i.e.*, "ϕx sempre implica ϕy". Mas aqui, uma vez que estamos preocupados em asserir todos os valores de "ϕx implica ϕy" considerados como uma função de ϕ, nós devemos estar compelidos a impor sobre ϕ alguma limitação que nos prevenirá de incluir dentre os valores de ϕ valores nos quais "todos os possíveis valores de ϕ" são referidos. Então, por exemplo, "x é idêntico a a" é uma função de x; consequentemente, se isso é um valor legítimo de ϕ em "ϕx sempre implica ϕy", nós seremos capazes de inferir, por meio da definição acima, que se x é idêntico a a, e x é idêntico a y, então y é idêntico a a. Apesar de a conclusão ser verdadeira, o raciocínio incorpora uma falácia círculo-viciosa, uma vez que nós tomamos "$(\phi).\, \phi x$ implica ϕ a" como um possível valor de ϕx, o que não pode ser. Se, porém, nós impusermos qualquer limitação sobre ϕ, pode ocorrer, até onde parece, atualmente, que com outros valores de ϕ nós teríamos ϕx verdadeiro e ϕy falso, de maneira que nossa definição de identidade proposta estaria completamente errada. Esta dificuldade é evitada pelo "axioma da redutibilidade", que será explicado depois. Para o presente, ele é apenas mencionado para ilustrar a necessidade e a relevância da hierarquia de funções de um dado argumento.

Daremos o nome de "funções-a" para funções que são significantes para um dado argumento a. Suponha, então, que nós tomamos qualquer seleção de funções-a, e considere a proposição "a satisfaz todas as funções pertencentes à seleção em questão". Se nós substituirmos aqui a por uma variável, nós obtemos uma função-a; mas, pelo princípio do círculo vicioso, esta função-a não pode ser um membro da nossa seleção, uma vez que ela se refere ao todo da seleção. Deixe a seleção consistir em todas aquelas funções que satisfazem $f(\phi\hat{z})$. Então, nossa nova função é

$$(\phi).\{f(\phi\hat{z}) \text{ implica } \phi x\},$$

onde x é o argumento. Parece, então, que, para qualquer seleção de funções-a que escolhermos, haverá outras funções-a que estarão fora da nossa seleção. Tais funções-a, como a instância acima ilustra, sempre surgirão através da tomada de uma função de dois argumentos, $\phi\hat{z}$ e x, e da asserção de todos ou de alguns valores que resultam da variação de ϕ. O que é necessário, portanto, para evitar falácias círculo-viciosas, é dividir nossas funções-a em "tipos", cada um dos quais não contém funções que se referem ao todo daquele tipo.

Quando algo é afirmado ou negado sobre todos os valores possíveis ou sobre alguns (indeterminados) possíveis valores de uma variável, essa variável é chamada de aparente, depois do Peano. A presença das palavras *todo* ou *algum* em uma proposição indica a presença de uma variável aparente; mas muitas vezes uma variável aparente está realmente presente onde a linguagem não indica imediatamente sua presença. Assim, por exemplo, "A é mortal" significa "há um tempo em que A morrerá". Portanto, um tempo variável ocorre como variável aparente.

Os exemplos mais claros de proposições que não contêm variáveis aparentes são tais como expressar julgamentos imediatos de percepção, como "isto é vermelho" ou "isto é doloroso", onde "isto" é algo imediatamente dado. Em outros julgamentos, mesmo quando à primeira vista nenhuma variável parece estar presente, muitas vezes acontece que realmente existe uma. Tome (digamos) "Sócrates é humano". Para o próprio Sócrates, a palavra "Sócrates", sem dúvida, representava um objeto do qual ele estava imediatamente ciente, e o julgamento "Sócrates é humano" não continha uma variável aparente. Mas para nós, que só conhecemos Sócrates por descrição, a palavra "Sócrates" não pode significar o que significava para ele; significa antes "a pessoa que tem tais e tais propriedades" (digamos) "o filósofo ateniense que bebeu a cicuta". Agora, em todas as proposições sobre "o tal e o tal" existe uma variável aparente, como será mostrado no capítulo III. Assim, no que temos em mente quando dizemos "Sócrates é humano", há uma variável aparente, embora não houvesse variável aparente no julgamento correspondente feito por Sócrates, desde que assumimos que exista uma consciência imediata de si mesmo.

Quaisquer que sejam as instâncias de proposições que não contêm variáveis aparentes, é óbvio que funções proposicionais cujos valores não contêm variáveis aparentes são a fonte de proposições que contêm variáveis aparentes, no sentido em que a função $\phi\hat{x}$ é a fonte da proposição $(x).\,\phi x$. Pois, os valores de $\phi\hat{x}$ não contêm a variável aparente x, que aparece em $(x).\,\phi x$; se eles contiverem uma variável aparente y, ela poderá ser eliminada da mesma forma e assim por diante. Esse processo deve terminar, já que nenhuma proposição que possamos apreender pode conter mais do que um número finito de variáveis aparentes, com o argumento de que tudo o que podemos apreender deve ser de complexidade finita. Portanto, devemos chegar finalmente a uma função de tantas variáveis quantas as etapas que foram alcançadas a partir de nossa proposição original, e essa função será tal que seus valores não contenham variáveis aparentes. Podemos chamar essa função de *matriz* de nossa proposição original e de quaisquer outras proposições e funções a serem obtidas transformando alguns dos argumentos da função em variáveis aparentes. Assim, por exemplo, se tivermos uma função de matriz cujos valores são $\phi(x,\, y)$, dela derivaremos

$(y).\,\phi(x, y)$, que é uma função de x,

$(x).\,\phi(x, y)$, que é uma função de y,

$(x, y).\,\phi(x, y)$, significando "$\phi(x, y)$ é verdadeiro para todos os valores possíveis de x e y". Esta última é uma proposição não contendo variáveis *reais*, *i.e.*, não tem variáveis exceto variáveis aparentes.

Portanto, é claro que todas as proposições e funções possíveis são obtidas das matrizes pelo processo de transformar os argumentos das matrizes em variáveis aparentes. Para dividir nossas proposições e funções em tipos, devemos, portanto, começar com matrizes e considerar como elas devem ser divididas com o objetivo de evitar falácias de círculo vicioso nas definições das funções em questão. Para esse fim, usaremos letras como $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z,\ w$, para denotar objetos que não são nem proposições nem funções. Tais objetos chamaremos de *indivíduos*. Tais objetos serão constituintes de proposições ou funções, e serão constituintes *genuínos*, no sentido de que não desaparecem na análise, como fazem (por exemplo) as classes, ou frases da forma "o tal e tal".

As primeiras matrizes que ocorrem são aquelas cujos valores são das formas

$$\phi x,\ \psi(x.\,y),\ \chi(x, y, z \ldots),$$

i.e., onde os argumentos, sejam quantos forem, são todos indivíduos. As funções $\phi,\ \psi,\ \chi$, ..., uma vez que (por definição) elas não contêm variáveis aparentes, e não têm argumentos exceto indivíduos, não pressupõe nenhuma totalidade de funções. Das funções $\psi,\ \chi$, nós podemos proceder para formar outras funções de x, tal como $(y).\,\psi(x, y)$, $(\exists y).\,\psi(x, y)$, $(y, z).\,\chi(x, y, z)$, $(y){:}\,(\exists z).\,\chi(x, y, z)$, e assim por diante. Todas elas não pressupõem totalidades exceto aquelas de indivíduos. Nós chegamos, então, a uma certa coleção de funções de x, caracterizadas pelo fato de não envolverem variáveis que não sejam individuais. Chamaremos tais funções de "funções de primeira ordem".

Podemos agora introduzir uma notação para expressar "qualquer função de primeira ordem". Denotaremos qualquer função de primeira ordem por "$\phi ! \hat{x}$" e qualquer valor para tal função por "$\phi ! x$". Então, "$\phi ! x$" significa qualquer valor para qualquer função que não envolva variáveis diferentes de individuais. Veremos que "$\phi ! x$" é ela própria uma função de duas variáveis, a saber, $\phi ! \hat{z}$ e x. Então, $\phi ! x$ envolve uma variável que não é um indivíduo, a saber, $\phi ! \hat{z}$, e, portanto, envolve uma variável além das individuais. Novamente, se a é um dado indivíduo,

"$\phi ! x$ implica $\phi ! a$ para todos os valores possíveis de ϕ"

é uma função de x, mas ela não é uma função da forma $\phi ! x$, porque ela envolve uma variável (aparente) ϕ que não é um indivíduo. Daremos o nome de "predicado" a qualquer função de primeira ordem $\phi ! \hat{x}$. (Este uso da palavra "predicado" é apenas proposto para os propósitos da presente discussão). Então, o enunciado "$\phi ! x$ implica $\phi ! a$ para todos os valores possíveis de ϕ" pode ser lido como "todos os predicados de x são predicados de a". Isso faz uma afirmação sobre x, mas não atribui a x um *predicado* no sentido especial definido.

Graças à introdução da função de primeira ordem variável $\phi ! \hat{z}$, nós agora temos um novo conjunto de matrizes. Então, "$\phi ! x$" é uma função que não contém variáveis aparentes, mas contém as duas variáveis reais $\phi ! \hat{z}$ e x. (Deve-se observar que quando ϕ é atribuído, nós poderemos obter uma função cujos valores envolvem indivíduos como variáveis aparentes, por exemplo, se $\phi ! x$ for $(y) . \psi(x, y)$. Mas, contanto que ϕ seja variável, $\phi ! x$ não contém variáveis aparentes). Novamente, se a é um indivíduo definido, $\phi ! a$ é uma função da variável $\phi ! \hat{z}$. Se a e b são indivíduos definidos, "$\phi ! a$ implica $\psi ! b$" é uma função das duas variáveis $\phi ! \hat{z}$ e $\psi ! \hat{z}$, e assim por diante. Somos, então, levados a todo um conjunto de novas matrizes,

$f(\phi ! \hat{z}), g(\phi ! \hat{z}, \psi ! \hat{z}), F(\phi ! \hat{z}, x)$, e assim por diante.

Estas matrizes contêm indivíduos e funções de primeira ordem como argumentos, mas (como todas as matrizes), elas não contêm variáveis aparentes. Qualquer matriz desse tipo, se ela contém mais de uma variável, dá origem a novas funções de uma variável ao tomar todos os seus argumentos, exceto um, em variáveis aparentes. Então, nós obtemos as funções

$(\phi) . g(\phi ! \hat{z}, \psi ! \hat{z})$, que é uma função de $\psi ! \hat{z}$.

$(x) . F(\phi ! \hat{z}, x)$, que é uma função de $\phi ! \hat{z}$.

$(\phi) . F(\phi ! \hat{z}, x)$, que é uma função de x.

Daremos o nome de *matrizes de segunda ordem* àquelas matrizes que têm funções de primeira ordem dentre seus argumentos, e que não têm qualquer argumento exceto funções de primeira ordem e indivíduos. (Não é *necessário* que elas tenham indivíduos dentre seus argumentos). Daremos o nome de *funções de segunda ordem* àquelas que são atrizes de segunda ordem ou derivadas de matrizes de segunda ordem ao tornar algum de seus argumentos em variáveis aparentes. Será visto que um indivíduo um uma função de primeira ordem pode aparecer como argumento para uma função de segunda ordem. Funções de segunda ordem são tais que contêm variáveis que são funções de primeira ordem, mas não contêm outras variáveis exceto (possivelmente) indivíduos.

Nós temos agora várias classes novas de funções em nosso comando. Em primeiro lugar, nós temos funções de segunda ordem que têm um argumento que é uma função de primeira ordem. Denotaremos uma função variável desse tipo pela notação $f!(\hat{\phi}!\hat{z})$, e qualquer valor de tal função por $f!(\phi!\hat{z})$. Como $\phi!x$, $f!(\phi!\hat{z})$ é uma função de duas variáveis, a saber, $f!(\hat{\phi}!\hat{z})$ e $\phi!\hat{z}$. Dentre os possíveis valores de $f!(\hat{\phi}!\hat{z})$ estarão $\phi!a$ (onde a é constante), $(x).\phi!x$, $(\exists x).\phi!x$, e assim por diante. (Eles resultam da atribuição de um valor a f, deixando ϕ a ser atribuído). Chamaremos tais funções de "funções predicativas de funções de primeira ordem".

Em segundo lugar, nós temos funções de segunda ordem de dois argumentos, um dos quais e uma função de primeira ordem enquanto o outro é um indivíduo. Denotaremos valores indeterminados de tais funções pela notação

$$f!(\phi!\hat{z}, x).$$

Assim que x for atribuído, nós teremos uma função predicativa de $\phi!\hat{z}$. Se nossa função não contiver funções de primeira ordem como variável aparente, nós obteremos uma função predicativa de x se nós atribuirmos um valor para $\phi!\hat{z}$. Então, para tomar o caso mais simples possível, se $f!(\phi!\hat{z}, x)$ é $\phi!x$, a atribuição de um valor a ϕ nos dá uma função predicativa de x, em virtude da definição de "$\phi!x$". Mas se $f!(\phi!\hat{z}, x)$ contém uma função de primeira ordem como variável aparente, a atribuição de um valor a $\phi!\hat{z}$ nos dá uma função de segunda ordem de x.

Em terceiro lugar, nós temos funções de segunda ordem de indivíduos. Elas serão todas derivadas de funções da forma $f!(\phi!\hat{z}, x)$, ao tornar ϕ em uma variável aparente. Nós não precisamos, portanto, de uma nova notação para elas.

Nós também temos funções de segunda ordem de duas funções de primeira ordem, ou de duas funções de primeira ordem e um indivíduo, e assim por diante.

Podemos agora proceder exatamente da mesma maneira para matrizes de terceira ordem, que serão funções que contêm funções de segunda ordem como argumentos, e que não contêm variáveis aparentes e nenhum argumento além de indivíduos, funções de primeira ordem e funções de segunda ordem. Daí procederemos, como antes, para funções de terceira ordem; e assim podemos prosseguir indefinidamente. Se a ordem mais alta de variável que ocorre em uma função, seja como argumento ou como variável aparente, é uma função da enésima ordem, então a função na qual ela ocorre é da ordem $n + 1$. Não chegamos a funções de uma ordem infinita, porque o número de argumentos e de variáveis aparentes em uma função deve ser finito e, portanto, toda função deve ter uma ordem finita. Como as ordens de funções são definidas apenas passo a passo, não pode haver processo de "avançar até o limite" e funções de ordem infinita não podem ocorrer.

Definiremos uma função de uma variável como *predicativa* quando ela estiver na próxima ordem acima da de seu argumento, ou seja, na ordem mais baixa compatível com o fato de ter esse argumento. Se uma função possui vários argumentos, e a ordem mais alta de função que ocorre entre os argumentos é a *enésima*, chamamos a função de predicativa se ela for da ordem $n + 1$, ou seja, novamente, se for da menor ordem compatível com os argumentos que ela tem. Uma função de vários argumentos é predicativa se houver um de seus argumentos tal que, quando os outros argumentos tiverem valores atribuídos a eles, obteremos uma função predicativa de um argumento indeterminado.

É importante observar que todas as funções possíveis na hierarquia acima podem ser obtidas por meios de funções predicativas e variáveis aparentes. Então, como nós vimos, funções de segunda ordem de um indivíduo x são da forma

$$(\phi).f!(\phi!\hat{z}, x) \text{ ou } (\exists\phi).f!(\phi!\hat{z}, x) \text{ ou } (\phi, \psi).f!(\phi!\hat{z}, \psi!\hat{z}, x), \text{ ou etc.,}$$

onde *f* é uma função predicativa de segunda ordem. E, falando geralmente, uma função não predicativa de enésima ordem é obtida de uma função predicativa de enésima ordem ao transformar todos os argumentos de ordem $n - 1$ em variáveis aparentes. (Outros argumentos também podem ser transformados em variáveis aparentes). Então, não precisamos introduzir quaisquer funções como variáveis, exceto funções predicativas. Ainda, para obter qualquer função de uma variável x, nós não precisamos ir além de funções predicativas de *duas* variáveis. Para a função $(\psi).f!(\phi!\hat{z}, \psi!\hat{z}, x)$, onde f é dado, é uma função de $\phi!\hat{z}$ e x, e é predicativa. Então, ela é da forma $F!(\phi!\hat{z}, x)$, e, portanto, $(\phi, \psi).f!(\phi!\hat{z}, \psi!\hat{z}, x)$ é da forma $(\phi).F!(\phi!\hat{z}, x)$. Assim, falando geralmente, por uma sucessão de passos nós encontramos que, se $\phi!\hat{u}$ é uma função predicativa de uma ordem suficientemente grande, qualquer função não predicativa atribuída de x será de uma das duas formas:

$$(\phi).F!(\phi!\hat{u}, x) \text{ ou } (\exists\phi).F!(\phi!\hat{u}, x),$$

onde F é uma função predicativa de $\phi!\hat{u}$ e x.

A natureza da hierarquia de funções acima pode ser reapresentada da seguinte maneira. Uma função, como vimos em um estágio anterior, pressupõe, como parte de seu significado, a totalidade de seus valores ou, o que significa o mesmo, a totalidade de seus possíveis argumentos. Os argumentos para uma função podem ser funções, proposições ou indivíduos. (Deve-se lembrar que os indivíduos foram definidos como o que não é uma proposição nem uma função). Por enquanto, negligenciamos o caso em que o argumento de uma função é uma proposição. Considere uma função cujo argumento é um indivíduo. Essa função pressupõe a totalidade dos indivíduos; mas, a menos que ela contenha funções como variáveis aparentes, ela não pressupõe nenhuma totalidade de funções. Se, no entanto, ela contiver uma função como variável aparente, ela não poderá ser definida até que alguma totalidade de funções tenha sido definida. Segue-se que devemos primeiro definir totalidade daquelas funções que possuem indivíduos como argumentos e que não contêm funções como variáveis aparentes. Essas são as funções *predicativas* dos indivíduos. Geralmente, uma função predicativa de um argumento variável é aquela que não envolve totalidade, exceto os valores possíveis do argumento e aqueles que são pressupostos por qualquer um dos argumentos possíveis. Assim, uma função predicativa de um argumento variável é qualquer função que pode ser especificada sem a introdução de novos tipos de variáveis não necessariamente pressupostos pela variável que é o argumento.

Um tratamento estreitamente análogo pode ser desenvolvido para proposições. Proposições que não contêm funções nem variáveis aparentes podem ser chamadas *proposições elementares*. Proposições que não são elementares, que não contêm funções nem variáveis aparentes, exceto indivíduos, podem ser chamadas *proposições de primeira ordem*. (Deve-se observar que nenhuma variável, exceto as variáveis *aparentes*, pode ocorrer em uma proposição, pois o que quer que contenha uma variável *real* é uma função, não uma proposição). Assim, proposições elementares e de primeira ordem serão valores de funções de primeira ordem. (Deve-se lembrar que uma função não é um constituinte em um de seus valores: assim, por exemplo, a função "$\hat{x}$ é humano" não é um constituinte da proposição "Sócrates é humano"). Proposições elementares e de primeira ordem não pressupõem qualquer totalidade, exceto (no máximo) a totalidade dos indivíduos. Eles são de uma ou outra das três formas

$$\phi!\,x;\ (x).\,\phi!\,x;\ (\exists x).\,\phi!\,x,$$

onde $\phi!\,x$ é uma função predicativa de um indivíduo. Segue-se que, se p representa uma proposição elementar variável ou uma proposição de primeira ordem variável, uma função fp é $f(\phi!\,x)$, $f\{(x).\,\phi!\,x\}$ ou $f\{(\exists x).\,\phi!\,x\}$. Assim, uma função de uma proposição elementar ou de primeira ordem sempre pode ser reduzida a uma função de uma função de primeira ordem. Segue-se que uma proposição envolvendo a totalidade das proposições de primeira ordem pode ser reduzida a uma proposição envolvendo a totalidade das funções de primeira ordem; e isso obviamente se aplica igualmente a ordens superiores. A hierarquia proposicional pode, portanto, ser derivada da hierarquia funcional, e podemos definir uma proposição de enésima ordem como uma que envolva uma variável aparente da ordem $n - 1$ na hierarquia funcional. A hierarquia proposicional nunca é necessária na prática, e é relevante apenas para a solução de paradoxos; portanto, é desnecessário entrar em mais detalhes sobre os tipos de proposições.

VI. O Axioma da Redutibilidade

Falta considerar o "axioma da redutibilidade". Será visto que, de acordo com a hierarquia acima, nenhum enunciado sobre "todas as funções-a" pode ser feito significativamente, onde a é algum dado objeto. Então, uma tal noção como "todas as propriedades de a" será ilegítima. Nós temos que distinguir a ordem de função em questão. Nós podemos falar sobre "todas as propriedades predicativas de a", "todas as propriedades de segunda ordem de a", e assim por diante. (Se a não for um indivíduo, mas um objeto de ordem n, então "propriedades de segunda ordem de a" significará "funções de ordem $n + 2$ satisfeitas por a"). Mas nós não podemos falar sobre "todas as propriedades de a". Em alguns casos, nós podemos ver que alguns enunciados valerão para "todas as propriedades de ordem n de a", para qualquer valor de n. Em tais casos, nenhum prejuízo prático resulta de considerar o enunciado como sendo sobre "todas as propriedades de a", dado que nós lembremos que é realmente um número de enunciados, e não um único enunciado que poderia ser considerado como atribuindo outra propriedade a a, sobre e sob todas as propriedades. Tais casos sempre envolverão alguma ambiguidade sistemática, como aquela envolvida no significado da palavra "verdade", como explicamos acima. Graças a esta ambiguidade sistemática, será possível, às vezes, combinar em um único enunciado verbal o que é realmente um número de enunciados diferentes, correspondendo a diferentes ordens na hierarquia. Isso é ilustrado no caso do mentiroso, onde o enunciado "todos os enunciados de A são falsos" deve ser quebrado em diferentes enunciados referindo a seus enunciados de várias ordens, e atribuindo a cada um o tipo apropriado de falsidade.

O axioma da redutibilidade é introduzido para legitimar um grande número de raciocínios, nos quais, *prima facie*, estamos preocupados com noções como "todas as propriedades de a", ou "todas as funções-a", nas quais, não obstante, parece ser dificilmente possível suspeitar qualquer erro substancial. Para enunciar o axioma, nós precisamos primeiro definir o que queremos dizer com "equivalência formal". Duas funções, $\phi\hat{x}$ e $\psi\hat{x}$, são ditas serem "formalmente equivalentes" quando, para qualquer argumento possível x, ϕx é equivalente a ψx, *i.e.*, ϕx e ψx são ambos verdadeiros ou ambos falsos. Assim, duas funções são formalmente equivalentes quando elas são satisfeitas pelo mesmo conjunto de argumentos. O axioma da redutibilidade é a assunção de que, dada qualquer função $\phi\hat{x}$, há uma função *predicativa* formalmente equivalente, *i.e.*, há uma função predicativa que é verdadeira quando ϕx é verdadeiro e falso quando ϕx é falso. Em símbolos, o axioma é:

$$\vdash : (\exists\psi) : \phi x . \equiv_x . \psi ! x .$$

Para duas variáveis, requeremos um axioma similar, a saber: Dada qualquer função $\phi(\hat{x}, \hat{y})$, há uma função *predicativa* formalmente equivalente, *i.e.*,

$$\vdash : (\exists \psi) : \phi(x, y) . \equiv_{x,y} . \psi ! (x, y).$$

Para explicar os propósitos do axioma da redutibilidade, e a natureza dos fundamentos para supô-lo verdadeiro, nós primeiro devemos ilustrá-lo ao aplica-lo a alguns casos particulares.

Se chamarmos um *predicado* de um objeto de uma função predicativa que é verdadeira daquele objeto, então os predicados de um objeto são apenas algumas das suas propriedades. Tome, por exemplo, uma proposição como "Napoleão tinha todas as qualidades que fazem um bom general". Podemos interpretar isso como significando "Napoleão tinha todos os predicados que fazem um bom general". Aqui, há um predicado que é uma variável aparente. Se colocarmos "$f(\phi ! \hat{z})$" para "$\phi ! \hat{z}$ é um predicado requerido em um grande general", nossa proposição será

$$(\phi) : f(\phi ! \hat{z}) \text{ implica } \phi ! (Napoleão).$$

Uma vez que isso se refere a uma totalidade de predicados, esse não é um predicado de Napoleão. Não se segue de jeito nenhum, porém, que não há algum predicado comum e peculiar a grandes generais. Na verdade, é certo que há um tal predicado. Pois, o número de grandes generais é finito, e cada um deles certamente possuem algum predicado não possuído por nenhum outro ser humano – por exemplo, o instante exato de seu nascimento. A disjunção de tais predicados constitui um predicado comum e peculiar a grandes generais.[34] Se chamarmos este predicado de $\psi ! \hat{z}$, o enunciado que fizemos sobre Napoleão era equivalente a $\psi ! (Napoleão)$. E esta equivalência vale igualmente se substituirmos qualquer outro indivíduo por Napoleão. Então, nós chegamos a um predicado que é sempre equivalente à propriedade atribuída a Napoleão, *i.e.*, ele pertence àqueles objetos que têm esta propriedade, e a nenhum outro. O axioma da redutibilidade diz que tal predicado sempre existe, *i.e.*, que qualquer propriedade de um objeto pertence à mesma coleção de objetos que aqueles que possuem algum predicado.

Podemos agora ilustrar nosso princípio por sua aplicação na *identidade*. Nesta conexão, ele tem uma certa afinidade com a identidade dos indiscerníveis de Leibniz. É claro que, se x e y são idênticos, e ϕx é verdadeiro, então ϕy é verdadeiro. Aqui, não pode importar que tipo de função $\phi \hat{x}$ seja: os enunciados devem valer para *qualquer* função. Mas nós não podemos dizer, inversamente: "Se, para todos os valores de ϕ, ϕx implica ϕy, então x e y são idênticos"; porque "todos os valores de ϕ" é inadmissível. Se quisermos falar de "todos os valores de ϕ", precisamos nos confinar a funções de uma ordem. Podemos confinar ϕ a predicados, ou a funções de segunda ordem, ou a funções de qualquer ordem que quisermos. Mas nós precisamos necessariamente deixar de fora funções de todas as ordens exceto a em questão. Então, obteremos, por assim dizer, uma hierarquia de diferentes níveis de identidade. Podemos dizer "todos os predicados de x pertencem a y", "todas as propriedades de

[34] Quando um conjunto (finito) de predicados é dado por enumeração, sua disjunção é um predicado, porque nenhum predicado ocorre como variável aparente na disjunção.

segunda ordem de x pertencem a y", e assim por diante. Cada um destes enunciados implica todos os seus predecessores: por exemplo, se todas as funções de segunda ordem de x pertencem a y, então todos os predicados de x pertencem a y, pois, ter todos os predicados de x é uma função de segunda ordem, e esta propriedade pertence a x. Mas nós não podemos, sem a ajuda do nosso axioma, argumentar inversamente que se todos os predicados de x pertencem a y, todas as propriedades de segunda ordem de x também devem pertencer a y. Então não podemos, sem a ajuda de um axioma, ter certeza de que x e y são idênticos se eles têm os mesmos predicados. A lei da identidade dos indiscerníveis de Leibniz fornece este axioma. Deve-se observar que por "indiscerníveis", ele não pode ter significado dois objetos que concordam em relação a *todas* as suas propriedades, pois, uma das propriedades de x é ser idêntico a x, e, portanto, esta propriedade necessariamente pertenceria a y se x e y concordassem em *todas* as suas propriedades. Alguma limitação das propriedades comuns necessárias para tornar as coisas indiscerníveis é, portanto, implicada pela necessidade de um axioma. Para propósitos de ilustração (não de interpretação de Leibniz), podemos supor as propriedades comuns requeridas para a indiscernibilidade ser limitada a predicados. Então, a identidade dos indiscerníveis enunciará que se x e y concordam em relação a todos os seus predicados, eles são idênticos. Isso pode ser provado se nós assumirmos o axioma da redutibilidade. Pois, neste caso, cada propriedade pertence à mesma coleção de objetos como definido por algum predicado. Consequentemente, há algum predicado comum e peculiar aos objetos que são idênticos a x. Este predicado pertence a x, uma vez que x é idêntico a si mesmo; consequentemente, ele pertence a y, uma vez que y tem todos os predicados de x consequentemente, y é idêntico a x. Segue-se que podemos definir x e y como idênticos quando todos os predicados de x pertencem a y, *i.e.*, quando $(\phi): \phi! x. \supset. \phi! y$. Nós, portanto, adotamos a seguinte definição de identidade[35]:

$$x = y. =: (\phi):\phi! x. \supset. \phi! y \text{ Df.}$$

Mas, além do axioma da redutibilidade, ou algum axioma equivalente nesta conexão, devemos ser obrigados a considerar a identidade como indefinível, e a admitir (o que parece impossível) que dois objetos podem concordar em todos os seus predicados sem serem idênticos.

O axioma da redutibilidade é ainda mais essencial na teoria de classes. Deve-se observar, em primeiro lugar, que se nós assumirmos a existência de classes, o axioma da redutibilidade pode ser provado. Pois, neste caso, dada qualquer função $\phi\hat{z}$ de qualquer ordem, há uma classe α consistindo daqueles objetos que satisfazem $\phi\hat{z}$. Consequentemente, "ϕx" é equivalente a "x pertence a α". Mas "x pertence a α" é um enunciado que não contém variáveis aparentes, e é, portanto, uma função predicativa de x. Logo, se assumirmos a existência de classes, o axioma da redutibilidade se torna desnecessário. A assunção do axioma da redutibilidade é,

[35] Note que nesta definição, o segundo sinal de igualdade deve ser considerado como sendo combinado com "Df" para formar um símbolo único; o que é definido é o sinal de igualdade *não* seguido pelas letras "Df".

portanto, uma assunção menor do que a assunção de que há classes. Esta última suposição tem sido feita até agora sem hesitação. Porém, tanto com base nas contradições, que requerem um tratamento mais complicado se classes são assumidas, quanto com base de que é sempre bom fazer o menor número possível de assunções requeridas para provar nossos teoremas, nós preferimos assumir o axioma da redutibilidade em vez de a existência de classes. Mas para explicar o uso do axioma ao lidar com classes, é necessário antes explicar a teoria de classes, que é um tópico pertencente ao Capítulo III. Nós, portanto, adiamos para este Capítulo a explicação do uso do nosso axioma ao lidar com classes.

Vale a pena notar que todos os propósitos servidos pelo axioma da redutibilidade são igualmente bem servidos se nós assumirmos que há sempre uma função de enésima ordem (onde n é fixo) que é formalmente equivalente a $\phi\hat{x}$, qualquer que seja a ordem de $\phi\hat{x}$. Aqui, por "uma função de enésima ordem" nós queremos dizer uma função de enésima ordem relativa aos argumentos para $\phi\hat{x}$; então, se estes argumentos são absolutamente de ordem m, nós assumimos a existência de uma função formalmente equivalente a $\phi\hat{x}$ cuja ordem absoluta é $m + n$. O axioma da redutibilidade na forma assumida acima toma $n = 1$, mas isso não é necessário para o uso do axioma. Também é desnecessário que n seja o mesmo para diferentes valores de m; o que é necessário é que n seja constante enquanto m for constante. O que é preciso é que, quando se trata de funções extensionais de funções, devemos ser capazes de lidar com qualquer função-a por meio de alguma função formalmente equivalente de um dado tipo, de modo a podermos obter resultados que de outra maneira requereriam uma noção ilegítima de "todas as funções-a"; mas não importa qual é o dado tipo. Não parece, porém, que o axioma da redutibilidade tenha se tornado sensivelmente mais plausível ao ser colocado da forma mais geral, mas mais complicada, acima.

O axioma da redutibilidade é equivalente à assunção de que "qualquer combinação ou disjunção de predicados[36] é equivalente a um único predicado", *i.e.*, à assunção de que, se nós asserirmos que x tem todos os predicados que satisfazem uma função $f(\phi!\hat{z})$, há algum outro predicado que x terá sempre que nossa asserção for verdadeira, e não terá sempre que ela for falsa, e, similarmente, se asserirmos que x tem algum dos predicados que satisfazem a função $f(\phi!\hat{z})$. Pois, através deste pressuposto, a ordem de uma função não predicativa pode ser diminuída em um; portanto, depois de algum número finito de passos, seremos capazes de obter de qualquer função não predicativa uma função predicativa formalmente equivalente. Não parece ser provável que a assunção acima poderia ser substituída pelo axioma da redutibilidade em reduções simbólicas, uma vez que seu uso requereria a introdução explícita da assunção de que por um número finito de passos para baixo nós podemos

[36] Aqui, a combinação ou disjunção é suposta ser dada intensionalmente. Se for dada extensinalmente (*i.e.*, por enumeração), nenhuma assunção é requerida; mas, neste caso, o número de predicados em questão deve ser finito.

passar de qualquer função para uma função predicativa, e esta assunção não poderia ser bem feita sem desenvolvimentos que dificilmente são possíveis em um estágio inicial. Mas, com base nos motivos acima expostos, parece claro que, de fato, se o axioma alternativo acima é verdadeiro, o axioma da redutibilidade também o é. O inverso, que completa a prova da equivalência, é certamente evidente.

VII. *Razões para Aceitar o Axioma da Redutibilidade.*

Que o axioma da redutibilidade é evidente é uma proposta que dificilmente pode ser mantida. Mas, na verdade, a auto evidência nunca é mais do que uma parte da razão para aceitar um axioma, e nunca é indispensável. A razão para aceitar um axioma, como para aceitar qualquer outra proposição, é sempre em grande parte indutiva, nomeadamente que muitas proposições que são quase indubitáveis podem ser deduzidas dele, e que não se conhece nenhuma maneira igualmente plausível pela qual estas proposições poderiam ser verdadeiras se o axioma fosse falso, e nada do que é provavelmente falso pode ser deduzido dele. Se o axioma é aparentemente evidente por si mesmo, isso só significa, praticamente, que é quase indubitável; pois as coisas têm sido pensadas como evidentes por si mesmas e ainda se revelaram falsas. E se o axioma em si é quase indubitável, isso apenas acrescenta à evidência indutiva derivada do fato de que suas consequências são quase indubitáveis: não fornece novas evidências de um tipo radicalmente diferente. A infalibilidade nunca é alcançável e, portanto, algum elemento de dúvida deve estar sempre ligado a cada axioma e a todas as suas consequências. Na lógica formal, o elemento de dúvida é menor que na maioria das ciências, mas não está ausente, como se deduz do fato de que os "paradoxos se seguiram de premissas que não se sabia anteriormente exigirem limitações". No caso do axioma da redutibilidade, a evidência indutiva a seu favor é muito forte, já que os raciocínios que permite e os resultados a que conduzem são todos eles aparentemente válidos. Mas, embora pareça muito improvável que o axioma se revele falso, não é de modo algum improvável que ele seja deduzido de algum outro axioma mais fundamental e mais evidente. É possível que o uso do princípio do círculo vicioso, tal como está incorporado na hierarquia de tipos acima, seja mais drástico do que é necessário, e que por um uso menos drástico se possa evitar a necessidade do axioma. Tais mudanças, porém, não tornariam falso nada que tivesse sido afirmado com base nos princípios explicados acima: elas apenas forneceriam provas mais fáceis dos mesmos teoremas. Parece, portanto, haver apenas o terreno mais fino para temer que a utilização do axioma da redutibilidade nos possa levar a um erro.

VIII. *As Contradições.*

Estamos agora em posição de mostrar como a teoria dos tipos afeta a solução das contradições que têm assolado a lógica matemática. Para isso, começaremos por uma enumeração de algumas das mais importantes e ilustrativas dessas contradições, e então mostraremos como todas elas incorporam falácias de círculo vicioso, e por isso todas são evitadas pela teoria dos tipos. Note-se que estes paradoxos não se relacionam exclusivamente com as ideias de número e quantidade. Portanto, nenhuma solução que procure explicá-las apenas como resultado de algum uso ilegítimo dessas ideias pode ser adequada. A solução deve ser procurada em algumas dessas análises de ideias lógicas fundamentais, como foi tentado nas páginas anteriores.

(1) A mais antiga contradição do tipo em questão são as Epimênides. Epimênides, o cretense, disse que todos os cretenses eram mentirosos, e todas as outras declarações feitas pelos cretenses eram certamente mentiras. Isto foi uma mentira? A forma mais simples desta contradição é dada pelo homem que diz "Eu estou mentindo"; se ele está mentindo, ele está falando a verdade, e vice-versa.

(2) Seja w a classe de todas as classes que não são membros de si mesmo. Então, seja lá qual classe x for, "x é um w" é equivalente a "x não é um x". Portanto, dando a x o valor w, "w é um w" é equivalente à "w não é um w".

(3) Seja T a relação que subsiste entre duas relações, R e S, sempre que R não tem a relação R com S. Então, quaisquer que sejam as relações R e S, "R tem a relação T com S" é equivalente a "R não tem a relação R com S". Então, dando o valor T tanto a R quanto a S, tem-se que "T tem a relação T com T" é equivalente a " T não tem a relação T com T".

(4) A contradição de Burali-Forti pode ser enunciada como se segue: Pode-se mostrar que todas as séries bem-ordenadas têm um número ordinal, que a série de ordinais até, e incluindo, qualquer ordinal excede o ordinal dado por um, e (em certas suposições muito naturais) que a série de todas as ordinais (em ordem de magnitude) é bem ordenada. Segue-se que a série de todos os ordinais tem um número ordinal, digamos, Ω. Mas, neste caso, a série dos ordinais incluindo Ω tem o número ordinal $\Omega + 1$, que deve ser maior que Ω. Então, Ω não é o número ordinal de todos os ordinais.

(5) O número de sílabas nos nomes portugueses[37] de inteiros finitos tende a aumentar à medida que os inteiros crescem, e deve aumentar gradualmente indefinidamente, já que apenas um número finito de nomes pode ser feito com um determinado número finito de sílabas. Portanto, os nomes de alguns inteiros devem consistir de pelo menos dezenove sílabas, e entre elas deve haver um mínimo. Daí que "o menor inteiro não nomeável em menos de trinta sílabas" deve denotar um número inteiro definido; de fato, ele denota 111.777. Mas "o menor inteiro não nomeável em menos de trinta sílabas" é em si mesmo um nome composto de vinte sílabas; portanto, o menor número inteiro não nomeável em menos de trinta sílabas pode ser nomeado em vinte sílabas, o que é uma contradição[38] [39].

(6) Dentre os ordinais transfinitos, alguns podem ser definidos, enquanto outros não; pois, o número total de definições é $\aleph_0$, enquanto o número de ordinais

[37] N.T.: Adaptado; no original, "*English names*".

[38] Esta contradição foi sugerida para nós pelo Sr. G. G. Barry, da Bodleian Library.

[39] N.T.: Aqui, uma adaptação precisou ser feita, pois a frase original em inglês tem um número de sílabas diferente da em português. No original, a descrição definida que Russell apresenta é "the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables", que tem dezenove sílabas. Como o número denotado por "o menor inteiro não nomeável em menos de trinta sílabas" é o mesmo que o da descrição original, não há diferença substancial aqui. Ainda que houvesse, não é difícil reformular o exemplo de Russell a ponto de encontrar outra formulação que implique no paradoxo em questão.

transfinitos excede $\aleph_0$. Então, deve haver ordinais indefinidos, e entre eles deve haver aquele que é o menor. Mas ele é definido como "o menor ordinal indefinível", o que é uma contradição.[40]

(7) O paradoxo de Richard[41] é parecido com aquele do menor ordinal indefinível. Ele é como se segue: Considere todos os decimais que podem ser definidos por meio de um número finito de palavras; seja E a classe de tais decimais. Então, E tem $\aleph_0$ termos; então, seus membros podem ser ordenados como o primeiro, o segundo, o terceiro, ... Seja N um número definido como se segue: Se a enésima figura na enésima casa decimal for p, então a enésima figura em N será $p + 1$ (ou 0, se $p = 9$). Então, N é diferente de todos os membros de E, uma vez que, para qualquer valor finito que n possa ter, a enésima figura em N é diferente da enésima figura na enésima casa decimal dos decimais compondo E, e, portanto, N é diferente do enésimo decimal. Não obstante, nós definimos N em um número finito de palavras e, portanto, N deve ser um membro de E. Portanto, N é e não é um membro de E.

Em todas as contradições acima (que são meramente seleções de um número indefinido), há uma característica em comum, que nós descreveremos como auto referência ou reflexividade [*reflexiveness*]. O comentário de Epimênides deve incluir a si próprio em seu próprio escopo. Se *todas* as classes, dado que elas não são membros de si mesmas, são membros de w, isso deve também se aplicar a w; e de maneira similar para as contradições relacionais análogas. Nos casos de nomes e definições, os paradoxos resultam da consideração de não-nomeabilidade e indefinibilidade como elementos em nomes e definições. No caso do paradoxo de Burali-Forti, a série cujo número ordinal causa a dificuldade é uma série de todos os números ordinais. Em cada contradição é dito algo sobre *todos* os casos de algum tipo, e pelo que é dito, parece ser gerado um novo caso, que é e não é do mesmo tipo que os casos de que *todos* estavam preocupados sobre o que foi dito. Mas esta é uma característica de totalidades ilegítimas, como nós a definimos ao enunciar o princípio do círculo vicioso. Então, todas as contradições são ilustrações de falácias do círculo vicioso. Falta apenas mostrar, portanto, que as totalidades ilegítimas envolvidas são excluídas pela hierarquia dos tipos que nós construímos.

(1) Quando um homem diz "estou mentindo", podemos interpretar a sua afirmação como: "Há uma proposição que eu estou afirmando e que é falsa". Ou seja, ele está afirmando a verdade de algum valor da função "Eu afirmo p, e p é falso". Mas nós vimos que a palavra "falso" é ambígua, e que, para torná-la inequívoca, devemos especificar a ordem da falsidade, ou, o que é o mesmo, a ordem da proposição à qual a

[40] Cf. König, "Ueber die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem", *Math, Annalen*, Vol. LXI. (1905); A. C. Dixon, "On 'well-ordered' aggregates", *Proc. London Math. Soc.* Series 2, Vol. IV. Part I. (1906); e E. W. Hobson, "On the Arithmatic Continuum", *ibid.* A solução oferecida nos últimos destes artigos depende da variação do "aparato de definição", e está assim, em linhas gerais, de acordo com a solução adotada aqui. Mas ela não invalida o enunciado no texto, se à "definição" é dado um significado constante.

[41] Cf. Poincaré, "Les mathématiques et la logique", *Revue de Métaphysique et de Morale*, Mai 1906, especialmente as seções VII e IV.; também, Peano, *Revista de Mathematica*, Vol. VIII. No. 5. (1906), p. 149 ff.

falsidade é atribuída. Vimos também que, se p é uma proposição da ordem n, uma proposição em que p ocorre como uma variável aparente não é da ordem n, mas de uma ordem superior. Daí que o tipo de verdade ou falsidade que pode pertencer à afirmação "há uma proposição p que eu estou afirmando e que tem falsidade da enésima ordem" é verdade ou falsidade de uma ordem mais elevada que a enésima. Portanto, o estado mental de Epimênides não se enquadra no seu próprio âmbito e, portanto, não surge nenhuma contradição.

Se considerarmos a frase "Estou mentindo" como uma forma compacta de fazer simultaneamente todas as seguintes afirmações: "Estou afirmando uma proposição falsa de primeira ordem", "Estou afirmando uma proposição falsa de segunda ordem", e assim por diante, encontramos o seguinte curioso estado das coisas: Como nenhuma proposição da primeira ordem está sendo afirmada, a afirmação "Estou afirmando uma proposição falsa de primeira ordem" é falsa. Esta afirmação é de segunda ordem, logo, a afirmação "Estou fazendo uma falsa afirmação de segunda ordem" é verdadeira. Esta é uma declaração de terceira ordem, e é a única declaração de terceira ordem que está sendo feita. Portanto, a declaração "Estou fazendo uma declaração falsa de terceira ordem" é falsa. Assim vemos que a afirmação "Estou fazendo uma declaração falsa de ordem $2n + 1$" é falsa, enquanto a afirmação "Estou fazendo uma declaração falsa de ordem $2n$" é verdadeira. Mas neste estado de coisas não há contradição.

(2) Para resolver a contradição sobre a classe das classes que não são membros de si mesmas, nós devemos assumir, o que será explicado no próximo Capítulo, que uma proposição sobre classes pode sempre ser reduzida a um enunciado sobre uma função que define a classe, *i.e.*, sobre uma função que e satisfeita pelos membros da classe e por nenhum outro argumento. Então, uma classe é um objeto derivado de uma função e que pressupõe a função, assim como, por exemplo, $(x). \phi x$ pressupõe a função $\phi\hat{x}$. Portanto, uma classe não pode, pelo princípio do círculo vicioso, significantemente ser o argumento para sua função definidora, isto é, se denotarmos por "$\hat{z}(\phi z)$" a classe definida por $\phi\hat{z}$, o símbolo "$\phi\{\hat{z}(\phi z)\}$" deve ser sem sentido. Consequentemente, uma classe nem satisfaz nem não satisfaz sua função definidora e, portanto (como aparecerá de maneira mais completa no Capítulo III), não é nem um membro de si mesma nem um não membro de si mesma. Esta é uma consequência imediata da limitação aos possíveis argumentos para uma função que foi explicada no começo do presente Capítulo. Então, se α é uma classe, o enunciado "α não é um membro de α" é sempre sem sentido, e não há, portanto, sentido na frase "a classe daquelas classes que não são membros de si mesmas". Portanto, a contradição que resulta de supor que há uma tal classe desaparece.

(3) Comentários exatamente similares se aplicam a "a relação que vale entre R e S sempre que R não tem a relação R com S". Suponha que a relação R é definida por uma função $\phi(x, y)$, *i.e.*, R vale entre x e y sempre que $\phi(x, y)$ for verdadeiro, mas não de outra forma. Então, para interpretar "R tem a relação R com S", nós

precisamos supor que R e S podem significantemente serem argumentos para ϕ. Mas (assumindo, como aparecerá no Capítulo III, que R pressupõe sua função definidora) isso requereria que ϕ fosse capaz de tomar como argumento um objeto que é definido em termos de ϕ, e isso não pode ser feito por qualquer função, como vimos no começo deste Capítulo. Portanto, "R tem a relação R com S" é sem sentido, e a contradição cessa.

(4) A solução para a contradição de Burali-Forti requer outros desenvolvimentos. Neste estágio, deve ser suficiente observar que uma série é uma relação, e um número ordinal é uma classe de séries. (Estes enunciados são justificados no corpo do trabalho). Assim, uma série de números ordinais é uma relação entre classes de relações, e é de tipo maior que qualquer tipo de séries que são membros dos números ordinais em questão. O "número ordinal de todos os ordinais" de Burali-Forti deve ser o número ordinal de todos os ordinais de um dado tipo, e deve, portanto, ser de tipo maior que qualquer um destes ordinais. Assim, ele não é um destes ordinais, e não há contradição em ele ser maior que qualquer um deles[42].

(5) O paradoxo sobre "o menor inteiro não nomeável em menos de trinta sílabas" incorpora, como é óbvio, uma falácia do círculo vicioso. Pois a palavra "nomeável" refere-se à totalidade dos nomes, e ainda assim é permitido que ocorra no que professa ser um entre os nomes. Portanto, não pode haver uma totalidade de nomes, no sentido em que o paradoxo fala de "nomes". É fácil de ver que, em virtude da hierarquia de funções; a teoria dos tipos torna impossível uma totalidade de "nomes". Nós podemos, em de fato, distinguir nomes de diferentes ordens da seguinte forma: (a) Nomes elementares serão como verdadeiros "nomes próprios", ou seja, as denominações convencionais não envolvendo qualquer descrição, (b) Os nomes de primeira ordem serão tais que envolvam uma descrição por meio de uma função de primeira ordem, ou seja, se $\phi ! \hat{x}$ é uma função de primeira ordem, "o termo que satisfaz $\phi ! \hat{x}$" será um nome de primeira ordem, embora nem sempre haja um objeto nomeado por este nome, (c) Nomes de segunda ordem serão tais que envolvem uma descrição por meio de uma função de segunda ordem; entre tais nomes estarão aqueles que envolvem uma referência à totalidade de nomes de primeira ordem. E assim podemos prosseguir através de toda uma hierarquia. Mas em nenhuma etapa podemos dar um significado à palavra "nomeável" a menos que especifiquemos a ordem dos nomes a serem empregados; e qualquer nome em que a frase "nomeável por nomes de ordem n" ocorra é necessariamente de uma ordem mais elevada do que a n-ária. Assim, o paradoxo desaparece.

As soluções do paradoxo sobre o menor ordinal indefinível e do paradoxo de Richard são muito análogas ao acima mencionado. A noção de "definível", que ocorre em ambos, é quase o mesmo que "nomeável", que ocorre em nosso quinto paradoxo: "definível" é o que "nomeável" se torna quando são excluídos nomes elementares, ou seja, "definível" significa "nomeável por um nome que não é elementar." Mas aqui há a mesma ambiguidade em relação a tipos que havia antes, e a mesma necessidade de

[42] A solução para o paradoxo de Burali-Forti por meio da teoria dos tipos é dada em detalhes em *256.

acrescentar palavras que especificam o tipo ao qual a definição deve pertencer. E no entanto o tipo pode ser especificado, "o menor ordinal não definível por definições de este tipo" é uma definição de um tipo superior; e no paradoxo de Richard, quando limitamo-nos, como devemos, às casas decimais que têm uma definição de um determinado tipo, o número N, que causa o paradoxo, tem uma definição que pertence a um tipo superior e, portanto, não se enquadra no âmbito do nosso definições anteriores.

Um número indefinido de outras contradições, de natureza similar às sete acima, pode ser facilmente fabricado. Em todas elas, a solução é do mesmo tipo. Em todos elas, a aparência de contradição é produzida pela presença de alguma palavra que tem ambiguidade sistemática de tipo, tal como *verdade*, *falsidade*, *função*, *propriedade*, *classe*, *relação*, *cardinal*, *ordinal*, *nome*, *definição*. Qualquer palavra assim, se sua ambiguidade típica for ignorada, aparentemente gerará uma totalidade contendo membros definidos em termos de si mesma; e assim dará origem a falácias do círculo vicioso. Na maioria dos casos, as conclusões dos argumentos que envolvem falácias do círculo vicioso não serão autocontraditórias, mas onde quer que tenhamos uma totalidade ilegítima, um pouco de engenhosidade nos permitirá construir uma falácia do círculo vicioso levando a uma contradição, que desaparece assim que as palavras tipicamente ambíguas se tornam tipicamente definidas, ou seja, são determinadas como pertencentes a este ou aquele tipo.

Assim, a aparência de contradição é sempre devida à presença de palavras que incorporam uma ambiguidade típica oculta, e a solução da aparente contradição reside em trazer à luz a ambiguidade oculta.

Apesar das contradições que resultam de uma ambiguidade típica despercebida, não é desejável evitar palavras e símbolos que têm uma ambiguidade típica. Tais palavras e símbolos englobam praticamente todas as ideias com as quais a matemática e a lógica matemática estão envolvidas: a ambiguidade sistemática é o resultado de uma analogia sistemática. Ou seja, em quase todos os raciocínios que constituem a matemática e a lógica matemática, estamos usando ideias que podem receber qualquer uma de um número infinito de determinações típicas diferentes, qualquer uma das quais deixa o raciocínio válido. Assim, empregando palavras e símbolos tipicamente ambíguos, somos capazes de fazer uma cadeia de raciocínios aplicável a qualquer um de um número infinito de casos diferentes, o que não seria possível se renunciássemos ao uso de palavras e símbolos tipicamente ambíguos.

Entre as proposições totalmente expressas em termos de noções tipicamente ambíguas, praticamente as únicas que podem diferir, em relação à verdade ou à falsidade, de acordo com a determinação típica que recebem, estão os teoremas de existência. Se assumirmos que o número total de indivíduos é n, então o número total de classes de indivíduos é 2^n, o número total de classes de indivíduos é 2^{2^n}, e assim por diante. Aqui, n pode ser finito ou infinito, e em ambos os casos $2n > n$. Assim, existem cardinais maiores que n mas não maiores que $2n$ como aplicados a classes de classes, mas não como aplicados a classes de indivíduos, de modo que qualquer que seja o número de indivíduos, haverá teoremas de existência que se aplicam a tipos superiores mas não a tipos inferiores. Mesmo aqui, entretanto, desde que o número de indivíduos não seja afirmado, mas seja meramente assumido hipoteticamente, podemos substituir o tipo de indivíduos por qualquer outro tipo, desde que façamos uma mudança correspondente em todos os outros tipos que ocorram no mesmo contexto. Ou seja, podemos dar o nome "indivíduos relativos" aos membros de um tipo τ escolhido arbitrariamente, e o nome "classes relativas de indivíduos" às classes de "indivíduos relativos", e assim por diante. Assim, desde que apenas hipotéticos sejam considerados, em que os teoremas de existência de um tipo são mostrados como implicados pelos teoremas de existência de outro tipo, apenas os tipos relativos são relevantes, mesmo nos teoremas de existência. Isto também se aplica aos casos em que a hipótese (e, portanto, a conclusão) é afirmada, desde que a afirmação seja válida para qualquer tipo, por mais escolhido que seja. Por exemplo, qualquer tipo tem pelo menos um membro; portanto, qualquer tipo que consiste em classes, de qualquer ordem, tem pelo menos dois membros. Mas a continuidade destes tópicos deve ser deixada ao corpo da obra.

CAPÍTULO III

SÍMBOLOS INCOMPLETOS

(1) Descrições. Por "símbolo incompleto" nós queremos dizer um símbolo que não deve ter qualquer significado isoladamente, mas é apenas definido em certos contextos. Na matemática ordinária, por exemplo, $\frac{d}{dx}$ e $\int_a^b$ são símbolos incompletos: algo deve ser fornecido antes que tenhamos qualquer coisa significativa. Tais símbolos têm o que nós podemos chamar de "definição em uso". Então, se tivermos

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ Df},$$

nós definimos o *uso* de ∇^2, mas $\nabla^2 0$ por si mesmo permanece sem significado. Isso distingue tais símbolos daqueles que (em um sentido generalizado) nós podemos chamar de *nomes próprios*: "Sócrates", por exemplo, significa um certo homem, e, portanto, tem um significado em si mesmo, sem a necessidade de qualquer contexto. Se fornecermos um contexto, como em "Sócrates é mortal", estas palavras expressam o fato do qual Sócrates é um constituinte: há um certo objeto, a saber, Sócrates, que tem a propriedade de mortalidade, e este objeto é um constituinte do fato complexo que asserimos quando dizemos "Sócrates é mortal". Mas, em outros casos, esta simples análise nos falha. Suponha que digamos: "O quadrado redondo não existe". Parece claro que esta é uma proposição verdadeira, mas não podemos considerá-la como negando a existência de um determinado objeto chamado "o quadrado redondo". Pois se houvesse tal objeto, ele existiria: não podemos primeiro supor que existe um determinado objeto, e depois proceder para negar que existe tal objeto. Sempre que o sujeito gramatical de uma proposição pode não existir sem tornar a proposição sem sentido, é evidente que o sujeito gramatical não é um nome próprio, ou seja, não é um nome que represente diretamente algum objeto. Assim, em todos esses casos, a proposição deve ser capaz de ser analisada de tal forma que o que era o sujeito gramatical deve ter desaparecido. Assim, quando dizemos "o quadrado redondo não existe", podemos, como primeira tentativa de tal análise, substituir por "é falso que haja um objeto como sendo ao mesmo tempo redondo e quadrado". Geralmente, quando se diz que "o tal e tal" não existe, temos uma proposta da forma[43]

$$\text{“}{\sim}E!\,(\iota x)(\phi x)\text{”},$$

i.e., $${\sim}\left\{(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c\right\},$$

ou algum equivalente. Aqui, o aparente sujeito gramatical $(\iota x)(\phi x)$ desapareceu completamente; então, em "${\sim}E!\,(\iota x)(\phi x)$", $(\iota x)(\phi x)$ é um símbolo *incompleto*.

[43] Cf. pp. 30, 31.

Como uma extensão do argumento acima, pode-se facilmente mostrar que $(\iota x)(\phi x)$ é *sempre* um símbolo incompleto. Tome, por exemplo, a seguinte proposição: "Scott é o autor de Waverley". [Aqui, "o autor de Waverley" é $(\iota x)(x$ escrevey Waverley)]. Esta proposição expressa uma identidade; então, se "o autor de Waverley" puder ser tomado como um nome próprio, e significar algum objeto c, a proposição seria "Scott é c". Mas, se c é qualquer um que não Scott, esta proposição é falsa; enquanto que se c for Scott, a proposição é "Scott é Scott", que é trivial, e bem claramente diferente de "Scott é o autor de Waverley". Generalizando, nós vemos que a proposição

$$a = (\iota x)(\phi x)$$

é uma que pode ser verdadeira ou pode ser falsa, mas nunca é meramente trivial, como $a = a$; enquanto que, se $(\iota x)(\phi x)$ fosse um nome próprio, $a = (\iota x)(\phi x)$ seria necessariamente falsa ou o mesmo que a proposição trivial $a = a$. Podemos expressar isso ao dizer que $a = (\iota x)(\phi x)$ não é o valor da função proposicional $a = y$, do que se segue que $(\iota x)(\phi x)$ não é um valor de y. Mas, uma vez que y pode ser qualquer coisa, segue-se que $(\iota x)(\phi x)$ é nada. Consequentemente, uma vez que em uso ele tem significado, ele deve ser um símbolo incompleto.

Pode-se sugerir que "Scott é o autor de Waverley" afirma que "Scott" e "o autor de Waverley" são dois nomes para o mesmo objeto. Mas uma pequena reflexão mostrará que isso seria um erro. Pois, se esse fosse o significado de "Scott é o autor de Waverley", o que seria necessário para sua verdade seria que Scott deveria ter sido chamado de o autor de Waverley: se ele tivesse sido assim chamado, a proposição seria verdadeira, mesmo que alguém tivesse escrito Waverley; enquanto que se ninguém o tivesse chamado assim, a proposição seria falsa, mesmo que ele tivesse escrito Waverley. Mas na verdade, ele era o autor de Waverley numa época em que ninguém o chamava assim, e ele não teria sido o autor se todos o tivessem chamado assim, mas alguém mais tivesse escrito Waverley. Assim, a proposição "Scott é o autor de Waverley" não é uma proposição sobre nomes, como "Napoleão é Bonaparte"; e isto ilustra o sentido no qual "o autor de Waverley" difere de um verdadeiro nome próprio.

Assim, todas as frases (que não sejam proposições) contendo a palavra *o* (no singular) são símbolos incompletos: elas têm um significado em uso, mas não isoladamente. Pois "o autor de Waverley" não pode significar o mesmo que "Scott", ou "Scott é o autor de Waverley" significaria o mesmo que "Scott é Scott", o que claramente não significa; nem pode "o autor de Waverley" significar outra coisa que não seja "Scott", ou "Scott é o autor de Waverley" seria falso. Portanto, "o autor de Waverley" não significa nada.

Segue-se do que foi apresentado acima que não devemos tentar definir " $(\iota x)(\phi x)$", mas apenas definir os *usos* deste símbolo, *i.e.*, as proposições em cujas expressões simbólicas ela aparece. Agora, na busca por definir os usos deste símbolo, é importante observar a importância das proposições nas quais ele ocorre. Tome como uma ilustração: "O autor de Waverley foi um poeta". Isto implica (1) que

Waverley foi escrito, (2) que ele foi escrito por um homem, e não em colaboração, (3) que o único homem que o escreveu era um poeta. Se qualquer um destes falhar, a proposição é falsa. Então, "o autor de 'Slawkenburgius on Noses' foi um poeta" é falsa, porque um tal livro nunca foi escrito; "o autor de 'A Tragédia de Maid' foi um poeta" é falsa, porque este conto foi escrito por Beaumont e Fletcher conjuntamente. Estas duas possibilidades de falsidade não surgem se dissermos "Scott foi um poeta". Então, nossa interpretação dos usos de $(\iota x)(\phi x)$ deve ser tal que permita a eles[44]. Agora, fazendo ϕx substituir "x escreveu Waverley", deve ser claro que qualquer enunciado aparentemente sobre $(\iota x)(\phi x)$ requer (1) $(\exists x).(\phi x)$ e (2) $\phi x.\phi y.\supset_{x,y}.x = y$; aqui, (1) enuncia que *pelo menos um* objeto satisfaz ϕx, enquanto (2) diz que *no máximo* um objeto satisfaz ϕx. Ambos juntos são equivalentes a

$$(\exists c): \phi x. \equiv_x . x = c,$$

que nós definimos como $E!\,(\iota x)(\phi x)$.

Então, "$E!\,(\iota x)(\phi x)$" deve ser parte do que é afirmado por qualquer proposição sobre $(\iota x)(\phi x)$. Se nossa proposição é $f\{(\iota x)(\phi x)\}$, o que é afirmado é fc, se $\phi x. \equiv_x . x = c$. Então, nós temos

$$f\{(\iota x)(\phi x)\}. =: (\exists c): \phi x. \equiv_x . x = c : fc \ \mathrm{Df},$$

i.e., "o x que satisfaz ϕx satisfaz fx" deve significar: "Há um objeto c tal que ϕx é verdadeiro quando, e apenas quando, x é c, e fc é verdadeiro", ou, mais exatamente: "Há um c tal que 'ϕx' é sempre equivalente a 'x é c', e fc". Aqui, "$(\iota x)(\phi x)$" de desapareceu completamente; então, "$(\iota x)(\phi x)$" é meramente simbólico, e não representa diretamente um objeto, como se assume que letras latinas minúsculas sozinhas devem fazer[45].

Pode-se facilmente mostrar que a proposição "$a = (\iota x)(\phi x)$" é equivalente a "$\phi x. \equiv_x . x = a$". Pois, pela definição, isso é

$$(\exists c): \phi x. \equiv_x . x = c : a = c,$$

i.e., "há um c para o qual $\phi x. \equiv_x . x = c$, e este c é a", o que é equivalente a "$\phi x. \equiv_x . x = a$". Então, "Scott é o autor de Waverley" é equivalente a:

"'x escreveu Waverley' é sempre equivalente a 'x é Scott'",

i.e., "x escreveu Waverley" é verdadeiro quando x é Scott e falso quando x não é Scott.

Então, apesar de "$(\iota x)(\phi x)$" não ter significado em si mesmo, ele pode ser substituído por y em qualquer função proposicional fy, e nós obtemos uma proposição significante, apesar de não um valor de fy.

Quando $f\{(\iota x)(\phi x)\}$, conforme definido acima, forma parte de alguma outra proposição, diremos que $(\iota x)(\phi x)$ tem ocorrência *secundária*. Quando a expressão

---

[44] N.T.: Que permita a eles (aos usos de $(\iota x)(\phi x)$) as duas possibilidades de falsidade.

[45] Escrevemos geralmente "$f(\iota x)(\phi x)$" em vez de "$f\{(\iota x)(\phi x)\}$" no futuro.

$(\iota x)(\phi x)$ tiver ocorrência secundária, uma proposição na qual ela ocorre poderá ser verdadeira quando $(\iota x)(\phi x)$ não existir. Isso se aplica, por exemplo, à proposição: "Não há uma pessoa como o rei da França". Podemos interpretar isso como

$$\sim\{E!\,(\iota x)(\phi x)\},$$

ou como $$\sim\{(\exists c).\, c = (\iota x)(\phi x)\},$$

se "ϕx" significar "x é rei da França". Em qualquer um dos casos, o que é asserido é que uma proposição p em que $(\iota x)(\phi x)$ ocorre é falsa, e esta proposição p é então parte de uma proposição maior. O mesmo se aplica a uma tal proposição como a seguinte: "Se França fosse uma monarquia, o rei da França seria da Casa de Orleans".

Deve-se observar que uma tal proposição como

$$\sim f\{(\iota x)(\phi x)\}$$

é ambígua; ela pode negar $f\{(\iota x)(\phi x)\}$, caso em que ela será verdadeira se $(\iota x)(\phi x)$ não existir, ou ela pode significar

$$(\exists c) \colon \phi x. \equiv_x . x = c \colon \sim f c,$$

caso em ela pode ser verdadeira apenas de $(\iota x)(\phi x)$ existir. Na linguagem ordinária, a última interpretação seria usualmente adotada. Por exemplo, a proposição "o rei da França não é careca" usualmente seria rejeitada como falsa, significando "o rei da França existe e não é careca". Quando $(\iota x)(\phi x)$ existe, as duas interpretações da ambiguidade dão resultados equivalentes; mas quando $(\iota x)(\phi x)$ não existe, uma interpretação é verdadeira e a outra é falsa. É necessário ser capaz de distinguir elas em nossa notação; e, geralmente, se tivermos tais proposições como

$$\psi(\iota x)(\phi x). \supset . p,$$
$$p. \supset . \psi(\iota x)(\phi x),$$
$$\psi(\iota x)(\phi x). \supset . \chi(\iota x)(\phi x),$$

e assim por diante, devemos ser capazes, pela nossa notação, de distinguir se toda a proposição, ou apenas parte dela, deve ser tratada como o "$f(\iota x)(\phi x)$" da nossa definição. Para este propósito, colocaremos "$[(\iota x)(\phi x)]$" seguido por pontos no começo da parte (ou do todo) que é tomada como $f(\iota x)(\phi x)$, sendo os pontos suficientemente numerosos para destacar a expressão $f(\iota x)(\phi x)$; *i.e.*, $f(\iota x)(\phi x)$ deve ser tudo seguindo os pontos até que se encontre um número igual de pontos não significando um produto lógico, ou um número maior significando um produto lógico, ou o fim da sentença ou o fim de um parêntese envolvendo a "$[(\iota x)(\phi x)]$".

Então,

$$[(\iota x)(\phi x)].\, \psi(\iota x)(\phi x). \supset . p$$

significará $$(\exists c) \colon \phi x. \equiv_x . x = c \colon \psi c \colon \supset . p,$$

mas, $$[(\iota x)(\phi x)] \colon \psi(\iota x)(\phi x). \supset . p$$

significará $$(\exists c) \colon \phi x. \equiv_x . x = c \colon \psi c. \supset . p.$$

É importante distinguir estes dois, pois, se $(\iota x)(\phi x)$ não existe, o primeiro e o segundo são falsos. Novamente,

$$[(\iota x)(\phi x)].\, \sim\psi(\iota x)(\phi x)$$

significará $(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : \sim\psi c$,

enquanto $\sim\{[(\iota x)(\phi x)] . \psi(\iota x)(\phi x)\}$

significará $\sim\{(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : \psi c\}$.

Aqui, novamente, quando $(\iota x)(\phi x)$ não existir, o primeiro será falso e o segundo verdadeiro.

Para evitar esta ambiguidade em proposições contendo $(\iota x)(\phi x)$, nós alteramos nossa definição, ou melhor, nossa notação, colocando

$$[(\iota x)(\phi x)] . f(\iota x)(\phi x) . =: (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : fc \text{ Df.}$$

Por meios desta definição, evitamos qualquer dúvida sobre a porção da nossa proposição asserida que deve ser tratada como o "$f(\iota x)(\phi x)$" da definição. Esta porção será chamada de *escopo* de $(\iota x)(\phi x)$. Então, em

$$[(\iota x)(\phi x)] . f(\iota x)(\phi x) . \supset . p,$$

o escopo de $(\iota x)(\phi x)$ é $f(\iota x)(\phi x)$; mas em

$$[(\iota x)(\phi x)] : f(\iota x)(\phi x) . \supset . p,$$

o escopo é $f(\iota x)(\phi x) . \supset . p$;

em $\sim\{[(\iota x)(\phi x)] . f(\iota x)(\phi x)\}$,

o escopo é $f(\iota x)(\phi x)$; mas em

$$[(\iota x)(\phi x)] . \sim f(\iota x)(\phi x),$$

o escopo é $\sim f(\iota x)(\phi x)$.

Será visto que quando $(\iota x)(\phi x)$ tem toda a proposição embarcada em seu escopo, a proposição em questão não pode ser verdadeira a menos que $E! \, (\iota x)(\phi x)$; mas quando $(\iota x)(\phi x)$ tem apenas parte da proposição embarcada em seu escopo, ela costuma ser verdadeira mesmo quando $(\iota x)(\phi x)$ não existir. Será visto, ainda, que quando $E! \, (\iota x)(\phi x)$, nós podemos aumentar ou diminuir o escopo de $(\iota x)(\phi x)$ o quanto quisermos sem alterar o valor verdade de qualquer proposição na qual ele ocorra.

Se uma proposição contém duas descrições, digamos, $(\iota x)(\phi x)$ e $(\iota x)(\psi x)$, temos que distinguir qual delas tem o maior escopo, *i.e.*, temos que distinguir

(1) $[(\iota x)(\phi x)] : [(\iota x)(\phi x)] . f\{(\iota x)(\phi x), \ (\iota x)(\psi x)\}$,

(2) $[(\iota x)(\psi x)] : [(\iota x)(\phi x)] . f\{(\iota x)(\phi x), \ (\iota x)(\psi x)\}$.

A primeira delas, ao eliminar $(\iota x)(\phi x)$, se torna

(3) $(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : [(\iota x)(\psi x)] . f\{c, \ (\iota x)(\psi x)\}$,

o que, ao eliminar $(\iota x)(\psi x)$, se torna

(4) $(\exists c) :. \phi x . \equiv_x . x = c :. (\exists d) : \psi x . \equiv_x . x = c : f(c, d)$,

e a mesma proposição se resulta se, em (1), nós eliminarmos primeiro $(\iota x)(\psi x)$ e depois, $(\iota x)(\phi x)$. Similarmente, (2) se torna, quando $(\iota x)(\phi x)$ e $(\iota x)(\psi x)$ são eliminados,

(5) $(\exists d) :. \psi x . \equiv_x . x = d :. (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : f(c, d)$.

(4) e (5) são equivalentes, de maneira que o valor-verdade de uma proposição contendo duas descrições é independente da pergunta sobre qual delas tem o maior escopo.

Será visto que, na maioria dos casos em que descrições ocorrem, seu escopo é, na prática, a menor proposição enclausurada por pontos ou outros parênteses em que elas estão contidas. Então, por exemplo,

$$[(\iota x)(\phi x)]: \psi(\iota x)(\phi x). \supset. [(\iota x)(\phi x). \chi(\iota x)(\phi x)]$$

ocorrerá bem mais frequentemente que

$$[(\iota x)(\phi x)]: \psi(\iota x)(\phi x). \supset. \chi(\iota x)(\phi x).$$

Por este motivo, é conveniente decidir que, quando o escopo de uma ocorrência de $(\iota x)(\phi x)$ é a menor proposição, enclausurada em pontos ou outros parênteses, na qual a ocorrência em questão está contida, o escopo não precisa ser indicado por "$[(\iota x)(\phi x)]$". Então, por exemplo,

$$p. \supset. a = (\iota x)(\phi x)$$

significará $$p. \supset. [(\iota x)(\phi x)]. a = (\iota x)(\phi x);$$

e $$p. \supset. (\exists a). a = (\iota x)(\phi x)$$

significará $$p. \supset. (\exists a). [(\iota x)(\phi x)]. a = (\iota x)(\phi x);$$

e $$p. \supset. a \neq (\iota x)(\phi x)$$

significará $$p. \supset. [(\iota x)(\phi x)]. \sim\{a = (\iota x)(\phi x)\};$$

mas, $$p. \supset. \sim\{a = (\iota x)(\phi x)\}$$

significará $$p. \supset. \sim\{[(\iota x)(\phi x)]. a = (\iota x)(\phi x)\}.$$

Esta convenção nos permite, na vasta maioria dos casos que na verdade ocorrem, dispensar a indicação explícita do escopo de um símbolo descritivo; e veremos que a convenção está muito de acordo com as convenções tácitas da linguagem ordinária sobre esse assunto. Então, por exemplo, se "$(\iota x)(\phi x)$" é "o tal e tal", "$a \neq (\iota x)(\phi x)$" deve ser lido "a não é o tal e tal", que ordinariamente seria considerada como implicando que "o tal e tal" existe; mas "$\sim\{a = (\iota x)(\phi x)\}$" deve ser lido como "não é verdade que a é o tal e tal", que geralmente seria permitido manter se "o tal e tal" não existisse. A linguagem ordinária é, é claro, bastante solta e flutuante em suas implicações neste assunto; mas sujeita ao requerimento de definição, nossa convenção parece se manter o mais próximo da linguagem ordinária possível.

No caso em que a menor proposição confinada em pontos ou outros parênteses contém duas ou mais descrições, nós assumiremos, na ausência de qualquer indicação do contrário, que a que ocorre tipograficamente antes tem um escopo maior que aquela que ocorre tipograficamente depois. Então,

$$(\iota x)(\phi x) = (\iota x)(x\psi)$$

significará $$(\exists c): \phi x. \equiv_x. x = c: [(\iota x)(\psi x)]. c = (\iota x)(\psi x),$$

enquanto $$(\iota x)(\psi x) = (\iota x)(\phi x)$$

significará $$(\exists d): \psi x. \equiv_x. x = d: [(\iota x)(\phi x)]. (\iota x)(\phi x) = d.$$

É facilmente demonstrável que estas duas proposições são equivalentes.

(2) *Classes*. Os símbolos para classes, como aqueles para descrições, são, em nosso sistema, símbolos incompletos: seus *usos* são definidos, mas eles em si mesmos não são assumidos como significando qualquer coisa. Isto é, os usos de tais símbolos são definidos de maneira que, quando o *definiens* é substituído pelo *definiendum*, não resta mais qualquer símbolo que possa representar uma classe. Então, classes, na medida em que a introduzimos, são meramente conveniências simbólicas ou linguísticas, não objetos genuínos como seus membros são se eles forem indivíduos.

É uma velha disputa se a lógica formal deve se preocupar com intensões ou extensões. Em geral, lógicos cujo treinamento foi principalmente filosófico decidiram por intensões, enquanto aqueles cujo treinamento foi principalmente matemáticos decidiram por extensões. Os fatos parecem ser que, enquanto a lógica matemática requer extensões, lógica filosófica recusa fornecer qualquer coisa exceto intensões. Nossa teoria de classes reconhece e reconcilia estes dois fatos aparentemente opostos, ao mostrar que uma extensão (que é o mesmo que uma classe) é um símbolo incompleto, cujo uso sempre adquire seu significado através de uma referência a uma intensão.

No caso de descrições, foi possível *provar* que elas são símbolos incompletos. No caso de classes, nós não sabemos de nenhuma prova definitiva igual, embora argumentos mais ou menos cogentes poderem ser invocados a partir do antigo problema do Um e dos Muitos.[46] Não é necessário para nossos propósitos, no entanto, asserir dogmaticamente que há tais coisas como classes. É apenas necessário mostrarmos que os símbolos incompletos que introduzimos como representantes das classes produzem todas as proposições em nome das quais as classes podem ser consideradas essenciais. Quando isso for mostrado, o mero princípio da economia de ideias primitivas leva à não introdução de classes exceto como símbolos incompletos.

Para explicar a teoria das classes, é necessário primeiro explicar a distinção entre funções *extensionais* e *intencionais*. Isto é efetivado pelas seguintes definições:

O *valor-verdade* de uma proposição é verdadeiro se ela é verdadeira, e falso se ela for falsa. (Esta expressão é graças a Frege).

Duas proposições são ditas *equivalentes* quando elas têm o mesmo valor-verdade, i.e., quando são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Duas funções proposicionais são *formalmente equivalentes* quando elas são equivalentes para todo argumento possível, i.e., quando qualquer argumento que satisfaz uma satisfaz a outra, e vice-versa. Então, "$\hat{x}$ é um homem" é formalmente

[46] Brevemente, estes argumentos se reduzem ao seguinte: Se há tal objeto como uma classe, ele deve ser em algum sentido *um* objeto. No entanto, é apenas de classes que *muitos* pode ser predicado. Consequentemente, se admitirmos classes como objetos, deveremos supor que o mesmo objeto pode ser tanto um quanto muitos, o que parece ser impossível.

equivalente a "$\hat{x}$ é um bípede implume"; "$\hat{x}$ é um número par primo" é formalmente equivalente a "$\hat{x}$ é idêntico a 2".

Uma função de uma função é chamada *extensional* quando seu valor-verdade com qualquer argumento é o mesmo que com qualquer argumento formalmente equivalente. Isto é, $f(\phi\hat{z})$ é uma função extensional de $\phi\hat{z}$ se, dado que $\psi\hat{z}$ é formalmente equivalente a $\phi\hat{z}$, $f(\phi\hat{z})$ é equivalente a $f(\psi\hat{z})$. Aqui, as variáveis aparentes ϕ e ψ são necessariamente do tipo a partir do qual os argumentos podem ser significativamente fornecidos a f. Não achamos necessidade de usar como variáveis aparentes quaisquer funções de tipos não predicativos; de acordo com a sequência, todas as funções extensionais consideradas são na verdade funções de funções predicativas.[47]

Uma função de uma função é chamada *intensional* quando ela não é extensional.

A natureza e importância da distinção entre funções intensionais e extensionais ficarão mais claras com algumas ilustrações. A proposição "'x é um homem' sempre implica 'x é mortal'" é uma função extensional da função "$\hat{x}$ é um homem", porque podemos substituir "x é um homem" por "x é um bípede implume", ou por qualquer outro enunciado que se aplica aos mesmos objetos aos quais "x é um homem" se aplica, e a nenhum outro. Mas, a proposição "A acredita que 'x é um homem' sempre implica 'x é mortal'" é uma função intensional de "$\hat{x}$ é um homem", porque A pode nunca ter considerado a questão sobre se bípedes implumes são mortais, ou pode acreditar erroneamente que há bípedes implumes que não são mortais. Então, mesmo se "x é um bípede implume" é formalmente equivalente a "x é um homem", não se segue, de forma alguma, que uma pessoa que acredita que todos os homens são mortais deve acreditar que todos os bípedes implumes são mortais, uma vez que ela pode nunca pensar sobre bípedes implumes, ou ter suposto que bípedes implumes nem sempre fossem homens. Novamente, a proposição "o número de argumentos que satisfaz a função $\phi!\hat{z}$ é n" é uma função extensional de $\phi!\hat{z}$, porque sua verdade ou falsidade não se modifica se substituirmos $\phi!\hat{z}$ por qualquer outra função que é verdadeira sempre que $\phi!\hat{z}$ for verdadeira, e falsa sempre que $\phi!\hat{z}$ for falso. Mas, a proposição "A assere que o número de argumentos que satisfaz $\phi!\hat{z}$ é n" é uma função intensional de $\phi!\hat{z}$, uma vez que, se A assere isso em relação a $\phi!\hat{z}$, ele certamente não pode asserir isso em relação a todas as funções predicativas que são equivalentes a $\phi!\hat{z}$, porque a vida é muito curta. Novamente, considere a proposição "dois homens brancos afirmam ter chegado ao Polo Norte". Esta proposição diz "dois argumentos satisfazem a função '$\hat{x}$ é um homem branco que afirma ter alcançado o Polo Norte'". A verdade ou falsidade desta proposição não é afetada se

[47] Cf. p. 53.

substituirmos "$\hat{x}$ é um homem branco que afirma ter chegado ao Polo Norte" por qualquer outro enunciado que vale para os mesmos argumentos, e para nenhum outro. Consequentemente, essa é uma função extensional. Mas a proposição "é uma estranha coincidência que dois homens brancos afirmem terem chegado ao Polo Norte", que afirma "é uma estranha coincidência que dois argumentos satisfaçam a função '$\hat{x}$ é um homem branco que afirma ter chegado ao Polo Norte'", não é equivalente a "é uma estranha coincidência que dois argumentos satisfaçam a função '$\hat{x}$ é Dr Cook ou Comandante Peary'". Então, "é uma estranha coincidência que $\phi ! \hat{x}$ seja satisfeito por dois argumentos" é uma função intensional de $\phi ! \hat{x}$.

As instâncias acima ilustram o fato de que funções de funções com as quais a matemática está especialmente preocupada são extensionais, e que funções intensionais de funções apenas ocorrem onde ideias não matemáticas são introduzidas, como a que alguém acredita ou afirma algo, ou as emoções suscitadas por algum fato. Consequentemente, é natural, em uma lógica matemática, colocar estresse especial em funções *extensionais* de funções.

Quando duas funções são formalmente equivalentes, podemos dizer que elas *têm a mesma extensão*. Nesta definição, estamos de acordo com o uso. Nós não assumimos que há uma tal coisa como uma extensão: nós meramente definimos a frase "ter a mesma extensão". Podemos agora dizer que uma função extensional de uma função é uma cuja verdade ou falsidade depende apenas da extensão de seu argumento. Em tal caso, é conveniente considerar o enunciado em questão como sendo sobre a extensão. Uma vez que funções extensionais são muitas e importantes, é natural considerar a extensão como um objeto, chamado de *classe*, que deve ser o assunto de todos os enunciados equivalentes sobre várias funções formalmente equivalentes. Então, por exemplo, se dissermos "houve doze Apóstolos", é natural considerar este enunciado como atribuindo a propriedade de ser doze a uma certa coleção de homens, a saber, aqueles que foram Apóstolos, em vez de atribuir a propriedade de ser satisfeito por doze argumentos à função "$\hat{x}$ for um Apóstolo". Esta visão é encorajada pelo sentimento de que há algo que é idêntico no caso de duas funções que "têm a mesma extensão". E se tomarmos tais simples problemas como "quantas combinações podem ser feitas com n coisas?", parecerá à primeira vista necessário que cada "combinação" seja um único objeto que pode ser contado como um. Isso, no entanto, certamente não é necessário tecnicamente, e nós não vemos razão para suportar que isso é verdadeiro filosoficamente. O procedimento técnico pelo qual a aparente dificuldade é superada é como se segue.

Vimos que uma função extensional de uma função pode ser considerada como uma função da classe determinada pela função-argumento, mas que uma função intensional não pode ser considerada assim. Para evitar a necessidade de dar tratamento diferente a funções intensionais e extensionais de funções, nós construímos uma função extensional derivada de qualquer função de uma função predicativa $\psi ! \hat{z}$, e tendo a propriedade de ser equivalente à função da qual ela é derivada, dado que esta função é extensional, bem como a propriedade de ser significante com qualquer argumento $\phi \hat{z}$ cujos argumentos são do mesmo tipo que aqueles de $\psi ! \hat{z}$. A função derivada, escrita "$f\{z(\phi \hat{z})\}$", é definida como se segue: Dada a função $f(\psi ! \hat{z})$, nossa função derivada deve ser "há uma função predicativa que é formalmente equivalente a $\phi \hat{z}$ e satisfaz f". Se $\phi \hat{z}$ é uma função predicativa, nossa função derivada será verdadeira sempre que $f(\phi \hat{z})$ for verdadeiro. Se $f(\phi \hat{z})$ for uma função extensional e $\phi \hat{z}$ for uma função predicativa, nossa função não será verdadeira a não ser que $f(\phi \hat{z})$ seja verdadeiro; então, neste caso, nossa função derivada é equivalente a $f(\phi \hat{z})$. Se $f(\phi \hat{z})$ não é uma função extensional, e se $\phi \hat{z}$ for uma função predicativa, nossa função derivada pode às vezes ser verdadeira quando a função original for falsa. Mas, em qualquer caso, a função derivada é sempre extensional.

Para que a função derivada seja significante para qualquer proposição $\phi \hat{z}$, de qualquer ordem, dado que ela toma argumentos do tipo correto, é necessário e suficiente que $f(\psi ! \hat{z})$ seja significante, onde $\psi ! \hat{z}$ é qualquer função *predicativa*. A razão disso é que nós requeremos, em relação a um argumento $\phi \hat{z}$, a hipótese de que ele seja formalmente equivalente a alguma função predicativa $\psi ! \hat{z}$, e a equivalência formal tem o mesmo tipo de ambiguidade sistemática que o tipo que pertence à verdade e falsidade, e pode, portanto, manter entre funções de quaisquer duas ordens diferentes, dado que as funções tomam argumentos do mesmo tipo. Então, por meios da nossa função derivada, nós não apenas fornecemos funções extensionais em todo lugar no lugar de funções intensionais, mas nós *praticamente* removemos a necessidade de considerar diferenças de tipo entre funções cujos argumentos são do mesmo tipo. Isso efetiva o mesmo tipo de simplificação em nossa hierarquia que resultaria de nunca ter considerado qualquer coisa além de funções predicativas.

Se $f(\psi ! \hat{z})$ pode ser construído por meio das ideias primitivas de disjunção, negação, $(x) . \phi x$ e $(\exists x) . \phi x$, como no caso de todas as funções de funções que ocorrem explicitamente no presente trabalho, encontraremos que em virtude da ambiguidade sistemática das ideias primitivas acima, qualquer função $\phi \hat{z}$ cujos argumentos são do mesmo tipo que aqueles de $\psi ! \hat{z}$ pode significantemente ser substituída por $\psi ! \hat{z}$ em f sem qualquer outra alteração simbólica. Então, em tal caso, o que é simbolicamente, apesar de não realmente, a mesma função f pode receber como argumentos funções de vários tipos diferentes. Se, dado um argumento $\phi \hat{z}$, a função $f(\phi \hat{z})$, como interpretada, é equivalente a $f(\psi ! \hat{z})$ sempre que $\psi ! \hat{z}$ é formalmente equivalente a $\phi \hat{z}$, então $f\{z(\phi \hat{z})\}$ é equivalente a $f(\phi \hat{z})$, dado que há qualquer função predicativa formalmente equivalente a $\phi\hat{z}$. Neste ponto, nós fazemos uso do axioma da redutibilidade, de acordo com o qual sempre há uma função predicativa formalmente equivalente a $\phi\hat{z}$.

Como fora explicado acima, é conveniente considerar uma função extensional de uma função como tendo como seus argumentos não a função, mas a classe determinada pela função. Consequentemente, se nossa função original fosse $f(\psi!\,\hat{z})$, escreveríamos a função derivada $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, onde "$\hat{z}(\phi z)$" pode ser lido como "a classe de argumentos que satisfazem $\phi\hat{z}$", ou, mais simplesmente, "a classe determinada por $\phi\hat{z}$". Então, "$f\{\hat{z}(\phi z)\}$" significará: "Há uma função predicativa $\psi!\,\hat{z}$ que é formalmente equivalente a $\phi\hat{z}$ e é tal que $f(\psi!\,\hat{z})$ é verdadeiro". Esta é, na realidade, uma função de $\phi\hat{z}$,mas nós a tratamos simbolicamente como se ela tivesse um argumento $\hat{z}(\phi z)$. Pela ajuda do axioma da redutibilidade, achamos que as propriedades usuais de classes resultam. Por exemplo, duas funções formalmente equivalentes determinam a mesma classe e, inversamente, duas funções que determinam a mesma classe são formalmente equivalentes. Também, dizer que x é um membro de $\hat{z}(\phi z)$, i.e., da classe determinada por $\phi\hat{z}$, é verdadeiro quando ϕx é verdadeiro, e falso quando ϕx é falso. Então, todos os propósitos matemáticos para os quais as classes possam ser requeridas são atendidos pelos objetos puramente simbólicos $\hat{z}(\phi z)$, dado que assumamos o axioma da redutibilidade.

Em virtude do axioma da redutibilidade, se $\phi\hat{z}$ é qualquer função, há uma função predicativa equivalente $\psi!\,\hat{z}$, de maneira que toda classe pode ser definida por uma função *predicativa*. Consequentemente, a totalidade das *classes* para as quais um dado termo pode significantemente ser dito pertencente ou não é uma totalidade legítima, apesar de a totalidade de *funções* para as quais se pode significantemente dizer que um dado termo satisfaz ou não é uma totalidade ilegítima. As classes para as quais um dado termo a pertence ou não pertence são as classes definidas por funções-a elas também são classes definidas por funções-a predicativas. Chamemo-a de classes-a. Então, "classes-a" formam uma totalidade legítima, derivada daquela das funções-a predicativas. Consequentemente, vários tipos de enunciados gerais tornam-se possíveis, o que de outra forma envolveria paradoxos círculo-viciosos. Estes enunciados gerais não são aqueles que levam a contradições, e muitos deles são difíceis de serem considerados ilegítimos. O fato de que eles se tornaram possíveis pelo axioma da redutibilidade, e de que eles seriam de outra maneira excluídos pelo princípio do círculo-vicioso, deve ser considerado como um argumento em favor do axioma da redutibilidade.

A definição acima de "a classe definida pela função $\phi\hat{z}$", ou melhor, de qualquer proposição na qual esta expressão ocorre, é, em símbolos, como se segue:

$$f\{\hat{z}(\phi z)\}. =: (\exists\psi): \phi x. \equiv_x. \psi!\, x: f\{\psi!\, \hat{z}\} \text{ Df.}$$

Para recomendar esta definição, enumeraremos cinco requisitos que uma definição de classes deve satisfazer, e então mostraremos que a definição acima satisfaz estes cinco requisitos.

Requeremos de classes, se elas forem servir aos propósitos para os quais elas são comumente empregadas, que elas tenham certas propriedades, que podem ser enumeradas como se segue. (1) Toda função proposicional deve determinar uma classe, que pode ser considerada como a coleção dos argumentos que satisfazem a função em questão. Este princípio deve manter quando a função é satisfeita por um número infinito de argumentos bem como quando ela é satisfeita por um número finito. Ele também deve valer quando nenhum argumento satisfaz a função; i.e., a "classe-nula" deve ser uma classe como qualquer outra. (2) Duas funções proposicionais que são formalmente equivalentes, i.e., tais que qualquer argumento que satisfaz qualquer uma delas também satisfaz a outra, devem determinar a mesma classe; isto é, a classe deve ser algo completamente determinada por seus membros [*membership*], de maneira que, por exemplo, a classe "bípedes implumes" seja idêntica à classe "homens", e a classe "primos pares" seja idêntica à classe "números idênticos a 2". (3) Inversamente, duas funções proposicionais, que determinam a mesma classe devem ser formalmente equivalentes; em outras palavras, quando uma classe é dada, seus membros [*membership*] são determinados: dois conjuntos diferentes de objetos não podem produzir a mesma classe. (4) No mesmo sentido em que há classes (qualquer que seja este sentido), ou em algum sentido bastante análogo deve haver também classes de classes. Então, por exemplo. "as combinações de n coisas m em um tempo", onde as n coisas formam uma dada classe, é uma classe de classes; cada combinação de m coisas é uma classe, e cada tal classe é um membro do conjunto especificado de combinações, conjunto tal que é, portanto, uma classe cujos membros são classes. Novamente, a classe de classes unitárias, ou de pares, é absolutamente indispensável; a primeira é o número 1, a segunda, o número 2. Então, sem classes de classes, a aritmética se torna impossível. (5) Deve ser, sob quaisquer circunstâncias, sem sentido supor uma classe idêntica com um de seus membros. Pois, se tal suposição tivesse qualquer significado, "$\alpha \in \alpha$" seria uma função proposicional significante[48], assim como "$\alpha \sim\in \alpha$". Consequentemente, por (1) e (4), haveria uma classe das classes satisfazendo a função "$\alpha \sim\in \alpha$". Se chamarmos esta classe de κ, nós teremos

$$\alpha \in \kappa. \equiv_\alpha. \alpha \sim\in \alpha.$$

Uma vez que, por nossa hipótese, "$\kappa \in \kappa$" é suposta significante, a equivalência acima, que vale para todos os valores possíveis de α, vale para o valor κ, i.e.,

$$\kappa \in \kappa. \equiv. \kappa \sim\in \kappa.$$

[48] Como explicado no Capítulo I (p. 25), "$x \in \alpha$" significa "x é um membro da classe α", ou, mais brevemente, "x é um ". A definição dessa expressão em termos da nossa teoria de classes será dada em breve.

Mas isso é uma contradição.[49] Consequentemente, "$\alpha \epsilon \alpha$" e "$\alpha \sim\epsilon \alpha$" deve sempre ser sem significado. Em geral, não há nada surpreendente sobre esta conclusão, mas ela tem duas consequências que merecem atenção especial. Em primeiro lugar, uma classe consistindo apenas de um membro não deve ser idêntico a aquele membro, *i.e.*, não podemos ter $\iota' x = x$. Pois, se tivéssemos $x \epsilon \iota' x$, e, portanto, se $x = \iota' x$, teríamos $\iota' x \epsilon \iota' x$, o que, como vimos, deve ser sem sentido. Segue-se que "$x = \iota' x$" deve ser absolutamente sem sentido, não simplesmente falso. Em segundo lugar, pode parecer que a classe de todas as classes é uma classe, *i.e.*, que (escrevendo "Cls" para "classe") "$Cls \epsilon Cls$" é uma proposição verdadeira. Mas esta combinação de símbolos deve ser sem sentido; a menos, de fato, que haja uma ambiguidade no significado de "Cls", de maneira que, em "$Cls \epsilon Cls$", o primeiro "Cls" possa ter um significado diferente do segundo.

Em relação aos requisitos acima, é claro, para começar, que, de acordo com a nossa definição, toda função proposicional $\phi \hat{z}$ determina uma classe $\hat{z}(\phi z)$. Assumindo o axioma da redutibilidade, deve haver sempre proposições verdadeiras sobre $\hat{z}(\phi z)$, *i.e.*, proposições verdadeiras da forma $f\{\hat{z}(\phi z)\}$. Pois, suponha que $\phi \hat{z}$ é formalmente equivalente a $\psi ! \hat{z}$, e suponha que $\psi ! \hat{z}$ satisfaz alguma função f. Então, $\hat{z}(\phi z)$ também satisfaz f. Consequentemente, dada qualquer função $\phi \hat{z}$, há proposições verdadeiras da forma $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, *i.e.*, proposições verdadeiras nas quais "a classe determinada por $\phi \hat{z}$" é gramaticalmente o sujeito. Isso mostra que nossa definição satisfaz o primeiro dos nossos cinco requisitos.

O segundo e terceiro requisitos juntos demandam que as classes $\hat{z}(\phi z)$ e $\hat{z}(\psi z)$ sejam idênticas quando, e apenas quando, suas funções definidoras forem formalmente equivalentes, *i.e.*, que tenhamos

$$\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \equiv : \phi x . \equiv_x . \psi x.$$

Aqui, o significado de "$\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z)$" deve ser derivado, por meio de uma aplicação dupla da definição de $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, da definição de

$$\text{“}\chi ! \hat{z} = \theta ! \hat{z}\text{”},$$

que é
$$\chi ! \hat{z} = \theta ! \hat{z} . = : (f) : f ! \chi ! \hat{z} . \supset . f ! \theta ! \hat{z} \quad \text{Df}$$

pela definição geral de identidade.

Ao interpretar "$\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z)$", adotaremos a convenção que adotamos em relação a $(\iota x)(\phi x)$ e $(\iota x)(\psi x)$, a saber, que o símbolo incompleto que ocorre primeiro deve ter escopo maior. Então, $\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z)$ se torna, pela nossa definição,

[49] Esta é a segunda das contradições discutidas ao fim do Capítulo II.

$$(\exists\chi): \phi x. \equiv_x. \chi! x: \chi! \hat{z} = \hat{z}(\psi z),$$

que, ao eliminar $\hat{z}(\psi z)$, se torna

$$(\exists\chi):. \phi x. \equiv_x. \chi! x:. (\exists\theta): \psi x. \equiv_x. \theta! x: \chi! \hat{z} = \theta! \hat{z},$$

que é equivalente a

$$(\exists\chi, \theta): \phi x. \equiv_x. \chi! x: \psi x. \equiv_x. \theta! x: \chi! \hat{z} = \theta! \hat{z},$$

que, novamente, é equivalente a

$$(\exists\chi): \phi x. \equiv_x. \chi! x: \psi x. \equiv_x. \chi! x,$$

que, em virtude do axioma da redutibilidade, é equivalente a

$$\phi x. \equiv_x. \psi x.$$

Então, nossa definição do uso de $\hat{z}(\phi z)$ é tal que satisfaz as condições (2) e (3) que enunciamos para classes, i.e., nós temos

$$\vdash:. \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z). \equiv_x: \phi x. \equiv_x. \psi x.$$

Antes de considerarmos classes de classes, será bom definir pertencimento a uma classe [*membership of a class*], i.e., definir o símbolo "$x \epsilon \hat{z}(\phi z)$", que pode ser lido como "x é um membro da classe determinada por $\phi\hat{z}$". Uma vez que esta é uma função da forma $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, ela deve ser derivada, por meio das nossas definições gerais de tais funções, da função correspondente $f\{\psi! \hat{z}\}$. Portanto, nós temos

$$x \epsilon \psi! \hat{z}. =. \psi! x \text{ Df.}$$

Esta definição é apenas necessária para dar significado a "$x \epsilon \hat{z}(\phi z)$"; o significado que ele dá é, em virtude da definição de $f\{\hat{z}(\phi z)\}$,

$$(\exists\psi): \phi y. \equiv_y. \psi! y: \psi! x.$$

Parece, então, que "$x \epsilon \hat{z}(\phi z)$" implica ϕx, uma vez que ele implica $\psi! x$ e $\psi! x$ é equivalente a ϕx; também, em virtude do axioma da redutibilidade, ϕx implica "$x \epsilon \hat{z}(\phi z)$", uma vez que há uma função predicativa ψ formalmente equivalente a ϕ, e x deve satisfazer ψ, uma vez que x (*ex hypothesi*) satisfaz ϕ. Então, em virtude do axioma da redutibilidade, nós temos

$$\vdash: x \epsilon \hat{z}(\phi z). \equiv_x. \phi x,$$

i.e., x é um membro da classe $\hat{z}(\phi z)$ quando, e apenas quando, x satisfaz a função ϕ que define a classe.

Temos de considerar a seguir como interpretar uma classe de classes. Conforme definimos $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, consideraremos naturalmente uma classe de classes como consistindo naqueles valores de $\hat{z}(\phi z)$ que satisfazem $f\{\hat{z}(\phi z)\}$. Escrevamos α para

$\hat{z}(\phi z)$; então, podemos escrever $\hat{\alpha}(f\alpha)$ para a classe de valores de α que satisfazem $f\alpha$.[50] Aplicaremos a mesma definição, e teremos

$$F\{\hat{\alpha}(f\alpha)\}. =: (\exists g): f\beta. \equiv_{\beta}. g!\,\beta: F\{g!\,\hat{\alpha}\} \text{ Df},$$

onde "β" significa qualquer expressão da forma $\hat{z}(\psi!\,z)$.

Tomemos "$\gamma \in \hat{\alpha}(f\alpha)$" como sendo uma instância de $F\{\hat{\alpha}(f\alpha)\}$. Então,

$$\vdash :. \gamma \in \hat{\alpha}(f\alpha). \equiv : (\exists g): f\beta. \equiv_{\beta}. g!\,\beta: \gamma \in g!\,\hat{\alpha}.$$

Assim como nós temos $\quad x \in \psi!\,\hat{z}. =. \psi!\,x$ Df,

também temos $\quad \gamma \in g!\,\hat{\alpha}. =. g!\,\gamma$ Df.

Então, encontramos

$$\vdash :. \gamma \in \hat{\alpha}(f\alpha). \equiv : (\exists g): f\beta. \equiv_{\beta}. g!\,\beta: g!\,\gamma.$$

Se nós agora estendermos o axioma da redutibilidade de maneira que ele se aplique a funções de funções, *i.e.*, se assumirmos

$$(\exists g): f(\psi!\,\hat{z}). \equiv_{\psi}. g!\,(\psi!\,\hat{z}),$$

nós facilmente deduzimos

$$\vdash : (\exists g): f\{\hat{z}(\psi!\,z)\}. \equiv_{\psi}. g!\,\{\hat{z}(\psi!\,z)\},$$

i.e., $\quad \vdash : (\exists g): f\beta. \equiv_{\beta}. g!\,\beta.$

Então, $\quad \vdash : \gamma \in \hat{\alpha}(f\alpha). \equiv. f\gamma.$

Assim, toda função que pode tomar classes como argumentos, *i.e.*, toda função de funções, determina uma classe de classes, cujos membros são aquelas classes que satisfazem a função determinante. Então, a teoria das classes de classes não oferece dificuldade.

A seguir, temos que considerar nosso quinto requisito, a saber, que "$\hat{z}(\phi z) \in \hat{z}(\phi z)$" não pode ter significado. Aplicando nossa definição de $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, encontramos que se esta coleção de símbolos tivesse um significado, ela significaria

$$(\exists \psi): \phi x. \equiv_{x}. \psi!\,x: \psi!\,\hat{z} \in \psi!\,\hat{z},$$

i.e., em virtude da definição

$$x \in \psi!\,\hat{z}. =. \psi!\,x \text{ Df},$$

isso significaria $(\exists \psi): \phi x. \equiv_{x}. \psi!\,x: \psi!\,(\psi!\,\hat{z})$.

Mas, aqui, o símbolo "$\psi!\,(\psi!\,\hat{z})$" ocorre, o que atribui uma função como argumento de si mesma. Tal símbolo é sempre sem sentido, pelas razões explicadas no começo

[50] O uso de uma única letra, como ou , para representar uma classe variável, será explicado mais detalhadamente em breve.

do Capítulo II (pp. 38 – 41). Consequentemente, "$\hat{z}(\phi z) \in \hat{z}(\phi z)$" é sem sentido, e o quinto e último requisito é cumprido.

Como no caso de $f(\iota x)(\phi x)$, assim como no de $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, há uma ambiguidade quanto ao escopo de $\hat{z}(\phi z)$ se isso ocorrer em uma proposição que é ela própria parte de uma proposição maior. Mas no caso de classes, uma vez que sempre temos o axioma da redutibilidade, a saber

$$(\exists\psi) : \phi x . \equiv_x . \psi ! x,$$

que toma o lugar de $E!(\iota x)(\phi x)$, segue-se que o valor-verdade de qualquer proposição em que $\hat{z}(\phi z)$ ocorre é o mesmo independentemente do escopo que nós dermos a $\hat{z}(\phi z)$, dado que a proposição é uma função extensional de quaisquer funções que ela possa conter. Consequentemente, podemos adotar a convenção de que o escopo deve ser sempre a menor proposição enclausurada por pontos ou colchetes (*brackets*) em que $\hat{z}(\phi z)$ ocorre. Se a qualquer momento um escopo maior é requerido, podemos indicar isso por "$[\hat{z}(\phi z)]$", seguido por pontos, da mesma maneira que fizemos para $[(\iota x)(\phi x)]$.

Similarmente, quando dois símbolos de classes ocorrem, por exemplo, em uma proposição da forma $f\{\hat{z}(\phi z), \hat{z}(\psi z)\}$, não precisamos nos lembrar das regras para os escopos dos dois símbolos, uma vez que todas as escolhas dão resultados equivalentes, como é fácil de se provar. Para as proposições preliminares, uma regra é desejável, então nós podemos decidir que o símbolo de classe que ocorre primeiro na ordem de escrita deve ter o maior escopo.

A representação de uma classe por uma única letra α pode agora ser entendida. Pois, a denotação de α é ambígua, na medida em que está indecisa quanto a qual dos símbolos, $\hat{z}(\phi z)$, $\hat{z}(\psi z)$, $\hat{z}(\chi z)$, etc. ela significa, onde ϕx, ψx, χx etc, são várias funções determinantes da classe. De acordo com a escolha feita, proposições diferentes resultam. Mas, todas as proposições resultantes são equivalentes em virtude da proposição facilmente provada:

$$\text{"}\vdash : \phi x \equiv_x \psi x . \supset . f\left\{\hat{z}(\phi z)\right\} \equiv f\{\hat{z}(\psi z)\}\text{".}$$

Consequentemente, a menos que desejemos discutir sobre a própria função determinante, de maneira que a noção de uma classe não esteja de fato devidamente presente, a ambiguidade na denotação de α é inteiramente imaterial, apesar de, como veremos imediatamente, nós sermos levados a nos limitarmos a funções determinantes predicativas. Então, "$f(\alpha)$", onde α é uma classe variável, é de fato "$f\{\hat{z}(\phi z)\}$", onde ϕ é uma função variável, isto é, é

$$\text{"}(\exists\psi) . \phi x \equiv_x \psi ! x . f\{\psi ! \hat{z}\}\text{",}$$

onde ϕ é uma função variável. Mas, aqui, surge uma dificuldade que é removida por uma limitação à nossa prática e pelo axioma da redutibilidade. Pois, as funções determinantes ϕz, ψz, etc. serão de tipos diferentes, apesar de o axioma da redutibilidade assegurar que algumas são funções predicativas. Então, ao interpretar α como uma variável em termos da variação de qualquer função determinante, nós seremos levados a erros a menos que nos confinemos a funções determinantes predicativas. Estes erros surgem especialmente na transição à variação total (cf. pp. 15, 16). Em conformidade,

$$f\alpha \; =. \; (\exists\psi). \; \phi! \, x \equiv_x \psi! \, x. \, f\{\psi! \, \hat{z}\} \text{ Df.}$$

É a peculiaridade de uma definição do uso de uma única letra [por exemplo, α] para uma variável incompleta que ela, embora de certa forma uma variável real, ocorre apenas no *definiendum*, enquanto "ϕ", apesar de ser uma variável real, ocorre apenas no *definiens*.

Então, "$f\hat{\alpha}$" significa

$$\text{“}(\exists\psi). \; \hat{\phi}! \, x \equiv_x \psi! \, x. \, f\{\psi! \, \hat{z}\}\text{”,}$$

e "$(\alpha) f\alpha$" significa

$$\text{“}(\phi) \colon (\exists\psi). \; \phi! \, x \equiv_x \psi! \, x. \, f\{\psi! \, \hat{z}\})\text{”.}$$

Da mesma forma, no raciocínio matemático, podemos dispensar todo o aparato de funções e pensar apenas em classes como "quasi-coisas", capazes de representação imediata por um único nome. As vantagens são duas: (1) classes são determinadas por seus membros [*membership*], de maneira que para um conjunto de membros há uma classe, (2) o "tipo" de uma classe é inteiramente determinado por seus membros.

Ainda, uma função predicativa de uma classe por ser definida desta forma

$$f! \, \alpha \; =. \; (\exists\psi). \; \phi! \, x \equiv_x \psi! \, x. \, f! \, \{\psi! \, \hat{z}\} \text{ Df.}$$

Então, uma função predicativa de uma classe é sempre uma função predicativa de qualquer função predicativa determinante da classe, apesar de o inverso não valer.

(3) *Relações*. No que diz respeito às relações, nós temos uma teoria estritamente análoga àquela que acabamos de explicar em relação a classes. Relações em extensão, como classes, são símbolos incompletos. Requeremos uma divisão de funções de duas variáveis em funções predicativas e não predicativas, novamente por motivos que serão explicados no Capítulo II. Nós usamos a notação "$\phi! \, (x, y)$" para uma função *predicativa* de x e y.

Nós usamos "$\phi! \, (\hat{x}, \hat{y})$" para a função, em oposição a seus valores; e usamos "$\hat{x}\hat{y}\phi(x, y)$" para a relação (em extensão) determinada por $\phi(x, y)$. Temos, então

$$f\left\{\hat{x}\hat{y}\phi(x, y)\right\}. =\colon (\exists\psi) \colon \phi(x, y). \equiv_{x,y}. \; \psi! \, (x, y) \colon f\{\psi! \, (\hat{x}, \hat{y})\} \text{ Df.}$$

Então, mesmo quando $f\{\psi!(\hat{x},\hat{y})\}$ não for uma função extensional de ψ, $f\{\hat{x}\hat{y}\phi(x,y)\}$ *é* uma função extensional de ϕ. Consequentemente, como no caso de classes, nós deduzimos

$$\vdash :. \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) . \equiv : \phi(x,y) . \equiv_{x,y} . \psi(x,y),$$

i.e., uma relação é determinada por sua extensão, e vice-versa.

Em analogia à definição de "$x \in \psi!\hat{z}$", temos

$$x\{\psi!(\hat{x},\hat{y})\}y . = . \psi!(x,y) \text{ Df.}$$[51]

Esta definição, como aquela de "$x \in \psi!\hat{z}$", não é introduzida por si só, mas para dar significado a

$$x\{\hat{x}\hat{y}\phi(x,y)\}y.$$

Este significado, em virtude de nossas definições, é

$$(\exists\psi) : \phi(x,y) . \equiv_{x,y} . \psi!(x,y) : x\{\psi!(\hat{x},\hat{y})\}y,$$

i.e.,
$$(\exists\psi) : \phi(x,y) . \equiv_{x,y} . \psi!(x,y) : \psi!(x,y),$$

e isso, em virtude do axioma da redutibilidade,

$$\text{“}(\exists\psi) : \phi(x,y) . \equiv_{x,y} . \psi!(x,y)\text{”},$$

é equivalente a
$$\phi(x,y).$$

Então, nós temos sempre

$$\vdash : x\{\hat{x}\hat{y}\phi(x,y)\}y . \equiv . \phi(x,y).$$

Sempre que a função determinante de uma relação não for relevante, poderemos substituir $\hat{x}\hat{y}\phi(x,y)$ por uma única letra minúscula. Em virtude da proposição dada acima,

$$\vdash :. R = S . \equiv : xRy . \equiv_{x,y} . xSy,$$

$$\vdash :. R = \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) . \equiv : xRy . \equiv_{x,y} . \phi(x,y),$$

e
$$\vdash . R = \hat{x}\hat{y}(xRy).$$

Classes de relações, e relações de relações, podem ser lidadas como classes de classes foram lidadas acima.

Assim como uma classe não deve ser capaz de ser ou não ser um membro de si mesma, uma relação também não pode ser ou não ser referente ou relacionado a si mesma. Isso acaba por ser equivalente à asserção de que $\phi!(\hat{x},\hat{y})$ não pode significantemente ser nenhum dos argumentos x ou y em $\phi!(x,y)$. Este princípio, novamente, resulta da limitação a argumentos possíveis a uma função explicada no começo do Capítulo II.

---

[51] Esta definição traz certas questões como os dois sentidos de uma relação, que serão lidados em *21.

Podemos resumir toda esta discussão sobre símbolos incompletos como se segue.

O uso do símbolo "$(\iota x)(\phi x)$", como se em "$f(\iota x)(\phi x)$" ele representasse *diretamente* um argumento para a função $f\hat{z}$ é entregue pelos teoremas

$\vdash :. E!\,(\iota x)(\phi x). \supset : (x). fx. \supset . f(\iota x)(\phi x)$,

$\vdash : (\iota x)(\phi x) = (\iota x)(\psi x). \supset . f(\iota x)(\phi x) \equiv (\iota x)(\psi x)$,

$\vdash : E!\,(\iota x)(\phi x). \supset . (\iota x)(\phi x) = (\iota x)(\phi x)$,

$\vdash : (\iota x)(\phi x) = (\iota x)(\psi x). \equiv . (\iota x)(\psi x) = (\iota x)(\phi x)$,

$\vdash : (\iota x)(\phi x) = (\iota x)(\psi x). (\iota x)(\psi x) = (\iota x)(\chi x). \supset . (\iota x)(\phi x) = (\iota x)(\chi x)$.

O uso do símbolo "$\hat{x}(\phi x)$" (ou de uma única letra, como α, para representar tal símbolo) como se, em "$f\{\hat{x}(\phi x)\}$", ele representasse *diretamente* um argumento α para uma função $f\alpha$, se torna possível pelos teoremas

$\vdash : (\alpha). f\alpha. \supset . f\{\hat{x}(\phi x)\}$,

$\vdash : \hat{x}(\phi x) = \hat{x}(\psi x). \supset . f\left\{\hat{x}(\phi x)\right\} \equiv f(\hat{x}(\psi x))$,

$\vdash . \hat{x}(\phi x) = \hat{x}(\phi x)$,

$\vdash : \hat{x}(\phi x) = \hat{x}(\psi x). \equiv . \hat{x}(\psi x) = \hat{x}(\phi x)$,

$\vdash : \hat{x}(\phi x) = \hat{x}(\psi x). \hat{x}(\psi x) = \hat{x}(\chi x). \supset . \hat{x}(\phi x) = \hat{x}(\chi x)$.

Ao longo destas proposições, os tipos devem ser ajustados adequadamente, onde a ambiguidade é possível.

O uso do símbolo "$\hat{x}\hat{y}\phi(x, y)$" (ou de uma única letra, como R, para representar tal símbolo) como se, em "$f\{\hat{x}\hat{y}\phi(x, y)\}$", ele representasse *diretamente* um argumento R para uma função $f\hat{R}$, se torna possível pelos teoremas

$\vdash : (R) : fR. \supset . f\{\hat{x}\hat{y}\phi(x, y)\}$,

$\vdash : \hat{x}\hat{y}\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\psi(x, y). \supset . f\left\{\hat{x}\hat{y}\phi(x, y)\right\} \equiv f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x, y)\}$,

$\vdash . \hat{x}\hat{y}\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\phi(x, y)$,

$\vdash : \hat{x}\hat{y}\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\psi(x, y). \equiv . \hat{x}\hat{y}\psi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\phi(x, y)$,

$\vdash : \hat{x}\hat{y}\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\psi(x, y). \hat{x}\hat{y}\psi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x, y).$
$\supset . \hat{x}\hat{y}\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x, y)$.

Ao longo destas proposições, os tipos devem ser ajustados adequadamente, onde a ambiguidade é possível.

Segue-se destes três grupos de teoremas que estes símbolos incompletos obedecem às mesmas regras formais de identidade como símbolos que representam diretamente objetos, na medida em que nós consideramos apenas a *equivalência* dos valores variáveis (ou constantes) de funções proposicionais resultantes, e não sua identidade. Esta consideração da *identidade* de proposições nunca entra em nosso raciocínio formal.

Similarmente, as *limitações* ao uso destes símbolos podem ser resumidas como se segue. No caso de $(\iota x)(\phi x)$, a principal maneira em que sua incompletude é relevante é que nós nem sempre temos

$$(x). fx. \supset . f(\iota x)(\phi x),$$

i.e., uma função que é sempre verdadeira pode, contudo, não ser verdadeira de $(\iota x)(\phi x)$. Isso é possível porque $f(\iota x)(\phi x)$ não é um valor de $f\hat{x}$, de maneira que mesmo quando todos os valores de $f\hat{x}$ são verdadeiros, $f(\iota x)(\phi x)$ pode não ser verdadeiro. Isso ocorre quando $(\iota x)(\phi x)$ não existe. Então, por exemplo, nós temos $(x). x = x$, mas nós não temos

o quadrado redondo = o quadrado redondo.

A inferência $$(x). fx. \supset . f(\iota x)(\phi x)$$

é válida apenas quando $E!\,(\iota x)(\phi x)$. Assim que soubermos que $E!\,(\iota x)(\phi x)$, o fato de que $(\iota x)(\phi x)$ é um símbolo incompleto se torna irrelevante na medida em que nos confinemos a funções-verdade[52], independentemente de que proposição seja o seu escopo. Mas, mesmo quando $E!\,(\iota x)(\phi x)$, a incompletude de $(\iota x)(\phi x)$ pode ser relevante quando passamos fora de funções-verdade. Por exemplo, George IV queria saber se Scott foi o autor de Waverley, *i.e.*, ele queria saber se a proposição da forma "$c = (\iota x)(\phi x)$" era verdadeira. Mas não há proposição da forma "$c = y$" sobre a qual ele desejava saber se era verdadeira.

Em relação a classes, a relevância de sua incompletude é de alguma forma diferente. Isso pode ser ilustrado pelo fato de nós podermos ter

$$\hat{z}(\phi z) = \psi!\hat{z}.\hat{z}(\phi z) = \chi!\hat{z}$$

sem termos $$\psi!\hat{z} = \chi!\hat{z}.$$

Pois, por uma aplicação direta das definições, nós encontramos que

$$\vdash : \hat{z}(\phi z) = \psi!\hat{z}. \equiv . \phi x \equiv_x \psi! x.$$

Então, teremos

$$\vdash : \phi x \equiv_x \psi! x. \phi x \equiv_x \chi! x. \supset . \hat{z}(\phi z) = \psi!\hat{z}.\hat{z}(\phi z) = \chi!\hat{z},$$

mas, nós não necessariamente teremos $\psi!\hat{z} = \chi!\hat{z}$ em tais circunstâncias, pois, duas funções podem muito bem serem formalmente equivalente sem serem idênticas; por exemplo,

$$x = \text{Scott}. \equiv_x . x = \text{o autor de Waverley},$$

[52] Cf. p. 8.

mas, a função "$\hat{z} =$ o autor de Waverley" tem a propriedade de que George IV queria saber se seu valor com o argumento "Scott" era verdadeira, enquanto que a função "$\hat{z} =$ Scott" não tem esta propriedade e, portanto, as duas funções não são idênticas. Consequentemente, há uma função proposicional, a saber,

$$x = y . x = z . \supset . y = z,$$

que vale sem qualquer exceção, mas que não vale quando substituímos x por uma classe, e y e z por funções. Isso só é possível porque uma classe é um símbolo incompleto, e, portanto, "$\hat{z}(\phi z) = \psi ! \hat{z}$" não é um valor de "$x = y$".

Será observado que "$\theta ! \hat{z} = \psi ! \hat{z}$" não é uma função extensional de $\psi ! \hat{z}$. Então, o escopo de $\hat{z}(\phi z)$ é relevante ao se interpretar o produto

$$\hat{z}(\phi z) = \psi ! \hat{z} . \hat{z}(\phi x) = \chi ! \hat{z}.$$

Se tomarmos todo o produto como o escopo de $\hat{z}(\phi z)$, o produto é equivalente a

$$(\exists \theta) : \phi x \equiv_x \theta ! x . \theta ! \hat{z} = \psi ! \hat{z} . \theta ! \hat{z} = \chi ! \hat{z},$$

e isso *implica* $\psi ! \hat{z} = \chi ! \hat{z}.$

Podemos dizer geralmente que o fato de que $\hat{z}(\phi z)$ é um símbolo incompleto não é relevante contanto que nós nos confinemos a funções extensionais de funções, mas está apto a se tornar relevante para outras funções de funções.

PARTE I

LÓGICA MATEMÁTICA

SUMÁRIO DA PARTE I

Nesta parte, lidaremos com tais tópicos como pertencentes tradicionalmente à lógica simbólica, ou merecendo pertencer a ela em virtude de sua generalidade. Ou seja, estabeleceremos tais propriedades de proposições, funções proposicionais, classes e relações como é provável que seja requerido em qualquer raciocínio matemático, e não meramente neste ou naquele ramo da matemática.

Os assuntos tratados na Parte I pode ser vista em dois aspectos: (1) como uma cadeia dedutiva dependendo de proposições primitivas, (2) como um cálculo formal. Tomando a primeira vista primeiro: Começamos, em $*1$, com certos axiomas quanto a dedução de uma proposição ou de uma função proposicional asserida de outra. Destas proposições primitivas, na Seção A, nós deduzimos várias proposições que se preocupam com quatro maneiras de se obter novas proposições de dadas proposições, a saber, negação, disjunção, asserção conjunta e implicação, das quais as últimas duas podem ser definidas em termos das duas primeiras. Ao longo desta primeira seção, porém, como será mostrado no começo da Seção B, nossas proposições, simbolicamente inalteradas, se aplicarão a quaisquer proposições como valores de nossas variáveis, no entanto, será suposto que nossas proposições variáveis são todas o que nós chamaremos de proposições *elementares*, *i.e.*, tais que não contêm qualquer referência, explícita ou implícita, a qualquer totalidade. Esta restrição é imposta em razão da distinção entre *tipos* diferentes de proposições, explicado no Capítulo II da Introdução. Sua importância e propósito, porém, são puramente filosóficos, e na medida em que apenas propósitos matemáticos são considerados, é necessário lembrar esta restrição preliminar a proposições elementares, que é simbolicamente removida no começo da próxima seção.

A Seção B lida, para começar, com as relações de proposições contendo variáveis aparentes (*i.e.*, envolvendo as noções de "todo" e "algum") entre si e com proposições que não contêm variáveis aparentes. Mostramos que, quando se trata de proposições contendo variáveis aparentes, podemos definir negação, disjunção, asserção conjunta e implicação de tal maneira que suas propriedades sejam exatamente análogas às propriedades das ideias correspondentes aplicadas a proposições elementares. Mostramos também que a *implicação formal*, *i.e.*, "$(x).\,\phi x \supset \psi x$" considerada como uma relação de $\phi\hat{x}$ e $\psi\hat{x}$, tem várias propriedades análogas àquelas da *implicação material*, *i.e.*, "$p \supset q$" considerado como uma relação de p e q. Nós então consideramos funções *predicativas* e o *axioma da redutibilidade*, que são vitais no emprego de *funções* como variáveis aparentes. Um exemplo de tal emprego é oferecido pela *identidade*, que é o próximo tópico considerado na Seção B. Finalmente, esta seção lida com *descrições*, *i.e.*, frases da forma "o tal e tal" (no singular). É mostrado que a aparência do sujeito gramatical "o tal e tal" é ilusória, e que tal proposição, completamente enunciada, não contém sujeito, mas contém, em vez disso, uma variável aparente.

A Seção C lida com classes, e com relações na medida em que elas são análogas a classes. Classes e relações, como descrições, são mostradas serem "símbolos incompletos" (cf. Introdução, Capítulo III), e é mostrado que uma proposição que é gramaticalmente sobre uma classe deve ser considerada como realmente preocupada com uma função proposicional e uma variável aparente cujos valores são funções proposicionais *predicativas* (com um resultado similar para relações). O restante da Seção C lida com o cálculo de classes, e com o cálculo de relações na medida em que ele é análogo ao de classes.

Seção D lida com aquelas propriedades de relações que não têm análogos para classes. Nesta seção, um número de ideias e notações são introduzidos e são constantemente necessários ao longo do resto do trabalho. A maioria das propriedades de relações que têm análogos na teoria das classes são comparativamente não importantes, enquanto aquelas que não têm tais análogos são da maior utilidade. É em parte por esta razão que a ênfase no aspecto de cálculo da lógica simbólica provou ser um obstáculo, até agora, ao desenvolvimento adequado da teoria das relações.

Seção E, finalmente, estende as noções de adição e multiplicação de classes ou relações para casos onde os somandos ou fatores não são dados individualmente, mas são dados como membros de alguma classe. A vantagem obtida por esta extensão é que ela nos permite lidar com um número infinito de somandos ou fatores.

Considerado como um cálculo formal, a lógica matemática tem três ramos análogos, a saber, (1) o cálculo de proposições, (2) o cálculo de classes, (3) o cálculo de relações. Destes, (1) é lidado na Seção A, enquanto (2) e (3), na medida em que eles são análogos, são lidados na Seção C. Nós temos, para cada uma das três, as quatro ideias análogas de negação, adição, multiplicação e implicação ou inclusão. Destas, a negação é análoga à negativa da álgebra ordinária, e a implicação ou inclusão é análoga à relação "menor ou igual a" da álgebra ordinária. Mas a analogia não deve ser pressionada, por ter limitações importantes. A soma de duas proposições é sua disjunção, a soma de duas classes é a classe de termos pertencendo a uma ou a outra, a soma de duas relações é a relação consistindo no fato de que uma ou outra dos dois tipos de relação se mantém. A soma de uma classe de classes é a classe de todos os termos pertencendo a alguma das classes, e a soma de uma classe de relações é a relação consistindo no fato de que alguma das relações da classe vale. O produto de duas proposições é sua asserção conjunta, o produto de duas classes é sua parte comum, o produto de duas relações é a relação que consiste no fato de que ambas as relações valem. O produto de uma classe de classes é a parte comum a todas elas, e o produto de uma classe de relações é a relação consistindo no fato de todas as relações na classe em questão valerem. A inclusão de uma classe em outra consiste no fato de que todos os membros de uma são membros da outra, enquanto a inclusão de uma relação em outra consiste no fato de que cada par de termos que tem uma relação também tem a outra. É então mostrado que as propriedades de negação, adição, multiplicação e inclusão são exatamente análogas para classes e relações, e são, com certas exceções, análogas às propriedades de negação, adição, multiplicação e implicação para proposições. (As exceções surgem principalmente do fato de que "p implica q" é ela própria uma proposição, e pode, portanto, implicar e ser implicada, enquanto "α está contido em β", onde α e β são classes, não é uma classe, e pode, portanto, não conter nem estar contida em outra classe γ). Mas, classes têm certas propriedades não possuídas por proposições: elas surgem do fato de que classes não têm uma divisão *dupla* [*two-fold*] correspondente à divisão de proposições entre verdadeiras e falsas, mas uma divisão *tripla*, a saber, em (1) a classe universal, que contém o todo de um certo tipo, (2) a classe vazia, que não possui membros, (3) todas as outras classes, que nem contém nada nem contém tudo do tipo apropriado. As propriedades de classes resultantes, que não são análogas às propriedades de proposições, são lidadas em ∗24. E, assim como classes têm propriedades não análogas a quaisquer propriedades de proposições, relações têm propriedades não análogas a quaisquer propriedades de classes, apesar de todas as propriedades de classes terem análogos entre as relações. As propriedades especiais de relações são bem mais numerosas e importantes que as propriedades pertencentes a classes, mas não a proposições. Estas propriedades especiais de relações, portanto, ocupam uma seção inteira, a saber, a Seção D.

SEÇÃO A

A TEORIA DA DEDUÇÃO

O propósito da presente seção é estabelecer o primeiro estágio da dedução da matemática pura de suas fundações lógicas. O primeiro estágio está necessariamente preocupado com a dedução em si mesma, *i.e.*, com os princípios pelos quais conclusões são inferidas de premissas. Se é nosso propósito tornar todas as nossas assunções explícitas, e efetuar a dedução de todas as outras proposições destas assunções, é óbvio que as primeiras assunções que precisamos são aquelas que nós requeremos para fazer a dedução possível. A lógica simbólica é frequentemente considerada como consistindo de duas partes coordenadas, a teoria das classes e a teoria das proposições. Mas, do nosso ponto de vista, estas duas partes não são coordenadas; pois, na teoria de classes, nós deduzimos uma proposição de outra por meio de princípios pertencentes à teoria das proposições, enquanto que na teoria das proposições, nós não precisamos da teoria de classes. Consequentemente, em um sistema dedutivo, a teoria de proposições necessariamente precede a teoria das classes.

Mas o assunto a ser tratado no que se segue não é adequadamente descrito como sendo a teoria das *proposições*. É, na verdade, a teoria de como uma proposição pode ser inferida de outra. Agora, para que uma proposição seja inferida de outra, é necessário que ambas se relacionem pela relação que faz uma ser consequência da outra. Quando uma proposição q é uma consequência de uma proposição p, nós dizemos que p *implica* q. Então, dedução depende da relação de *implicação*, e todo sistema dedutivo deve conter entre suas premissas tantas propriedades da implicação quantas são necessárias para legitimar o procedimento ordinário de dedução. Na presente seção, certas proposições serão enunciadas como premissas, e será mostrado que elas são suficientes para todas as formas comuns de inferência. Não será mostrado que elas são todas *necessárias*, e é possível que o número delas possa ser diminuído. Tudo o que é afirmado em relação às premissas é (1) que elas são verdadeiras, (2) que elas são suficientes para a teoria da dedução, (3) que não sabemos como diminuir seus números. Mas em relação a (2), deve sempre haver algum elemento de dúvida, uma vez que é difícil ter certeza de que alguém nunca use algum princípio inconscientemente. O hábito de ser rigidamente guiado por regras simbólicas formais é uma salvaguarda contra assunções inconscientes; mas mesmo esta salvaguarda não é sempre adequada.

$*1$. IDEIAS E PROPOSIÇÕES PRIMITIVAS

Uma vez que todas as definições de termos são feitas por meio de outros termos, todo sistema de definições que não é circular deve iniciar de um certo aparato de termos indefinidos. É até certo ponto opcional que ideias nós tomaremos como indefinidas na matemática os motivos guiando nossa escolha serão (1) fazer o número de ideias indefinidas o menor possível, (2) entre dois sistemas nos quais o número é igual, escolher aquele que parece ser o mais simples e fácil. Não sabemos nenhuma maneira de provar que tal e tal sistema de ideias indefinidas contém o mínimo de ideias que darão tal e tal resultado.[53] Consequentemente, podemos apenas dizer que tais e tais ideias são indefinidas em tal e tal sistema, não que elas são indefiníveis. Seguindo Peano, chamaremos as ideias indefinidas e proposições indemonstradas de ideias e proposições primitivas, respectivamente. As ideias primitivas são explicadas por meio de descrições com a intenção de mostrar ao leitor o que se quer dizer; mas as explicações não constituem definições, porque elas realmente envolvem as ideias que elas explicam.

No presente número, enumeraremos primeiro as ideias primitivas requeridas nesta seção; então, definiremos *implicação*; e, então, enunciaremos as proposições primitivas requeridas nesta seção. Toda definição ou proposição no trabalho tem um número, para propósitos de referência. Seguindo Peano, usaremos números tendo uma parte inteira e uma decimal, para inserir novas proposições entre quaisquer duas. Uma mudança na parte inteira de um número será usada para corresponder a um novo capítulo. Definições geralmente terão números cuja parte decimal é menor que $\cdot 1$, e geralmente serão colocadas no começo de capítulos. Em referências, as partes inteiras dos números das proposições serão distinguidas por serem precedidas por uma estrela; então, "$*1\cdot 01$" significará a definição ou proposição assim numerada, e "$*1$" significará o capítulo em que proposições têm números cuja parte integral é 1, *i.e.*, o presente capítulo. Capítulos geralmente serão chamados "números".

IDEIAS PRIMITIVAS.

(1) *Proposições elementares.* Por uma proposição "elementar" nós queremos dizer uma proposição que não envolva quaisquer variáveis, ou, de outra maneira, uma que não envolva palavras como "todo", "algum", "o", ou equivalentes destas palavras. Uma proposição como "isso é vermelho", onde "isso" é algo dado na sensação, será elementar. Qualquer combinação de proposições elementares por meios da negação, disjunção ou conjunção (ver abaixo) serão elementares. Nas proposições primitivas do número presente, e, portanto, nas deduções destas proposições primitivas em $*2$–$*5$, as letras p, q, r e s serão usadas para denotar proposições elementares.

(2) *Funções proposicionais elementares.* Por uma "função proposicional elementar" nós significaremos uma expressão contendo um constituinte

[53] Os métodos reconhecidos para provar a independência não são aplicáveis, sem reserva, aos fundamentos. Cf. *Principles of Mathematics*, §17. O que é dito lá sobre proposições primitivas se aplica com mais força a ideias primitivas.

indeterminado, *i.e.*, uma variável, ou vários destes constituintes, e tal que, quando os constituintes indeterminados ou os constituintes são determinados, *i.e.*, quando os valores são atribuídos à variável ou variáveis, o valor resultante da expressão em questão é uma proposição elementar. Então, se p é uma proposição elementar indeterminada, "não-p" é uma função proposicional elementar.

Mostraremos em ∗9 como estender os resultados desse e dos números seguintes (∗1–∗5) a proposições que não são elementares.

(3) *Asserção.* Qualquer proposição pode ser asserida ou meramente considerada. Se eu digo "Cesar morreu", eu faço a asserção da proposição "Cesar morreu", e se eu digo "'Cesar morreu' é uma proposição", eu faço uma asserção diferente, e "Cesar morreu" não é mais asserido, mas meramente considerado. Similarmente, em uma proposição hipotética, por exemplo, "se $a = b$, então $b = a$", temos duas proposições não asseridas, a saber, "$a = b$" e "$b = a$", enquanto que o que *é* asserido é que a primeira destas implica a segunda. Na linguagem, indicamos quando uma proposição é meramente considerada com "*se* tal e tal", ou "*que* tal e tal", ou meramente por aspas invertidas. Em símbolos, se p é uma proposição, p por si mesma significa a proposição não asserida, enquanto a proposição asserida será designada por

$$\text{“}\vdash . p\text{”}.$$

O sinal "⊢" é chamado de sinal de asserção[54]; ele pode ser lido como "é verdade que" (apesar de filosoficamente isso não ser exatamente o que ele significa). Os pontos depois do sinal de asserção indicam seu escopo; isto é, tudo que se segue é asserido até que cheguemos ou a um número igual de pontos precedendo um sinal de implicação ou o fim da sentença. Então, "$\vdash : p . \supset . q$" significa "é verdade que p implica q", enquanto "$\vdash . p . \supset \vdash . q$" significa "$p$ é verdadeiro; portanto, q é verdadeiro".[55] O primeiro destes não necessariamente envolve a verdade de p ou de q, enquanto o segundo envolve a verdade de ambos.

(4) *Asserção de uma função proposicional.* Além da asserção de proposições definidas, precisamos do que chamaremos de "asserção de uma função proposicional". A noção geral de asserir *qualquer* função proposicional não é usada até ∗9, mas nós usamos de imediato a noção de asserir várias funções proposicionais *elementares* especiais. Seja ϕx uma função proposicional cujo argumento é x; então, podemos asserir ϕx sem atribuir um valor a x. Isso é feito, por exemplo, quando a lei da identidade é asserida da forma "A é A". Aqui, A é deixado indeterminado, porque apesar de A ser determinado, o resultado será verdadeiro. Então, quando asserimos ϕx, deixando x indeterminado, nós asserimos um valor ambíguo da nossa função. Isso só é legítimo se, mesmo que a ambiguidade possa ser determinada, o resultado seja verdadeiro. Então, considere, como uma ilustração, a proposição ∗1·2 abaixo, a saber,

[54] Nós adotamos tanto a ideia quanto o símbolo de asserção de Frege.
[55] Cf. *Principles of Mathematics*, §38.

$$“\vdash : p \vee p . \supset . p”,$$

i.e., "'p ou p' implica p". Aqui, p pode ser *qualquer* proposição elementar: deixando p indeterminado, nós obtemos uma asserção que pode ser aplicada a qualquer proposição elementar particular. Tais asserções são como as enunciações particulares em Euclides: quando é dito "seja ABC um triângulo isósceles; os ângulos da base são iguais", o que é dito se aplica a *qualquer* triângulo isósceles; isso é enunciado em relação a *um* triângulo, mas não em relação a um triângulo definido. Todas as asserções no presente trabalho, com pouquíssimas exceções, asserem funções proposicionais, não proposições definidas.

De fato, nenhuma proposição elementar constante ocorrerá no presente trabalho, ou pode ocorrer em qualquer trabalho que empregue apenas ideias lógicas. As ideias e proposições da lógica são *gerais*: uma asserção (por exemplo) que é verdadeira sobre Sócrates, mas não sobre Platão, não pertencerá à lógica[56], e se uma asserção que é verdadeira ambos ocorrer na lógica, ela não deve ser feita em relação a qualquer um deles, mas sim em relação a uma variável x. Para obter, em lógica, uma proposição definida em vez de uma função proposicional, é necessário tomar algumas funções proposicionais e asserir que elas são verdadeiras sempre ou algumas vezes, *i.e.*, com todos os possíveis valores para a variável ou com algum possível valor. Então, dando o nome "indivíduo" a qualquer coisa que não seja nem uma proposição nem uma função, a proposição "todo indivíduo é idêntico a si mesmo" ou a proposição "existem indivíduos" será uma proposição pertencente à lógica. Mas estas proposições não são elementares.

(5) *Negação.* Se p é qualquer proposição, a proposição "não-p", ou "p é falsa", será representada por "$\sim p$". Para o presente, p deve ser uma proposição *elementar*.

(6) *Disjunção.* Se p e q são quaisquer proposições, a proposição "p ou q", *i.e.*, "p é verdadeira ou q é verdadeira", onde as alternativas não são mutuamente excludentes, será representado por

$$“p \vee q”.$$

Isso é chamado de *disjunção* ou de *soma lógica* de p e q. Então, "$\sim p \vee q$" significará "p é falso ou q é verdadeiro"; "$\sim(p \vee q)$" significará "é falso que p ou q é verdadeiro", que é equivalente a "p e q são ambos falsos"; "$\sim(\sim p \vee \sim q)$" significará "é falso que p ou q são falsos", que é equivalente a "p e q são ambos verdadeiros", e assim por diante. Para o presente, p e q devem ser proposições elementares.

O exposto acima são todas as ideias primitivas requeridas na teoria da dedução. Outras ideias serão introduzidas na Seção B.

Definição de Implicação. Quando uma proposição q se segue de uma proposição p, de maneira que se p é verdadeiro, q também deve ser verdadeiro, dizemos que p

[56] Quando dizemos que uma proposição "pertence à lógica", queremos dizer que ela pode ser expressa em termos das ideias primitivas da lógica. Não queremos dizer que a lógica *se aplica* a ela, pois, isso certamente seria verdadeiro sobre qualquer proposição.

implica q. A ideia da implicação, na forma que a requeremos, pode ser definida. O significado a ser dado à implicação no que se segue pode à primeira vista parecer de alguma maneira artificial; mas, apesar de existirem outros significados legítimos, aquele aqui adotado é bem mais conveniente para nossos propósitos do que seus rivais. A propriedade essencial que requeremos para a implicação é esta: "O que é implicado por uma proposição verdadeira é verdadeiro". É em virtude desta propriedade que a implicação produz provas. Mas esta propriedade de maneira alguma determina se algo, e se for o caso, o quê, é implicado por uma proposição falsa. O que ele determina é que, se p implica q, então não pode ser o caso que p é verdadeiro e q é falso, *i.e.*, deve ser o caso que p é falso ou q é verdadeiro. A interpretação mais conveniente da implicação é dizer, inversamente, que se p é falso ou q é verdadeiro, então "p implica q" é verdadeiro. Consequentemente, "p implica q" será definido para significar: "p é falso ou q é verdadeiro". Então, nós temos

∗1·01. $p \supset q . = . \sim p \vee q$ Df.

Aqui, as letras "Df" significam "definição". Elas, juntas com o sinal de igualdade, devem ser consideradas como formando um único símbolo, significando "é definido para significar"[57]. O que quer que venha do lado esquerdo do sinal de igualdade é definido para significar o mesmo que vier do lado direito. Definição não está entre as ideias primitivas, porque definições lidam tão e somente com o simbolismo, não com o que é simbolizado; elas são introduzidas por conveniência prática, e são teoricamente desnecessárias.

Em virtude da definição acima, quando "$p \supset q$" valer, então p é falso ou q é verdadeiro; consequentemente, se p é verdadeiro, q deve ser verdadeiro. Então, a definição acima preserva a característica essencial da implicação; ela dá, na verdade, o significado mais geral compatível com a preservação desta característica.

PROPOSIÇÕES PRIMITIVAS.

∗1·1. Qualquer coisa implicada por uma proposição elementar verdadeira é verdadeira. Pp.[58]

O princípio acima será estendido em ∗9 a proposições que não são elementares. Ele não é o mesmo que "se p é verdadeiro, então se p implica q, q é verdadeiro". Esta é uma proposição verdadeira, mas ela vale igualmente quando p não é verdadeira e quando p não implica q. Ela não nos permite, como o princípio com o qual estamos preocupados, asserir q simplesmente, sem qualquer hipótese. Não podemos expressar o princípio simbolicamente, em parte porque qualquer simbolismo em que p seja uma variável apenas dá a *hipótese* de que p é verdadeiro, não o *fato* de que ele é verdadeiro.[59]

[57] O sinal de identidade não seguido pelas letras "Df" terão significado diferente, a ser definido posteriormente.
[58] As letras "Pp" significam "proposição primitiva", como com Peano.
[59] Para mais comentários sobre este princípio, cf. *Principles of Mathematics* §38.

O princípio acima deve ser usado sempre que tivermos que deduzir uma *proposição* de uma *proposição*. Mas, a imensa maioria das asserções no presente trabalho são asserções de funções proposicionais, *i.e.*, elas contem uma variável indeterminada. Uma vez que a asserção de uma função proposicional é uma ideia primitiva diferente da asserção de uma proposição, nós necessitamos de uma proposição primitiva diferente de $*1\cdot1$, apesar de aliada a ela, que nos permita deduzir a asserção de uma função proposicional "ψx" de asserções de das funções proposicionais "ϕx" e " $\phi x \supset \psi x$". Esta proposição primitiva é como se segue:

$*1\cdot11$. Quando ϕx puder ser asserido, onde x é uma variável real, e $\phi x \supset \psi x$ puder ser asserido, onde x é uma variável real, então ψx pode ser asserido, onde x é uma variável real. Pp.

Este princípio também deve ser assumido para funções de várias variáveis.

Parte da importância da proposição primitiva acima é graças ao fato de ela expressar, em simbolismo, um resultado que se segue da teoria dos tipos, que requer reconhecimento simbólico. Suponha que temos duas asserções de *funções proposicionais* " $\vdash . \phi x$" e "$\vdash . \phi x \supset \psi x$"; similarmente, em "$\phi x \supset \psi x$", o x é qualquer coisa para a qual "$\phi x \supset \psi x$" é significante. Além de alguns axiomas, nós não sabemos que os x's para os quais "$\phi x \supset \psi x$" é significante são os mesmos para os quais "ϕx" é significante. A proposição primitiva $*1\cdot11$, ao assegurar que, como o resultado das asserções das *funções proposicionais* "ϕx" e "$\phi x \supset \psi x$", a função proposicional "ψx" também pode ser asserida, assegura reconhecimento simbólico parcial, na forma mais útil nas deduções atuais, de um importante princípio que se segue da teoria dos tipos, a saber, que, se há qualquer argumento a para o qual tanto "ϕa" quanto "ψa" são significantes, então o escopo de argumentos para os quais "ϕx" é significante é o mesmo que o escopo de argumentos para os quais "ψx" é significante. É óbvio que, se a função proposicional "$\phi x \supset \psi x$" puder ser asserida, devem haver argumentos a para os quais "$\phi a \supset \psi a$" é significante, e para os quais, portanto, "ϕa" e "ψa" devem ser significantes. Consequentemente, pelo nosso princípio, os valores de x para os quais "ϕx" é significante são os mesmos para os quais "ψx" é significante, *i.e.*, o tipo de argumentos possíveis para $\phi \hat{x}$ (cf. p. 15)é o mesmo que o de argumentos possíveis para $\psi \hat{x}$. A proposição primitiva $*1\cdot11$, uma vez que enuncia uma consequência prática importante deste fato, é chamado de "axioma da identificação de tipo".

Outra consequência deste princípio, a saber, que se não há um argumento a para os quais tanto ϕa quando ψa são significantes, então ϕx é significante sempre que ψx é significante, e vice-versa, será dada no "axioma da identificação de variáveis reais", introduzida em $*1\cdot72$. Estas duas proposições, $*1\cdot11$ e $*1\cdot72$, dão o que é simbolicamente essencial para a condução de demonstrações de acordo com a teoria dos tipos.

A proposição acima $*1 \cdot 11$ é usada em toda inferência de uma função proposicional asserida para outra. Nós ilustraremos o uso desta proposição expondo a forma com que ela é usada pela primeira vez, na prova de $*2 \cdot 06$. Esta proposição é

$$“\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r”.$$

Nós já provamos, em $*2 \cdot 05$, a proposição

$$\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r.$$

É óbvio que $*2 \cdot 06$ resulta de $*2 \cdot 05$ por meios de $*2 \cdot 04$, que é

$$\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r.$$

Pois, se nesta proposição, substituirmos p por $q \supset r$, q por $p \supset q$ e r por $p \supset r$, obteremos, como uma instância de $*2 \cdot 04$, a proposição

$$\vdash :: q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r :. \supset :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r \text{ (1)},$$

e aqui a hipótese é asserida por $*2 \cdot 05$. Então, nossa proposição primitiva 111 nos permite asserir a conclusão.

$*1 \cdot 2$. $\vdash : p \vee p . \supset . p$ Pp.

Esta proposição diz: “Se p ou p é verdadeiro, então p é verdadeiro”. Ela é chamada de “princípio da tautologia”, e será referida pelo título abreviado “Taut.”. É conveniente, para propósitos de referência, dar nomes a poucos dos princípios mais importantes; em geral, proposições serão referidas por seus números.

$*1 \cdot 3$. $\vdash : q . \supset . p \vee q$ Pp.

Este princípio diz: “Se q é verdadeiro, então ‘p ou q’ é verdadeiro”. Então, por exemplo, se q é “hoje é quarta-feira” e p é “hoje é terça-feira”, o princípio diz: “Se hoje é quarta-feira, então hoje é terça-feira ou quarta-feira”. Ele é chamado de “princípio da adição”, porque ele diz que se uma proposição é verdadeira, qualquer alternativa pode ser adicionada sem torna-la falsa. O princípio será referido por “Add.”.

$*1 \cdot 4$. $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ Pp.

Este princípio diz que “p ou q” implica “q ou p”. Ele enuncia a lei permutativa para a adição lógica de proposições, e será chamado de “princípio da permutação”. Ele será referido por “Perm.”.

$*1 \cdot 5$. $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$ Pp.

Este princípio diz: “Se p é verdadeiro ou ‘q ou r’ é verdadeiro, então q é verdadeiro ou ‘p ou r’ é verdadeiro”. Ela é uma forma da lei associativa para a adição lógica, e será chamado de “princípio associativo”. Ele será referido por “Assoc.”. A proposição

$$p \vee (q \vee r) . \supset . (p \vee q) \vee r,$$

que seria a forma natural para a lei associativa, tem menos poder dedutivo, e, portanto, não é tomada como uma proposição primitiva.

∗1·6. $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ Pp.

Este princípio diz: "Se q implica r, então 'p ou q' implica 'p ou r'". Em outras palavras, em uma implicação, uma alternativa pode ser adicionada tanto à premissa quanto à conclusão sem prejudicar a verdade da implicação. O princípio será chamado de "princípio da soma" [*principle of summation*], e será referido por "Sum.".

∗1·7. Se p é uma proposição elementar, $\sim p$ é uma proposição elementar. Pp.

∗1·71. Se p e q são proposições elementares, $p \vee q$ é uma proposição elementar. Pp.

∗1·72. Se ϕp e ψp são funções proposicionais elementares que tomam proposições elementares como argumentos, $\phi p \vee \psi p$ é uma função proposicional elementar. Pp.

Este axioma deve se aplicar também a funções com duas ou mais variáveis. Ele é chamado de "axioma da identificação de variáveis reais". Será observado que se ϕ e ψ são funções que tomam argumentos de tipos diferentes, não há uma tal função como "$\phi x \vee \psi x$", porque ϕ e ψ não podem significantemente ter o mesmo argumento. Uma forma mais geral do axioma acima será dada em ∗9.

O uso dos axiomas acima ∗1·7·71·72 será geralmente tácito. É apenas através deles e dos axiomas de ∗9 que a teoria dos tipos explicadas na Introdução se torna relevante, e qualquer visão da lógica que justifica estes axiomas justifica tal raciocínio subsequente que emprega a teoria dos tipos.

Isso completa a lista de proposições primitivas requeridas para a teoria da dedução aplicada a proposições elementares.

$*2$. CONSEQUÊNCIAS IMEDIATAS DAS PROPOSIÇÕES PRIMITIVAS

Sumário de $*2$.

As provas das anterior das proposições deste número consistem simplesmente em notar que são instâncias das regras gerais dadas em $*1$. Em tais casos, estas regras não são premissas, uma vez que elas asserem qualquer instância delas mesmas, não algo além de suas instâncias. Consequentemente, quando uma regra geral é adicionada em provas iniciais, ela será apresentada entre colchetes[60], com indicações, quando necessário, sobre as alterações feitas nas letras daquelas dadas na regra para aquelas no caso considerado. Então, "Taut$\frac{\sim p}{p}$" significará o que "Taut" se torna quando $\sim p$ é escrito no lugar de p. Se "Taut$\frac{\sim p}{p}$" estiver enclausurado entre colchetes antes de uma proposição asserida, isso significa que, de acordo com "Taut", estamos asserindo o que "Taut" se torna quando $\sim p$ é escrito no lugar de p. O reconhecimento de que uma certa proposição é uma instância de alguma proposição geral previamente provada ou assumida é essencial para o processo de dedução de regras gerais, mas não pode ser erigido em uma regra geral, uma vez que a aplicação requerida é particular, e nenhuma regra geral pode *explicitamente* incluir uma aplicação particular.

Novamente, quando duas conjuntos de símbolos expressam a mesma proposição em virtude de uma definição, digamos, $*1\cdot01$, e uma delas, que chamaremos (1), foi asserida, a asserção da outra é feita ao escrever "[(1).($*1\cdot01$)]" antes dela, significando que, em virtude de $*1\cdot01$, o novo conjunto de símbolos assere a mesma proposição que foi asserida em (1). Uma referência à definição é distinguida da referência a uma proposição prévia por ser enclausurada por parênteses.

As proposições neste número são todas, ou quase todas, necessárias na dedução da matemática a partir de nossas proposições primitivas. Apesar de certos processos de abreviação serem gradualmente introduzidos, provas serão dadas de maneira bem completa, porque a importância do presente assunto reside não nas proposições em si mesmas, mas (1) no fato de que elas se seguem das proposições primitivas e (2) no fato de que o assunto é o exemplo mais fácil, simples e mais elementar do método simbólico de lidar com princípios da matemática em geral. Porções posteriores – a teoria das classes, relações, números cardinais, séries, números ordinais, geometria, etc. – todas empregam o mesmo método, mas com um aumento na complexidade nas entidades e funções consideradas.

As proposições mais importantes provadas no presente número são as seguintes:

$*2\cdot02$. $\vdash: q . \supset . p \supset q$

[60] Depois, deixaremos de marcar a distinção entre uma premissa e uma regra de acordo com a qual uma inferência é conduzida. É apenas nas primeiras provas que esta distinção é importante.

I.e., q implica que p implica q, *i.e.*, uma proposição verdadeira é implicada por qualquer proposição. Esta proposição é chamada de "princípio da simplificação" (referido por "Simp"), porque, como será visto posteriormente, ela nos permite passar da asserção conjunta de q e p para a asserção de q simplesmente. Quando o significado especial que demos à implicação é lembrado, será visto que esta proposição é óbvia.

∗2·03. $\vdash : p \supset \sim q . \supset . q \supset \sim p$

∗2·15. $\vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$

∗2·16. $\vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$

∗2·17. $\vdash : \sim q \supset \sim p . \supset . p \supset q$

Estas quatro proposições análogas constituem o "princípio da transposição", referido por "Transp". Eles conduzem à regra que em uma implicação, os dois lados podem ser trocados ao tornar uma negação em uma afirmação e uma afirmação em uma negação. Elas são, então, análogas à regra algébrica de que os dois lados de uma equação podem ser trocados ao se mudar os sinais.

∗2·04. $\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$

Este é o chamado "princípio comutativo" e referido por "Comm.". Ele diz que, se r se segue de q dado que p é verdadeiro, então r se segue de p dado que q é verdadeiro.

∗2·05. $\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$

∗2·06. $\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$

Estas duas proposições são a fonte do silogismo em Barbara (como será mostrado mais tarde) e são, portanto, chamadas de "princípio do silogismo" (referido por "Syll."). O primeiro diz que, se r se segue de q, então se q se segue de p, r se segue de p. O segundo diz a mesma coisa com as premissas permutadas.

∗2·08. $\vdash . p \supset p$

I.e., qualquer proposição implica a si mesma. Ela é chamada de "princípio da identidade", e será referido por "Id.". Ela não é a mesma coisa que a "lei da identidade" ("x é idêntico a x"), mas a lei da identidade é inferida dela. (cf. ∗13·15).

∗2·21. $\vdash : \sim p . \supset . p \supset q$

I.e., uma proposição falsa implica qualquer proposição.

As últimas proposições do presente número são geralmente subsumidas sob as proposições em ∗3 ou ∗4, que dão os mesmos resultados em formas mais compreensivas. Procederemos agora para as deduções formais.

∗2·01. $\vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$

Esta proposição diz que, se p implica sua própria falsidade, então p é falso. Ela é chamada de "princípio do *reductio ad absurdum*", e será referido por "Abs"[61]. A prova é como se segue (onde "Dem." é uma abreviação de "demonstração"):

Dem.

$$\left[Taut\frac{\sim p}{p}\right] \vdash : \sim p \vee \sim p . \supset . \sim p \quad (1)$$

$$[(1).(*1\cdot 01)] \vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$$

∗2·02. $\vdash : q . \supset . p \supset q$

Dem.

$$\left[Add\frac{\sim p}{p}\right] \vdash : q . \supset . \sim p \vee q \quad (1)$$

$$[(1).(*1\cdot 01)] \vdash : q . \supset . p \supset q$$

∗2·03. $\vdash : p \supset \sim q . \supset . q \supset \sim p$

Dem.

$$\left[Perm\frac{\sim p, \sim q}{p, q}\right] \vdash : \sim p \vee \sim q . \supset . \sim q \vee \sim p \quad (1)$$

$$[(1).(*1\cdot 01)] \vdash : p \supset \sim q . \supset . q \supset \sim p$$

∗2·04. $\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$

Dem.

$$\left[Assoc\frac{\sim p, \sim q}{p, q}\right] \vdash : \sim p \vee (\sim q \vee r) . \supset . \sim q \vee (\sim p \vee r) \quad (1)$$

$$[(1).(*1\cdot 01)] \vdash : p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$$

∗2·05. $\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$

Dem.

$$\left[Sum\frac{\sim p}{p}\right] \vdash : q \supset r . \supset : \sim p \vee q . \supset . \sim p \vee r \quad (1)$$

$$[(1).(*1\cdot 01)] \vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$$

∗2·06. $\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$

Dem.

$$\left[Comm\frac{q \supset r, p \supset q, p \supset r}{p, q, r}\right] \vdash :: q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r :. \quad (1)$$

$$\supset :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$$

$$[*2\cdot 05] \quad \vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r \quad (2)$$

$$[(1).(2).(*1\cdot 11)] \quad \vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$$

Na última linha desta prova, "(1).(2).∗1·11" significa que estamos inferindo de acordo com ∗1·11, tendo diante de nós uma proposição, a saber, $p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$, que, por (1), é implicada por $q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$, que, por (2), é verdadeira. Em geral, em tais casos, omitiremos a referência a ∗1·11.

[61] Há um artigo histórico interessante sobre este princípio por Vailati, "A proposito d' um passo del Teeteto e di uma dimostrazione di Euclide", *Rivista di Filosofia e scienze affine*, 1904.

As duas proposições acima serão ambas referidas por "princípio do silogismo" (encurtado por "Syll"), porque, como aparecerá mais tarde, o silogismo em Barbara é derivado delas.

∗2·07. $\vdash : p . \supset . p \vee p \left[* \ 1 \cdot 3 \frac{p}{q} \right]$

Aqui. Não colocamos nada além de "$*1 \cdot 3 \frac{p}{q}$", porque a proposição a ser provada é o que ∗1·3 se torna quando p é escrito no lugar de q.

∗2·08. $\vdash . p \supset p$

Dem.

$\left[* \ 2 \cdot 05 \frac{p \vee p, p}{q, r} \right] \vdash :: p \vee p . \supset . p : \supset :. p . \supset . p \vee p : \supset . p \supset p$ (1)

[Taut] $\vdash : p \vee p . \supset . p$ (2)

[(1).(2).∗1·11] $\vdash :. p . \supset . p \vee p : \supset . p \supset p$ (3)

[∗2·07] $\vdash : p . \supset . p \vee p$ (4)

[(3).(4).∗1·11] $\vdash . p \supset p$

∗2·1. $\vdash . \sim p \vee p$ [∗2·08.(∗1·01)]

∗2·11. $\vdash . p \vee \sim p$

Dem.

$\left[Perm \frac{\sim p, p}{p, q} \right] \vdash : \sim p \vee p . \supset . p \vee \sim q$ (1)

[(1).∗2·1.∗1·11] $\vdash : p \vee p . \supset . p$

Esta é a lei do terceiro excluído.

∗2·12. $\vdash . p \supset \sim (\sim p)$

Dem.

$\left[* \ 2 \cdot 11 \frac{\sim p}{p} \right] \vdash . \sim p \supset \sim (\sim p)$ (1)

[(1).(∗1·01)] $\vdash : p \supset \sim (\sim p)$

∗2·13. $\vdash . p \vee \sim \{ \sim (\sim p) \}$

Esta proposição é um lema para ∗2·14, que, com ∗2·12, constitui o princípio da dupla negação.

Dem.

$\left[Sum \frac{\sim p, \sim \{ \sim (\sim p) \}}{q, r} \right] \vdash :. \sim p . \supset . \sim \{ \sim (\sim p) \} . \supset : p \vee \sim p . \supset .$ (1)

$p \vee \sim \{ \sim (\sim p) \}$

$\left[* \ 2 \cdot 12 \ \frac{\sim p}{p} \right] \vdash : \sim p . \supset . \sim \{ \sim (\sim p) \}$ (2)

[(1).(2).∗1·11] $\vdash : p \vee \sim p . \supset . p \vee \sim \{ \sim (\sim p) \}$ (3)

[(3).∗2·11.∗1·11] $\vdash . p \vee \sim \{ \sim (\sim p) \}$

∗2·14. $\vdash . \sim (\sim p) \supset p$

Dem.

$\left[Perm\ \frac{\sim\{\sim(\sim p)\}}{q}\right] \quad \vdash: p \vee \sim\{\sim(\sim p)\}. \supset . \sim\{\sim(\sim p)\} \vee p$ (1)

$[(1).*2\cdot13.*1\cdot11] \quad \vdash \sim\{\sim(\sim p)\} \vee p$ (2)

$[(2).*1\cdot01] \quad \vdash . \sim\{\sim(\sim p)\} \vee p$

$*2\cdot15.$ $\vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$

$\left[*\ 2\cdot05\ \frac{\sim p, \sim(\sim q)}{p,r}\right] \vdash :. q \supset \sim(\sim q) . \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q)$ (1)

$\left[*\ 2\cdot12\ \frac{p}{q}\right] \vdash . q \supset \sim(\sim q)$ (2)

$[(1).(2).*1\cdot11] \quad \vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q)$ (3)

$\left[*\ 2\cdot03\ \frac{\sim p, \sim q}{p,q}\right] \vdash : \sim p \supset \sim(\sim q) . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p)$ (4)

$\left[*\ 2\cdot03\ \frac{\sim p, \sim(\sim p), p}{p,q,r}\right] \vdash :. \sim(\sim p) \supset p . \supset : \sim q \supset \sim(\sim p) . \supset . \sim q \supset p$ (5)

$[(5).*2\cdot14.*1\cdot11] \quad \vdash : \sim q \supset \sim(\sim p) . \supset . \sim q \supset p$ (6)

$\left[*\ 2\cdot05\ \frac{\sim p \supset q, \sim p \supset \sim(\sim q), \sim q \supset \sim(\sim p)}{p,q,r}\right] \vdash ::$

$\sim p \supset \sim(\sim q) . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) : \supset :.$

$\sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q) : \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p)$ (7)

$[(4).(7).*1\cdot11\ ] \quad \vdash :. \sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q) : \supset :$

$\sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p)$ (8)

$[(3).(8).*1\cdot11] \quad \vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p)$ (9)

$\left[*\ 2\cdot05\ \frac{\sim p \supset q, \sim q \supset \sim(\sim p), \sim q \supset p}{p,q,r}\right] \vdash :: \sim q \supset \sim(\sim p) . \supset . \sim q \supset p :$

$\supset :. \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) : \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$ (10)

$[(6).(10).*1\cdot11] \vdash :. \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) : \supset :$

$\sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$ (11)

$[(9).(10).*1\cdot11] \vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$

*Nota sobre a prova de *2·15.* Na prova acima, será visto que (3), (4) e (6) são respectivamente das formas $p_1 \supset p_2$, $p_2 \supset p_3$, $p_3 \supset p_4$, onde $p_1 \supset p_4$ é a proposição a ser provada. De $p_1 \supset p_2$, $p_2 \supset p_3$ e $p_3 \supset p_4$, a proposição $p_1 \supset p_4$ resulta por aplicações repetidas de ∗2·05 ou 2∗·06 (ambos chamados de "Syll"). É tedioso e desnecessário repetir este processo toda vez que ela é usada; ela será, portanto, abreviada em

"[Syll] $\vdash . (a) . (b) . (c) . \supset \vdash . (d)$", onde (a) é da forma $p_1 \supset p_2$, (b) é da forma $p_2 \supset p_3$, (c) é da forma $p_3 \supset p_4$, e (d) é da forma $p_1 \supset p_4$. A mesma abreviação será aplicada a um sorites[62] de qualquer tamanho.

Também, onde tivermos "$\vdash . p_1$" e "$\vdash . p_1 \supset p_2$", e p_2 é a proposição a ser provada, é conveniente escrever simplesmente

"$\vdash . p_2 . \supset$

[etc.] $\vdash . p_2$",

onde "etc." será uma referência para as proposições prévias em virtude das quais a implicação "$p_1 \supset p_2$" vale. Esta forma incorpora o uso de $*1 \cdot 11$ ou $*1 \cdot 1$, e torna várias provas imediatamente menores e mais fáceis de serem acompanhadas. Ela será usada nas primeiras duas linhas da prova seguinte.

$*2 \cdot 16$. $\vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$

Dem.

$$[*2 \cdot 12] \quad \vdash . q \supset \sim(\sim q) \supset$$

$$[*2 \cdot 05] \quad \vdash : p \supset q . \supset . p \supset \sim(\sim q) \qquad (1)$$

$$\left[* \ 2 \cdot 03 \frac{\sim q}{q}\right] \vdash : p \supset \sim(\sim q) . \supset . \sim q \supset \sim p \qquad (2)$$

$$[\text{Syll}] \quad \vdash . (1) . (2) . \supset \vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$$

Nota. A proposição a ser provada será chamada "Prop", e quando uma prova terminar, como aquela de 216, por uma implicação entre proposições asseridas, das quais o consequente é a proposição a ser provada, escreveremos "⊢.etc.⊃⊢.Prop". Então, "⊃⊢.Prop" termina uma prova, e corresponde mais ou menos a "Q.E.D.".

$*2 \cdot 17$. $\vdash : \sim q \supset \sim p . \supset . p \supset q$

Dem.

$$\left[* \ 2 \cdot 03 \frac{\sim q, p}{p, q}\right] \vdash : \sim q \supset \sim p . \supset . p \supset \sim(\sim q) \qquad (1)$$

$$[*2 \cdot 14] \quad \vdash : \sim(\sim q) \supset q : \supset$$

$$[* \ 2 \cdot 05] \quad \vdash : p \supset \sim(\sim q) . \supset . p \supset q \qquad (2)$$

$$[\text{Syll}] \quad \vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . Prop$$

$*2 \cdot 15$, $*2 \cdot 16$ e $*2 \cdot 17$ são formas do princípio da transposição, e serão referidos por "Transp.".

[62] N.T.: "*Sorites*" é o nome dado por Aristóteles a um silogismo no qual uma premissa implica em outra, que implica em outra, sucessivamente até a conclusão, de maneira que a conclusão tenha como sujeito o sujeito da primeira premissa e como predicado o predicado premissa que imediatamente a implicou. No caso do cálculo de implicações, um *sorites* é um argumento formado pela sucessiva aplicação da lei do silogismo a implicações, de maneira que o antecedente da conclusão seja o antecedente da primeira premissa e o consequente da conclusão seja o consequente da premissa que imediatamente a implicou.

∗2·18. $\vdash : {\sim}p \supset p . \supset . p$

Dem.

$[* \ 2 \cdot 12] \vdash . p \supset {\sim}({\sim}p) . \supset$

$[* \ 2 \cdot 05] \vdash . {\sim}p \supset p . \supset . {\sim}p \supset {\sim}({\sim}p)$ (1)

$\left[* \ 2 \cdot 01 \frac{\sim p}{p}\right] \vdash : {\sim}p \supset {\sim}({\sim}p) . \supset . {\sim}({\sim}p)$ (2)

[Syll] $\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash : {\sim}p \supset p . \supset . {\sim}({\sim}p)$ (3)

[∗2·14] $\vdash . {\sim}({\sim}p) \supset p$ (4)

[Syll] $\vdash . (3) . (4) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Este é o complemento do princípio do *reductio ad absurdum*. Ele diz que uma proposição que se segue da hipótese de sua própria falsidade é verdadeira.

∗2·2. $\vdash : p \supset p \vee p$

Dem.

$\vdash . Add . \supset \vdash : p . \supset . q \vee p$ (1)

$[Perm] \vdash : q \vee p . \supset . p \vee q$ (2)

$[Syll] \vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . Prop$

∗2·21. $\vdash : {\sim}p . \supset . p \supset p \ \left[* \ 2 \cdot 2 \frac{\sim p}{p}\right]$

As duas proposições acima são bem frequentemente usadas.

∗2·24. $\vdash : p . \supset . {\sim}p \supset q \ [* \ 2 \cdot 21 . Comm]$

∗2·25. $\vdash :. p : \vee : p \vee q . \supset . q$

Dem.

$\vdash . * \ 2 \cdot 1 . \supset \vdash : {\sim}(p \vee q) . \vee . (p \vee q) :$

$[Assoc] \supset \vdash : p . \vee . \{{\sim}(p \vee q) . \vee . (p \vee q)\} : \supset \vdash . Prop$

∗2·26. $\vdash :. {\sim}p : \vee : p \supset q . \supset . q \ \left[* \ 2 \cdot 25 \frac{\sim p}{p}\right]$

∗2·27. $\vdash :. p . \supset : p \supset q . \supset . q$ [∗2·26]

∗2·3. $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . p \vee (r \vee q)$

Dem.

$$\left[Perm\frac{q,r}{p,q}\right] \vdash : q \vee r . \supset . r \vee q :$$
$$\left[Sum\frac{q \vee r, r \vee q}{q,r}\right] \supset \vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . p \vee (r \vee q)$$

∗2·31. $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . (p \vee q) \vee r$

Esta e a proposição ∗2·32 juntas constituem a lei associativa para a adição lógica de proposições. Na prova, a seguinte abreviação (constantemente usada daqui em diante) será empregada[63]: Quando nós tivermos uma série de proposições da forma $a \supset b$, $b \supset c$, $c \supset d$, todas asseridas, e "$a \supset d$" é a proposição a ser provada, a prova por completo é como se segue:

$$[Syll] \quad \vdash :. a \supset b . \supset : b \supset c . \supset . a \supset c \quad (1)$$
$$\vdash : a . \supset . b \quad (2)$$
$$[(1).(2).*1\cdot 11] \vdash : b \supset c . \supset . a \supset c \quad (3)$$
$$\vdash : b . \supset . c \quad (4)$$
$$[(3).(4).*1\cdot 11] \vdash : a \supset c \quad (5)$$
$$[Syll] \quad \vdash :. a \supset c . \supset : c \supset d . \supset . a \supset d \quad (6)$$
$$[(5).(6).*1\cdot 11] \vdash : c \supset d . \supset . a \supset d \quad (7)$$
$$\vdash : c . \supset . d \quad (8)$$
$$[(7).(8).*1\cdot 11] \vdash : a . \supset . d$$

É tedioso escrever este processo por completo; portanto, nós simplesmente escrevemos

$$\vdash : a . \supset b .$$
$$[etc.] \supset c .$$
$$[etc.] \supset . d : \supset \vdash . Prop,$$

onde "$a \supset d$" é a proposição a ser provada. Nós indicamos na esquerda por referência em colchetes as proposições em virtude das quais a implicação sucessiva vale. Colocamos um ponto (não dois) depois de "b", para mostrar que é b, não "$a \supset b$", que implica c. Mas nós colocamos dois pontos depois de d, para mostrar que agora estamos lidando com toda a proposição "$a \supset d$". Se "$a \supset d$" não é a proposição a ser provada, mas sim a ser usada subsequentemente na prova, nós usamos

$$\vdash : a . \supset b .$$

[63] Esta abreviação se aplica ao mesmo tipo de casos que aqueles tratados na nota para ∗2·15, mas é mais conveniente que a abreviação explicada naquela nota.

$$[etc.]\supset c.$$
$$[etc.]\supset.\,d \qquad (1)$$

e então "(1)" significa "$a \supset d$". A prova de ∗2·31 é como se segue:

Dem.

$$\begin{aligned}
&[*\ 2\cdot 3] \vdash : p\vee(q\vee r).\supset.\,p\vee(r\vee q).\\
&\left[Assoc\frac{r,q}{q,r}\right] \supset.\,r\vee(p\vee q).\\
&\left[Perm\frac{r,\,p\vee q}{p,q}\right] \supset.\,(p\vee q)\vee r : \supset\vdash.\,Prop \qquad (1)
\end{aligned}$$

∗2·32. $\vdash : (p\vee q)\vee r.\supset.\,p\vee(q\vee r)$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\left[Perm\frac{p\vee q,\,r}{p,\ q}\right] \vdash : (p\vee q)\vee r.\supset.\,r\vee(p\vee q).\\
&\left[Assoc\frac{r,p,\,q}{p,\,q,r}\right] \qquad \supset.\,r\vee(p\vee q).\\
&[*\ 2\cdot 3] \qquad \supset.\,(p\vee q)\vee r : \supset\vdash.\,Prop
\end{aligned}$$

∗2·33. $p\vee q\vee r. =.\,(p\vee q)\vee r\ \ Df$

Esta definição serve apenas para evitar o uso de parênteses.

∗2·36. $\vdash :.\,q\supset r.\supset : p\vee q.\supset.\,r\vee p$

Dem.

$$\begin{aligned}
&[Perm] \vdash : p\vee r.\supset.\,r\vee p\\
&\left[Syll\frac{p\vee q,\,p\vee r,\,r\vee p}{p,\ q,\ r}\right] \supset\vdash :.\,p\vee q.\supset.\,p\vee r : \supset : p\vee q.\supset.\,r\vee p \qquad (1)\\
&[Sum] \quad \vdash :.\,q\supset r.\supset : p\vee q.\supset.\,p\vee r \qquad (2)
\end{aligned}$$

∗2·37. $\vdash :.\,q\supset r.\supset : q\vee p.\supset.\,p\vee r$

$[Syll\,.\ Perm\,.\ Sum]$

∗2·38. $\vdash :.\,q\supset r.\supset : q\vee p.\supset.\,r\vee p$

$[Syll\,.\ Perm\,.\ Sum]$

As provas de ∗2·37·38 são exatamente análogas àquela de ∗2·36. (Nós usamos "∗2·37·38" como uma abreviação de "∗2·37" e "∗2·38". Tais abreviação serão usadas durante o texto).

O uso de um princípio geral de dedução, como alguma das formas de "Syll", em uma prova, é diferente do uso das premissas particulares às quais o princípio de dedução é aplicado. O princípio de dedução nos dá a regra geral através da qual a inferência é feita, mas não é ele próprio uma premissa na inferência. Se nós o tratarmos como uma premissa, nós precisaremos dele ou de outra regra geral que nos permita inferir a conclusão desejada, e então nós gradualmente teríamos um aumento no n´mero de premissas sem jamais podermos fazer qualquer inferência. Então, quando uma regra geral é aduzida ao fazermos uma inferência, como quando nós escrevemos "$[Syll] \vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . Prop$", a menção de "Syll" é requerida apenas para lembrar o leitor de como a inferência é feita.

A regra de inferência pode, contudo, ocorrer como uma das premissas ordinárias, isto é, no caso de "Syll", por exemplo, a proposição " $p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$" pode ser uma daquelas às quais nossas regras de dedução se aplicam, e é então uma premissa ordinária. A distinção entre os dois usos dos princípios de dedução é de alguma importância filosófica, e nas provas abaixo nós a indicamos ao colocar a regra de inferência entre colchetes. No entanto, é praticamente inconveniente continuar distinguindo da maneira da referência. Portanto, nós iremos, a partir de então, aduzir premissas ordinárias em colchetes onde for conveniente, e aduzir regras de inferência, junto com outras proposições, em premissas asseridas, i.e., nós escreveremos, por exemplo,

"$\vdash . (1) . (2) . Syll . \supset \vdash . Prop$"

em vez de "$[Syll] \vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . Prop$"

∗2·4. $\vdash :. p . \vee . q \vee q : \supset . p \vee q$

Dem.

$\vdash * 2{\cdot}31 . \supset \vdash :. p . \vee . p \vee q : \supset : p \vee p . \vee . q :$

$[Taut . * 2{\cdot}38] \supset : p \vee q :. \supset \vdash . Prop$

∗2·41. $\vdash :. q . \vee . p \vee q : \supset . p \vee q$

Dem.

$\left[Assoc \frac{q, p, q}{p, q, r}\right] \vdash :. q . \vee . p : \supset : p . \vee . q \vee q :$

$[Taut . Sum] \supset : p \vee q :. \supset \vdash . Prop$

∗2·42. $\vdash :. \sim p . \vee . p \supset q : \supset . p \supset q \left[* 2{\cdot}4 \frac{\sim p}{p}\right]$

∗2·43. $\vdash :. \sim p . \supset . p \supset q : \supset . p \supset q [* 2{\cdot}42]$

∗2·45[64]. $\vdash : \sim (p \vee q) . \supset . \sim p$ $[* 2{\cdot}2 . Transp]$

∗2·46. $\vdash : \sim (p \vee q) . \supset . \sim q$ $[* 1{\cdot}3 . Transp]$

[64] NT: O autor pulou a contagem da proposição ∗2·44.

∗2·47. $\vdash: \sim(p \vee q) . \supset . \sim p \vee q \quad \left[* \ 2 \cdot 45 . * \ 2 \cdot 2 \ \frac{\sim p}{p} . Syll\right]$

∗2·48. $\vdash: \sim(p \vee q) . \supset . p \vee \sim q \quad \left[* \ 2 \cdot 46 . * \ 1 \cdot 3 \ \frac{\sim q}{q} . Syll\right]$

∗2·49. $\vdash: \sim(p \vee q) . \supset . \sim p \vee \sim q \quad \left[* \ 2 \cdot 45 . * \ 2 \cdot 2 \ \frac{\sim p}{p} . Syll\right]$

∗2·5. $\vdash: \sim(p \supset q) . \supset . \sim p \supset q \quad \left[* \ 2 \cdot 47 \frac{\sim p}{p}\right]$

∗2·51. $\vdash: \sim(p \supset q) . \supset . p \supset \sim q \quad \left[* \ 2 \cdot 48 . \frac{\sim p}{p}\right]$

∗2·52. $\vdash: \sim(p \supset q) . \supset . \sim p \supset \sim q \quad \left[* \ 2 \cdot 49 \frac{\sim p}{p}\right]$

∗2·521. $\vdash: \sim(p \vee q) . \supset . \sim p \vee \sim q \quad [* \ 2 \cdot 45 . 17]$

∗2·53. $\vdash: p \vee q . \supset . \sim p \supset q$

Dem.

$\vdash . * \ 2 \cdot 12 \cdot 38 . \supset \vdash: p \vee q . \supset . \sim(\sim p) \vee q : \supset \vdash . Prop$

∗2·54. $\vdash: \sim p \supset q . \supset . p \vee q [* \ 2 \cdot 14 \cdot 38]$

∗2·55. $\vdash :. \sim p . \supset : p \vee q . \supset . q [* \ 2 \cdot 53 . Comm]$

∗2·56. $\vdash :. \sim q . \supset : p \vee q . \supset . p \qquad \left[* \ 2 \cdot 55 . \frac{q, p}{p, q} . Perm\right]$

∗2·6. $\vdash :. \sim p \supset q . \supset : p \supset q . \supset . q$

Dem.

$[* \ 2 \cdot 38] \vdash :. \sim p \supset q . \supset : \sim p \vee q . \supset . q \vee q$ (1)

$[Taut . Syll] \vdash :. \sim p \vee q . \supset . q \vee q : \supset : \sim p \vee q . \supset . q$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . Syll . \supset \vdash :. \sim p \supset q . \supset : \sim p \vee q . \supset . q :. \supset \vdash . Prop$

∗2·61. $\vdash :. p \supset q . \supset : \sim p \supset q . \supset . q \qquad [* \ 2 \cdot 6 . Comm]$

∗2·62. $\vdash :. p \vee q . \supset : p \supset q . \supset . q \qquad [* \ 2 \cdot 53 \cdot 6 . Syll]$

∗2·621. $\vdash :. p \supset q . \supset : p \vee q . \supset . q \qquad [* \ 2 \cdot 62 \cdot Comm]$

∗2·63. $\vdash :. p \vee q . \supset : \sim p \vee q . \supset . q \quad [* \ 2 \cdot 62]$

∗2·64. $\vdash :. p \vee q . \supset : p \vee \sim q . \supset . p \left[* \ 2 \cdot 63 \cdot \frac{q, p}{p, q} . Perm\right]$

∗2·65. $\vdash :. p \supset q . \supset : p \supset \sim q . \supset . \sim p \left[* \ 2 \cdot 64 \ \frac{\sim p}{p}\right]$

∗2·67[65]. $\vdash :. p \vee q . \supset . q : \supset . p \supset q$

Dem.

$[* \ 2 \cdot 54 . Syll] \vdash :. p \vee q . \supset . q : \supset : \sim p \supset q . \supset . q$ (1)

$[* \ 2 \cdot 24 . Syll] \vdash :. \sim p \supset q . \supset . q : \supset . p \supset q$ (2)

[65] NT: O autor pulou a contagem da proposição ∗2·66.

$\vdash . (1) . (2) . Syll . \supset \vdash . Prop$

∗2·68. $\vdash :. p \supset q . \supset . q : \supset . p \vee q$

Dem.

$\left[* \ 2{\cdot}67 \frac{\sim p}{p} \right] \vdash :. p \supset q . \supset . q : \supset . \sim p \supset q$ (1)

$\vdash . (1) . * \ 2{\cdot}54 . \supset \vdash . Prop$

∗2·69. $\vdash :. p \supset q . \supset . q : \supset : q \supset p . \supset . p \left[* \ 2{\cdot}68 {\cdot} Perm . * \ 2{\cdot}62 \frac{q, p}{p, q} \right]$

∗2·69. $\vdash :. p \supset q . \supset . q : \supset : q \supset p . \supset . p \left[* \ 2{\cdot}68 {\cdot} Perm . * \ 2{\cdot}62 \frac{q, p}{p, q} \right]$

∗2·73[66]. $\vdash :. p \supset q . \supset : p \vee q \vee r . \supset . q \vee r \ [* \ 2{\cdot}621{\cdot}38]$

∗2·74. $\vdash :. q \supset p . \supset : p \vee q \vee r . \supset . p \vee r \left[* \ 2{\cdot}73 \frac{q, p}{p, q} . Assoc . Syll \right]$

∗2·75. $\vdash :: p \vee q . \supset :. p . \vee . q \supset r : \supset . p \vee r \left[* \ 2{\cdot}73 \frac{q, p}{p, q} . Assoc . Syll \right]$

∗2·76. $\vdash :. p . \vee . q \supset r : \supset : p \vee q . \supset . p \vee r \ [* \ 2{\cdot}75 . Comm]$

∗2·77. $\vdash :. p . \supset . q . \supset r : \supset : p \supset q . \supset . p \supset r \left[* \ 2{\cdot}76 \frac{\sim p}{p} \right]$

∗2·8. $\vdash :. q \vee r . \supset : \sim r \vee s . \supset . q \vee s$

Dem.

$\vdash . * \ 2 \ * \ 53 . Perm . \supset \vdash :. q \vee r . \supset : \sim r \supset q :$

$[* \ 2{\cdot}38] \qquad \supset : \sim r \vee s . \supset . q \vee s :. \supset \vdash . Prop$

∗2·81. $\vdash :: q . \supset . r \supset s : \supset :. p \vee q . \supset : p \vee r . \supset . p \vee s$

Dem.

$\vdash . Sum . \supset \vdash :: q . \supset . r \supset s : \supset :. p \vee q . \supset : p . \vee . r \supset s$ (1)

$\vdash . * \ 2{\cdot}76 . Syll . \supset \vdash :: p \vee q . \supset : p . \vee . r \supset s :. \supset :.$ (2)

$p \vee q . \supset : p \vee r . \supset . p \vee s$

$\vdash \ (1) . (2) . \supset \vdash . Prop$

∗2·82. $\vdash :. p \vee q \vee r . \supset : p \vee \sim r \vee s . \supset . p \vee q \vee s$

$\left[* \ 2{\cdot}8 . * \ 2{\cdot}81 \frac{q \vee r, \sim r \vee s, q \vee s}{q, \quad r, \quad s} \right]$

∗2·83. $\vdash :: p . \supset . q \supset r : \supset :. p . \supset . r \supset s : \supset : p . \supset . q \supset s$

$\left[* \ 2{\cdot}82 \ \frac{\sim p, \ \sim q}{p, \ q} \right]$

∗2·85[67]. $\vdash :. p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : p . \vee . q \supset r$

Dem.

$[Add . Syll] \vdash :. p \vee q . \supset . r : \supset . q \supset r$ (1)

[66] NT: O autor pulou a contagem das proposições ∗2·70, ∗2·71 e ∗2·72.
[67] NT: O autor pulou a contagem da proposição ∗2·84.

$\vdash . * \ 2{\cdot}55 . \supset \vdash :: \sim p . \supset :. p \vee r . \supset . r :.$

$[Syll] \supset :. p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : p \vee q . \supset . r :.$

$[(1) . * \ 2{\cdot}83] \supset :. p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : q \supset r$ (2)

$\vdash . (2) . Comm. \supset \vdash :. \quad p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : \sim p . \supset . q \supset r :$

$[2 \ * \ {\cdot}54] \supset : p . \vee . q \supset r :. \supset \vdash . Prop$

∗2·86. $\vdash :. p \supset q . \supset . p \supset r : \supset : p . \supset . q \supset r \left[* \ 2{\cdot}85 \frac{\sim p}{p} \right]$

$*3$. O PRODUTO LÓGICO DE DUAS PROPOSIÇÕES

Sumário de $*3$.

O produto lógico de duas proposições p e q é praticamente a proposição "p e q são ambas verdadeiras". Mas isso, da maneira posta, deve ser uma nova ideia primitiva. Portanto, nós tomamos o produto lógico como sendo a proposição $\sim(\sim p \vee \sim q)$, i.e., "é falso que ou p é falsa ou q é falsa", que é obviamente verdadeiro quando e somente quando p e q são ambas verdadeiras. Então, nós temos

$*3 \cdot 01$. $p.q. = . \sim(\sim p \vee \sim q)$ Df.

onde "$p.q$" é o produto lógico de p e q.

$*3 \cdot 02$. $p \supset q \supset r. = . p \supset q . q \supset r$ Df.

Esta definição serve apenas para abreviar provas.

Quando nós temos duas funções proposicionais asseridas "$\vdash . \phi x$" e "$\vdash . \psi x$", nós teremos "$\vdash . \phi x . \psi x$" sempre que ϕ e ψ tomarem argumentos do mesmo tipo. Isso será provado para qualquer função em $*9$; para o presente, estamos confinados a funções proposicionais *elementares* de proposições elementares. Neste caso, o resultado é provado como se segue:

Por $*1 \cdot 7$, $\sim \phi p$ e $\sim \psi p$ são funções proposicionais elementares, e, portanto, por $*1 \cdot 72$, $\sim \phi p \vee \sim \psi p$ é uma função proposicional elementar. Então, por $*2 \cdot 11$,

$$\vdash : \sim \phi p \vee \sim \psi p . \vee . \sim(\sim \phi p \vee \sim \psi p).$$

Então, por $*2 \cdot 32$ e $*1 \cdot 01$,

$$\vdash :. \phi p . \supset : \psi p . \supset . \sim(\sim \phi p \vee \sim \psi p),$$

i.e., por $*3 \cdot 01$,

$$\vdash :. \phi p . \supset : \psi p . \supset . \phi p . \psi p.$$

Assim, por $*1 \cdot 11$, quando nós tivermos "$\vdash . \phi p$" e "$\vdash . \psi p$", nós teremos "$\vdash . \phi p . \psi p$". Esta proposição é a $*3 \cdot 03$. Ela deve ser entendida, como $*1 \cdot 72$, como aplicando-se também a funções com duas ou mais variáveis.

A fórmula acima é forma praticamente mais útil do axioma da identificação de variáveis reais (cf. $*1 \cdot 72$). Na prática, quando a restrição a proposições *elementares* e funções proposicionais for removida, um meio conveniente pelo qual duas funções podem frequentemente serem reconhecidas como tomando argumentos do mesmo tipo é o seguinte:

Se ϕx contém, de alguma maneira, um constituinte $\chi(x, y, z, \ldots)$ e ψx contém, de alguma maneira, um constituinte $\chi(x, u, v, \ldots)$, então tanto ϕx quando ψx tomam argumentos do tipo do argumento x em $\chi(x, y, z, \ldots)$, e, portanto, ϕx e

ψx tomam argumentos do mesmo tipo. Então, em tal caso, se tanto ϕx quando ψx podem ser asseridos, $\phi x. \psi x$ também pode.

Como um exemplo do uso dessa proposição, considere a prova de ∗3·47. Lá, nós provamos

$$\vdash :. p \supset r. q \supset s. \supset : p. q. \supset . q. r \qquad (1)$$

e $$\vdash :. p \supset r. q \supset s. \supset : q. r. \supset . r. s \qquad (2)$$

e o que nós queremos provar é

$$p \supset r. q \supset s. \supset : p. q. \supset . r. s,$$

que é a proposição ∗3·47. Agora, em (1) e (2), p, q, r e s são proposições elementares (como em qualquer lugar da seção A); então, por ∗1·7·71, aplicado repetidamente, " $p \supset r. q \supset s. \supset : p. q. \supset . q. r$" e "$p \supset r. q \supset s. \supset : q. r. \supset . r. s$" são funções proposicionais elementares. Então, por ∗3·03, nós temos

$$\vdash :: p \supset r. q \supset s. \supset : p. q. \supset . q. r :. p \supset r. q \supset s. \supset : q. r. \supset . r. s,$$

de onde o resultado se segue por ∗3·43 e ∗3·33.

As principais proposições do presente número são as seguintes:

∗3·2. $\vdash :. p. \supset : q. \supset . p. q$

I.e., "p implica que q implica $p. q$", i.e., se cada uma das duas proposições é verdadeira, então o produto lógico das duas também é.

∗3·26. $\vdash : p. q. \supset . p$

∗3·27. $\vdash : p. q. \supset . q$

I.e., se o produto lógico de duas proposições é verdadeiro, então cada uma das duas proposições é verdadeira.

∗3·3. $\vdash :. p. q. \supset . r : \supset : p. \supset . q \supset r$

I.e., se p e q conjuntamente implicam r, então p implica que q implica r. Este princípio (seguindo Peano) será chamado de "exportação", porque q é "exportado" da hipótese. Ele será referido por "Exp."

∗3·31. $\vdash :. p. \supset . q \supset r : \supset : p. q. \supset . r$

Esta é a correlata da proposição acima, e será chamada (seguindo Peano) de "importação" (referida por "Imp.").

∗3·35. $\vdash : p. p \supset q. \supset . q$

I.e., "se p é verdadeiro, e q se segue de p, então q é verdadeiro". Ele será chamado de "princípio da asserção" (referido por "Ass."). Ele difere de ∗1·1 pelo fato de que ele não se aplica apenas quando p é realmente verdadeiro, mas requer apenas que a *hipótese* de p seja verdadeira.

∗3·43. $\vdash :. p \supset q. p \supset r. \supset : p. \supset . q. r$

I.e., se uma proposição implica cada uma de duas proposições, então ela implica o seu produto lógico. Isso é chamado por Peano de “princípio da composição”. Ele será referido por “Comp.”.

∗3·45. $\vdash :. p \supset q . \supset : p . r . \supset . q . r$

I.e., ambos os lados de uma implicação podem ser multiplicados por um favor comum. Este princípio é chamado por Peano de “princípio do fator”. Ele será referido por “Fact.”.

∗3·47. $\vdash :. p \supset r . q \supset r . \supset : p . q . \supset . r . s$

I.e., se p implica q e r implica s, então p e q conjuntamente implicam r e s conjuntamente. A lei da contradição, “$\vdash . \sim(p . \sim p)$”, é provada neste número (∗3·24); mas a despeito de sua fama, nós encontramos poucas ocasiões para seu uso.

∗3·01. $p . q . = . \sim(\sim p \lor \sim q)$ Df

∗3·02. $p \supset q \supset r . = . p \supset q . q \supset r$ Df

∗3·03. Dadas duas funções proposicionais elementares asseridas, “$\vdash . \phi p$” e “$\vdash . \psi p$”, cujos argumentos são proposições elementares, nós temos $\vdash . \phi p . \psi p$.

Dem.

$\vdash$.∗1·7·72.∗2·11. $\supset \vdash : \sim \phi p \lor \sim \psi p . \lor . \sim(\sim \phi p \lor \sim \psi p)$ (1)

$\vdash$.(1).∗2·32.(∗1·01).$\supset \vdash :. \phi p . \supset : \psi p . \supset . \sim(\sim \phi p \lor \sim \psi p)$ (2)

$\vdash$.(2).(∗3·01).$\supset \vdash :. \phi p . \supset :. \psi p . \supset . \phi p . \psi p$ (3)

$\vdash$.(3).∗1·11. $\supset \vdash . Prop$

∗3·1. $\vdash : p . q . \supset . \sim(\sim p \lor \sim q)$ $[Id. (∗3·01)]$

∗3·11. $\vdash : \sim(\sim p \lor \sim q) . \supset . p . q$ $[Id. (∗3·01)]$

∗3·12. $\vdash : \sim p . \lor . \sim q . \lor . p . q \left[* \ 2{\cdot}11 \frac{\sim p \lor \sim q}{p} \right]$

∗3·13. $\vdash : \sim(p . q) . \supset . \sim p \lor \sim q$ [∗3·11.Transp]

∗3·14. $\vdash : \sim p \lor \sim q . \supset . \sim(p . q)$ [∗3·1.Transp]

∗3·2. $\vdash :. p . \supset : q . \supset . p . q$ [∗3·12]

∗3·21. $\vdash :. q . \supset : p . \supset . p . q .$ [∗3·2.Comm]

Esta é uma forma da lei da comutação para a multiplicação lógica. Uma forma mais completa é dada em ∗4·3.

Dem.

$\left[* \ 3{\cdot}13 \frac{q,p}{p,q} \right] \vdash : (q . p) . \supset . \sim q \lor \sim p .$

$[Perm] \qquad \supset . \sim p \lor \sim q .$

$[*3\cdot14]$ $\supset.\sim(p.q)$ (1)

$\vdash.(1).Transp.\supset\vdash.Prop$

Note que, na prova acima, "(1)" significa a proposição

"$\sim(q.p).\supset.\sim(p.q)$",

conforme explicado na prova de $*2\cdot31$.

$*3\cdot24$. $\vdash.\sim(p.\sim q)$

Dem.

$$\left[*\ 2\cdot11\ \frac{\sim p}{p}\right]\vdash.\sim p\vee\sim(\sim p).\supset$$
$$\left[*\ 3\cdot14\ \frac{\sim p}{q}\right]\vdash.\sim(p.\sim q)$$

A proposição acima é a lei da contradição.

$*3\cdot26$. $\vdash:p.q.\supset.p$

Dem.

$\left[*\ 2\cdot02\ \frac{q,p}{p,q}\right]\vdash:p.\supset.q\supset p$ (1)

$[(1).(*\ 1\cdot01)]\vdash:\sim p.\vee.\sim q\vee p:$

$[*2\cdot31]\supset\vdash:\sim(\sim p\vee\sim q).\supset.p$ (2)

$[(2).(*3\cdot01)]$ $\vdash:p.q.\supset.p$

$*3\cdot27$. $\vdash:p.q.\supset.q$

Dem.

$[*3\cdot22]$ $\vdash:p.\supset.q\supset p.$

$\left[*\ 3\cdot26\ \frac{q,p}{p,q}\right]\supset.q:\supset\vdash.Prop$

Ambos, $*3\cdot26\cdot27$, serão chamados de "princípio da simplificação", como $*2\cdot02$, de onde eles são deduzidos. Eles serão referidos por "Simp".

$*3\cdot3$. $\vdash:p.q.\supset.r:\supset:p.\supset.q\supset r$

Dem.

$[Id.(*3\cdot01)]\vdash:.p.q.\supset.r:\supset:\sim(\sim p\vee\sim q).\supset.r:$

[Transp] $\supset:\sim r.\supset.\sim p\vee\sim q:$

$[\mathrm{Id.}(*1\cdot01)]$ $\supset:\sim r.\supset.p\supset\sim q:$

$[Comm]$ $\supset:p.\supset.\sim r\supset\sim q:$

$[Transp.Syll]$ $\supset:p.\supset.q\supset r:.\supset\vdash.Prop$

$*3\cdot31$.